Wykład 13

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

22 listopada 2011

Niech M będzie powierzchnią wymiaru k a D zwartym podzbiorem tej powierzchni.

Definicja 1. Mówimy, że D jest *powierzchnią z brzegiem* jeśli dla każdego punktu $x_0 \in D$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ i lokalny układ współrzędnych $\varphi = (y^1, y^2, \ldots, y^k)$ jednego z dwóch rodzajów: (1) Otwarty zbiór $\mathcal{O}$ jest zawarty w D, (2) $\mathcal{O}$ nie jest zawarty w D i wówczas dla każdego $x \in \mathcal{O} \cap D$ zachodzą warunki $x \in D \Leftrightarrow y^1(x) \leqslant 0$ oraz $x \in \partial D \Leftrightarrow y^1(x) = 0$.

Z definicji widać łatwo, że ∂D jest w takim przypadku $(k-1)$-wymiarową podrozmaitością, gdyż współrzędne $(y^2, y^3, \ldots, y^k)$ zadają układ współrzędnych na ∂D. W ten sposób zdefiniowaliśmy k-wymiarową powierzchnię z brzegiem zanurzoną w k-wymiarowej powierzchni. Możemy także, dla $l < k$ zdefiniować l-wymiarową powierzchnię z brzegiem D zanurzoną w k-wymiarowej powierzchni. Wymagamy w tym przypadku aby istniała l-wymiarowa powierzchnia N zanurzona w k-wymiarowej powierzchni M taka, że D jest powierzchnią z brzegiem względem N.

Załóżmy teraz, że M jest powierzchnią wymiaru k zorientowaną, a D powierzchnią wymiaru k z brzegiem zanurzoną w M. Brzeg ∂D ma w takim przypadku naturalną orientację: Niech x_0 będzie punktem należącym do brzegu i niech $\varphi = (y^1, y^2, \ldots, y^k)$ będzie układem współrzędnych w otoczeniu punktu x_0 takim, jak układ drugiego rodzaju w definicji powierzchni z brzegiem. Założymy ponadto, że baza przestrzeni stycznej $\mathsf{T}_{x_0}M$ związana z układem współrzędnych φ ma orientację zgodną z wyróżnioną orientacją $\imath$ powierzchni M. Z określenia układu współrzędnych drugiego rodzaju wynika, że wektor styczny $\frac{\partial}{\partial y^1}$ „pokazuje" na zewnątrz powierzchni z brzegiem D, tzn obraz krzywej, której postać we współrzędnych to

$$t \longmapsto (t, 0, 0, \ldots, 0)$$

leży wewnątrz D dla $t < 0$ i na zewnątrz dla $t > 0$, przynajmniej dla małych wartości t. Orientację przestrzeni stycznej do brzegu w punkcie x_0 zadawaną przez bazę

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^2}, \frac{\partial}{\partial y^3}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^k}\right)$$

oznaczymy $\partial\imath$ i nazwiemy orientacją brzegu indukowaną z M.

Tę samą treść wypowiadamy często inaczej: niech $\overrightarrow{n}$ będzie wektorem stycznym do M zaczepionym w punkcie x_0 należącym do brzegu D i pokazującym na zewnątrz D. Mówimy, że baza $(f_1, \ldots, f_k)$ jest zgodna z orientacją $\partial\imath$ brzegu jeśli baza $(\overrightarrow{n}, f_1, \ldots, f_k)$ jest zgodna z orientacją $\imath$ powierzchni M.

Oto bardzo istotne, także z punktu widzenia teorii fizycznych, twierdzenie dotyczące całkowania form różniczkowych po powierzchniach z brzegiem.

Przykład 1 (Stokes)**.** *Niech D będzie k-wymiarową powierzchnią z brzegiem a α $(k-1)$ wymiarową formą na M określoną w otoczeniu D. Wówczas*

$$\int_{D,\imath} d\alpha = \int_{\partial,D\partial\imath} \alpha.$$

Zanim przedstawimy ideę dowodu tego twierdzenia rozwiążmy jeden przykład:

Przykład 1. Sprawdzić twierdzenie Stokes'a na następującym przykładzie:

$$M = \{(x,y,z) : 4x^2 + y^2 + z^2 = 4\}, \qquad D = \{(x,y,z) \in M : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$$

i forma

$$\alpha = x^2 \mathsf{d}y + y^2 \mathsf{d}x.$$

W M przyjąć orientację indukowaną z $\mathbb{R}^3$ jeśli traktujemy M jako brzeg bryły, do której należy punkt $(0,0,0)$. ♣

Idea dowodu Twierdzenia Stokes'a. Zacznijmy od sytuacji, kiedy nasz obszar D jest kostką k-wymiarową, tzn:

$$D = [a_1, b_1] \times [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k].$$

Brzeg D jest jedynie kawałkami powierzchnią, ale to nie bardzo przeszkadza. $(k-1)$-forma α do całkowania po brzegu D może zostać zapisana w następujący sposób:

$$\alpha = \alpha_1 \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k - \alpha_2 \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k + \cdots + (-1)^{k+1}\alpha_k \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{k-1}.$$

Różniczkujemy:

$$\mathsf{d}\alpha = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^2}\mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k + \cdots +$$
$$(-1)^{k+1}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^2}\mathsf{d}x^k \wedge \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{k-1} =$$
$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^2}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k + \cdots +$$
$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial x^k}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{k-1} \wedge \mathsf{d}x^k =$$
$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^k}\right)\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k$$

Oznaczamy teraz $\imath$ orientację kanoniczną $\mathbb{R}^k$ i całkujemy:

$$\int_{D,\imath} \mathsf{d}\alpha = \int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i}\mathsf{d}x^1 \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \mathsf{d}x^k = \sum_{i=1}^{k} \int_D \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i}\mathsf{d}x^1 \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \mathsf{d}x^k =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \int_{a_1}^{b_1} \mathsf{d}x^2 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \int_{a_k}^{b_k} \mathsf{d}x^k \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^i}\mathsf{d}x^i =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \int_{a_1}^{b_1} \mathsf{d}x^2 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \int_{a_k}^{b_k} \mathsf{d}x^k \Big(\alpha_i(x^1, \ldots, b_i, \ldots x^k) - \alpha_i(x^1, \ldots, a_i, \ldots x^k)\Big) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\{x^i = b^i\}} (\alpha_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^k - \sum_{i=1}^{k} \int_{\{x^i = a^i\}} (\alpha_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^k =$$

W powyższym wzorze $\{x^i = b^i\}$ oznacza ścianę kostki daną równaniem $x^1 = b^i$. Rozważmy więc parę ścian z ustaloną i-tą współrzędną. Forma α obcięta do ściany $\{x^i = b^i\}$, jest równa

$$\alpha_{|\{x^i = b^i\}} = (-1)^{i+1}\alpha_i(x^1, \ldots, b^i, \ldots, x^k)\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i-1} \wedge \mathsf{d}x^{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k$$

a do ściany $\{x^i = a^i\}$

$$\alpha_{|\{x^i = a^i\}} = (-1)^{i+1}\alpha_i(x^1, \ldots, a^i, \ldots, x^k)\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i-1} \wedge \mathsf{d}x^{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^k$$

Orientacja ściany $\{x^i = b_i\}$ indukowana przez orientację kanoniczną $\mathbb{R}^n$ jest to orientacja zgodna z

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \tag{1}$$

jeśli i jest nieparzyste a przeciwna gdy i parzyste. Odwrotnie jest na ścianie $\{x^i = b_i\}$: orientacja indukowana jest zgodna z (1) jeśli i parzyste i przeciwna jeśli i nieparzyste Można więc napisać, że

$$\int_{\{x^i=b^i\}} (\alpha_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^k = (-1)^{i+1} \int_{\{x^i=b^i\},\partial\imath} (\alpha_i) \mathsf{d}x^1 \wedge \cdots^{\text{bez } i} \cdots \wedge \mathsf{d}x^k$$

i

$$\int_{\{x^i=a^i\}} (\alpha_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^k = (-1)^{i} \int_{(\{x^i=a^i\},\partial\imath)} (\alpha_i) \mathsf{d}x^1 \wedge \cdots^{\text{bez } i} \cdots \wedge \mathsf{d}x^k$$

i dalej

$$\int_{\{x^i=b^i\}} (\alpha_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^k = (-1)^{i+1} \int_{(\{x^i=b^i\},\partial\imath)} (-1)^{i+1}\alpha = \int_{(\{x^i=b^i\},\partial\imath)} \alpha,$$

$$\int_{\{x^i=a^i\}} (\alpha_i) \mathsf{d}x^1 \cdots^{\text{bez } i} \cdots \mathsf{d}x^k = (-1)^{i} \int_{(\{x^i=a^i\},\partial\imath)} (-1)^{i+1}\alpha = -\int_{(\{x^i=a^i\},\partial\imath)} \alpha.$$

Możemy zatem kontynuować pierwotny rachunek

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{(\{x^i=b^i\},\partial\imath)} \alpha + \sum_{i=1}^{n} \int_{(\{x^i=a^i\},\partial\imath)} \alpha = \int_{(\partial D,\partial\imath)} \alpha.$$

Twierdzenie Stokes'a na kostce zostało zatem udowodnione. Bardziej skomplikowane obszary dzielimy na kostki i obserwujemy, że całki po stykających się ścianach kostek się znoszą. Do pełnego dowodu jest stąd jeden krok. Trzeba jednak użyć rozkładu jedności, nie będziemy więc wyjaśniać już więcej szczegółów. $\square$

Na zajęciach z fizyki używa się zazwyczaj tzw. klasycznych wersji twierdzenia Stokes'a zapisanego dla pól wektorowych. Jeśli S jest dwuwymiarową powierzchnią z brzegiem zanurzoną w $\mathbb{R}^3$ a X polem wektorowym na $\mathbb{R}^3$ to

$$\int_S (\overrightarrow{n} | \operatorname{rot} X) \mathsf{d}\sigma = \int_{\partial S} (\overrightarrow{t} | X) \mathsf{d}\ell. \tag{2}$$

Wektor $\overrightarrow{n}$ jest normalny do S a $\overrightarrow{t}$ styczny do brzegu S, oba jednostkowe a ich zwroty są stosownie uzgodnione. Symbole $\mathsf{d}\sigma$ i $\mathsf{d}\ell$ oznaczają odpowiednio element powierzchni na S i element długości na ∂S. Drugi wzór obowiązuje dla k-wymiarowej powierzchni D z brzegiem zanurzonej w $\mathbb{R}^k$ i pola wektorowego X określonego na $\mathbb{R}^k$:

$$\int_D \operatorname{div}(X) \mathsf{d}v = \int_{\partial D} (\overrightarrow{n} | X) \mathsf{d}\sigma. \tag{3}$$

Wektor $\overrightarrow{n}$ jest jednostkowym wektorem prostopadłym do brzegu i skierowanym na zewnątrz D, $\mathsf{d}v$ i $\mathsf{d}\sigma$ oznaczają odpowednie elementy objętości. Całka po prawej stronie to strumień pola X przez powierzchnię ∂D. Na następnym wykładzie zinterpretujemy powyższe wzory w terminach form różniczkowych. Przy okazji powiemy także nieco na temat definicji takich pojęć jak gradient, dywergencja, rotacja i laplasjan.

Wykład 14

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012
22 listopada 2011

W teoriach fizycznych w klasycznej postaci, takich jak elektrodynamika, czy newtonowska teoria grawitacji używa się głównie pojęcia pola wektorowego. W tym sensie polem wektorowym na przestrzeni fizycznej jest pole elektryczne E, indukcja pola magnetycznego B, pole grawitacyjne wytwarzane przez masę umieszczoną w przestrzeni. Mówi się także o polu prędkości ośrodka ciągłego. Większość z tych pól to pola potencjalne, tzn mające potencjał skalarny lub wektorowy. Mówimy, że pole X ma potencjał skalarny jeśli jest gradientem pewnej funkcji φ, mówimy, że pole Y ma potencjał wektorowy jeśli jest rotacją pewnego innego pola wektorowego. Chciałbym teraz zaproponować Państwu inne spojrzenie na pola potencjalne – od strony form różniczkowych raczej niż od strony pół wektorowych. Zauważmy, że z pola wektorowego możemy zrobić formę na dwa sposoby (jeśli mamy iloczyn skalarny i orientację): pole wektorowe może odpowiadać jednoformie $G \circ X$ ale może też odpowiadać $(n-1)$-formie $\imath_X \Omega = \Omega(X, \cdot)$. Zacznijmy od pól będących gadientem.

Gradient. Na temat gradientu mówiliśmy już nieco w poprzednim semestrze. Być może teraz jesteśmy lepiej przygotowani do zajęcia się dokładniej tym pojęciem. Załóżmy, że M jest powierzchnią wyposażoną w iloczyn skalarny. Oznacza to, że każda z przestrzeni stycznych jest wyposażona w iloczyn skalarny, który w gładki sposób zależy od punktu w M. Bardziej precyzyjnie możemy powiedzieć, że wymagamy, aby iloczyn skalarny dwóch gładkich pól wektorowych był gładką funkcją na M. Iloczyn skalarny zadaje odwzorowanie $G : \mathsf{T}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*M$ wzorem

$$\mathsf{T}_xM \ni v \longmapsto G(v) = (v|\cdot) \in \mathsf{T}^*_xM.$$

Odwzorowanie G jest (punkt po punkcie w M) liniowym izomorfizmem. W szczególności oznacza to, że jest odwracalne. Przy pomocy izomorfizmu G możemy utożsamiać wektory styczne i kowektory styczne. To właśnie robimy mówiąc, że pęd jest wektorem. Tak naprawdę z konstrukcji teoretycznej wynika, że pęd jest kowektorem (podobnie jak siła), dla wygody jednak mówimy o nim jak o wektorze. Niech teraz φ będzie gładką funkcją na M. Jej różniczka $\mathsf{d}\varphi$ jest polem kowektorowym na M. Używając G, a raczej G^{-1} możemy „przerobić” to pole wektorowe na pole kowektorowe. Precyzyjna dedinicja gradientu:

$$\operatorname{grad}\varphi(x) = G^{-1}(\mathsf{d}\varphi(x)).$$

Korzystając z tej definicji możemy wygodnie zapisać gradient w rozmaitych układach współrzędnych. Robiliśmy to już na $\mathbb{R}^2$ dla biegunowych współrzędnych. Może teraz warto zrobić coś w układzie parabolicznym:

Zadanie 1. Zapisać gradient we współrzędnych parabolicznych w $\mathbb{R}^3$ względem kanonicznego iliczynu skalarnego.

$$\begin{cases} x = \xi\eta\cos\varphi \\ y = \xi\eta\sin\varphi \\ z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \end{cases}$$

♠

Powstaje oczywiście naturalne pytanie jak sprawdzić, czy dane pole wektorowe X jest gradientem jakiejś funkcji. Jeśli X jest gradientem to $G \circ X$ jest różniczką funkcji. Zróżniczkowanie

$G \circ X$ powinno więc dać zero. Jest to warunek konieczny a czasami również wystarczający – to zależy od kształtu obszaru (patrz Lemat Poincaré).

Rotacja. Rotację zdefiniujemy w szczególnym przypadku dla M równego $\mathbb{R}^3$. Będziemy używać także kanonicznego iloczynu skalarnego i kanonicznej orientacji. Rotację można zdefiniować w nieco bardziej ogólnej sytuacji: potrzebujemy wówczas trójwymiarowej zorientowanej powierzchni z iloczynem skalarnym. W praktyce używamy rotacji na przestrzeni fizycznej, która jest trójwymiarową afiniczną przestrzenią wyposażoną w iloczyn skalarny i orientację. Niech A będzie polem wektorowym na $\mathbb{R}^3$. Jak zwykle Ω oznaczać będzie formę objętości związaną z wybranym iloczynem skalarnym i orientacją. Zdefiniujemy teraz rotację pola A najpierw „opisowo” a następnie zapiszemy stosowny wzór. Z pola wektorowego A możemy uzyskać jedno-formę składając to pole z izomorfizmem G, tzn. $G \circ A$, po zróżniczkowaniu będziemy mieć dwu-formę $\mathsf{d}(G \circ A)$. Dwuforma na $\mathbb{R}^3$ odpowiada pewnemu polu wektorowemu zgodnie z drugim sposobem uzyskiwania form z pól wektorowych. To właśnie pole nazywamy rotacją A i oznaczamy $\operatorname{rot} A$:

$$\mathsf{d}(G \circ A) = \imath_{\operatorname{rot} A}\Omega.$$

Używając kartezjańskich współrzędnych łatwo sprawdzić, że pole, które otrzymujemy jest rzeczywiście rotacją A: Niech

$$A = A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Korzystając z faktu, że kanoniczne współrzędne w $\mathbb{R}^3$ są ortonormalne otrzymujemy

$$G \circ A = A_x\mathsf{d}x + A_y\mathsf{d}y + A_z\mathsf{d}x.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\mathsf{d}(G \circ A) = \frac{\partial A_x}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x + \frac{\partial A_x}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + \frac{\partial A_y}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}y + \frac{\partial A_z}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z =$$
$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x$$

Oznaczmy teraz $B = \operatorname{rot} A$. Forma objetości w kanonicznych współrzędnych to $\Omega = \mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z$. Mamy zatem

$$\imath_B\Omega = B_x\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + B_y\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + B_z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$$

i z porównania obu wzorów otrzymujemy

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

co zgadza się z tradycyjnym wzorem na rotację. Zaletą naszej definicji jest, że możemy teraz zapisać rotację w dowolnym układzie współrzędnych nie dokonując uciążliwej zamiany zmiennych. Proponujemy następujące zadanie

Zadanie 2. Wyrazić rotację pola wektorowego na $\mathbb{R}^3$ w walcowym układzie współrzędnych. Bardziej pracowitym proponujemy rachunki w sferycznym układzie współrzędnych. ♠

Znowu możemy zadać pytanie w jaki sposób poznać, czy dane pole X jest rotacją innego pola A. W tym celu musimy „przetłumaczyć” to pole na dwuformę $\imath_X\Omega$ i sprawdzić, czy ta forma ma formę pierwotną. W szczególności warunkiem koniecznym jest aby $\mathsf{d}\imath_X\Omega = 0$.

Wróćmy jeszcze na chwilę do pytania jakie pola mają potencjał skalarny, tzn jakie pola są gradientami funkcji. Wcześniej stwierdziliśmy, że podejrzane pole X należy „przerobić” na formę biorąc $\mathsf{d}(G \circ X)$ i sprawdzić, czy otrzymamy zero. Wyrażenie $\mathsf{d}(G \circ X)$ pojawia się w definicji rotacji X. Stąd bierze się znane kryterium potencjalności: pola mające potencjał skalarny mają rotację równą zero:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0.$$

Dywergencja. Jest jeszcze jedna operacja na polach wektorowych, która łatwo wypowiada się w języku form różniczkowych. Mowa tym razem o dywergencji. Niech X będzie polem wektorowym na powierzchni M wyposażonej w iloczyn skalarny i orientację. Także tym razem używać będziemy formy objętości Ω. Forma $\imath_X\Omega$ jest $(n-1)$-formą na M, jej różniczka zatem musi być proporcjonalna do formy objętości. Współczynnik proporcjonalności jest funkcją gładką na powierzchni M. Współczynnik ten nazywamy dywergencją pola X. Oto stosowny wzór

$$(\operatorname{div} X)\Omega = \mathsf{d}(\imath_X\Omega).$$

Łatwo sprawdzić, że dewergencja nie zależy tak naprawdę od wybranej orientacji – forma objetości pojawia się po obu stronach równania. W kartezjańskim układzie współrzędnych łatwo jest wypisać dywergencję:

$$\begin{aligned}\mathsf{d}(\imath_X\Omega) = \mathsf{d}(X_x\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + X_y\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + X_z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y) = \\ \frac{\partial X_x}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + \frac{\partial X_y}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + \frac{\partial X_z}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y = \\ \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z,\end{aligned}$$

Zatem

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Także i w tym przypadku bardzo łatwo jest wypisać dywergrncje w innym układzie współrzędnych korzystając z definicji a nie z procedury zamiany zmiennych.

Zadanie 3. Wyrazić dywergencję pola wektorowego na $\mathbb{R}^3$ w walcowym i sferycznym układzie współrzędnych. ♠

Wróćmy na chwilę do pytania o kryterium istnienia potencjału wektorowego dla pola X, tzn istnienia A takiego, że $X = \operatorname{rot} A$. Warunek konieczny mówi, że forma $\imath_X\Omega$ musi być zamknięta. Różniczkę tej formy liczymy wyznaczając dywergencję X. Okazuje się więc, że pola posiadające potencjał wektorowy mają zerową dywergencję, gdyż

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0.$$

Klasyczne wersje twierdzenia Stokes'a: Powróćmy teraz do klasycznych wersji twierdzenia Stokes'a, czyli do równań (2) i (3). Równanie (3) jest nieco łatwiejsze do uzasadnienia. Element objętości w naszej nomenklaturze nosi nazwę formy objętości (dołożyć trzeba tylko orientację), zatem lewa strona równania zapisuje się jako

$$\int_{(D,\imath)} (\operatorname{div} X)\Omega$$

Możemy skorzystać z definicji dywergencji pisząc

$$\int_{(D,\imath)} (\operatorname{div} X)\Omega = \int_{(D,\imath)} \mathsf{d}(\imath_X\Omega)$$

Zgodnie z Twierdzeniem Stokes'a otrzymujemy

$$\int_{(D,\imath)} \mathsf{d}(\imath_X \Omega) = \int_{(\partial D, \partial\imath)} \imath_X \Omega.$$

Element powierzchni na ∂D powstaje z obcięcia iloczynu skalarnego do tej powierzchni. Najłatwiej jest to zrobić wybierając współrzędne w otoczeniu ∂D takie, że pierwszy wektor bazowy $\overrightarrow{n}$ jest normalny do powierzchni i skierowany na zewnątrz D, zaś pozostałe są styczne do ∂D. Wygodnie też przyjąć, że pierwszy wektor jest unormowany. Macierz iloczynu skalrnego w tej bazie ma postać

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & [G_{|\partial D}] & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Jeśli przez ξ^i oznaczymy współrzędne wybranego przez nas układu to forma objetości Ω może zostać zapisana jako

$$\Omega = \sqrt{\det [G_{|\partial D}]} \mathsf{d}\xi^1 \wedge \mathsf{d}\xi^2 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}\xi^n$$

a jej zwężenie z polem X jako

$$\imath_X \Omega = \sqrt{\det [G_{|\partial D}]} X_{\xi^1} \mathsf{d}\xi^2 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}\xi^n + \alpha$$

gdzie α jest $(n-1)$-formą, której obcięcie do brzegu D jest równe zero, gdyż $\mathsf{d}\xi^1$ obcięte do brzegu D jest równe zero. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że $X_{\xi^1} = (\overrightarrow{n}, X)$ oraz, że element powierzchni $\mathsf{d}\sigma$ związany jest z formą objetości na powierzchni daną wzorem

$$\Sigma = \sqrt{\det [G_{|\partial D}]} \mathsf{d}\xi^2 \wedge \dots \wedge \mathsf{d}\xi^n,$$

otrzymamy prawą stronę wzoru (3). Podobnie rzecz się ma ze wzorem (2). Musimy teraz skorzystać z definicji rotacji i zauważyć, że w stosownym układzie współrzędnych $(\overrightarrow{n}|\mathrm{rot} X)\mathsf{d}\sigma$ jest równa $\imath_{\mathrm{rot}X}\Omega$. Jest to układ współrzędnych podobny jak poprzednio, pierwszy wektor bazowy jest unormowany i prostopadły do S. Bazę wybieramy zgodną z orientacją kanoniczną $\mathbb{R}^3$. Korzystamy następnie z definicji rotacji

$$\imath_{\mathrm{rot}X}\Omega = \mathsf{d}(G \circ X)$$

i korzystamy z twierdzenia Stokes'a przechodząc z całką na brzeg. Do całkowania mamy formę $G \circ X$. Teraz znowu należy użyć dobrego układu współrzędnych obserwując, że jeśli $\overrightarrow{t}$ jest jednostkowym wektorem stycznym do ∂S to forma $G \circ X$ jest postaci $G \circ X = X_t \mathsf{d}\ell + \beta$ dla pewnej jednoformy β, której obcięcie do ∂S jest zerowe. Składowa A_t jest oczywiście równa dokładnie $(\overrightarrow{t}|X)$.