Wykład 15

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

29 listopada 2011

W trakcie tego i następnych kilku wykładów zajmować się będziemy analizą zespoloną, czyli różniczkowaniem i całkowaniem funkcji argumentu zespolonego o wartościach zespolonych. Przydadzą nam się tu doświadczenia zdobyte w drugim semestrze, gdyż ciało liczb zespolonych możemy traktować jak $\mathbb{R}^2$ z dodatkową strukturą, tzn. z mnożeniem. Z tego punktu widzenia funkcja zespolona argumentu zespolonego

$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

może być potraktowana jak odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Na przykład podstawiając w funkcji

$$z \mapsto z^2$$

$z = x + iy$, otrzymujemy

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Jako odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ nasza funkcja ma postać:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{R}^2$$

Podobnie dla

$$z \longmapsto \sin z$$

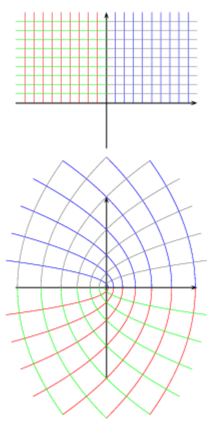
otrzymujemy

$$\sin(x + iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y),$$

zatem funkcja sinus argumentu zespolonego odpowiada odwzorowaniu

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto (\sin(x)\cosh(y), \cos(x)\sinh(y)) \in \mathbb{R}^2.$$

Niestety niedoskonałość naszego umysłu nie pozwala nam efektywnie obrazować funkcji zespolonych, gdyż wykres powinien być podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Możemy jednak robić rozmaite pomocnicze rysunki. Zobaczmy na przykład co funkcja $z \mapsto z^2$ robi z siatką współrzędnych w $\mathbb{R}^2$:



Widać więc, że z dokładnością do pewnych detali z półpłaszczyzny robi się cała płaszczyzna, a współrzędne kartezańskie zamieniają się na współrzędne paraboliczne.

Problem różniczkowania funkcji zespolonych argumentu zespolonego ma oczywiście także związek z analizą na $\mathbb{R}^2$, jednak musimy tutaj uwzględnić istnienie dodatkowej struktury. Niech f oznacza funkcję zespoloną, a F odpowiadjące jej odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Mówiliśmy, że F jest różniczkowalne w punkcie (x, y) jeśli istniało odwzorowanie liniowe $A(x, y)$ takie, że

$$F(x + \delta x, y + \delta y) = F(x, y) + A(x, y)(\delta x, \delta y) + R(x, y, \delta x, \delta y)$$

dla R spełniającego warunek reszty. Przepisując to samo w notacji zespolonej dla $z = x + iy$ i $\delta z = \delta x + i\delta y$ otrzymujemy

$$f(z + \delta z) = f(z) + a(z)\delta z + r(z, \delta z)$$

Pytanie o różniczkowalność funkcji zespolonej sprowadza się więc do pytania, czy jest ona różniczkowalna jako odwzorowanie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ oraz, dodatkowo, czy odwzorowanie liniowe będące pochodną w sensie rzeczywistym pochodzi od mnożenia przez liczbę zespoloną. Sprawdźmy więc jakie są to odwzorowania: Niech $a + ib \in \mathbb{C}$, wtedy

$$(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$$

i w notacji macierzowej (odwzorowanie odpowiadające mnożeniu przez $a+ib$ oznaczamy $\imath(a+ib)$:

$$\imath(a + ib)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1}$$

Jeśli $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ to wzór na pochodną w sensie rzeczywistym ma postać

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Porównując (1) i (2) otrzymujemy następujące równania:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Nazywają się one **Równaniami Cauchy'ego-Riemanna**. Możemy teraz sformułować definicję różniczkowalności w sensie zepolonym:

Definicja 1. Funkcję $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ określoną na otwartym obszarze $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ nazywamy *różniczkowalną w sensie zespolonym* w punkcie $z = (x + iy)$ jeśli odpowiadające jej odwzorowanie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest różniczkowalne w punkcie (x, y) i pochodna $F'(x, y)$ jest odwzorowaniem liniowym odpowiadającym mnożeniu przez liczbę zespoloną. Liczbę tę oznaczamy $f'(z)$ i nazywamy *pochodną f w punkcie z.*

W rozważaniach prowadzących do zdefiniowania pochodnej w sensie zespolonym udowodniliśmy następujący fakt:

Fakt 1. *Funkcja zespolona f jest różniczkowalna w punkcie $z = x + iy$ wtedy i tylko wtedy gdy jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym i jej części rzeczywista i urojona spełniają równania Cauchy-Riemanna.*

Różniczkowanie w sensie rzeczywistym funkcji jednej zmiennej rzeczywistej i w sensie zespolonym funkcji jednej zmiennej zespolonej są podobne także w tym, że zachodzi następujący fakt:

Fakt 2. *Funkcja zespolona f jest różniczkowalna w punkcie $z = x + iy$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje granica ilorazu*

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}.$$

Granica ta jest równa pochodnej $f'(z)$.

Przykład: Sprawdźmy, czy funkcja $z \mapsto z^2$ jest różniczkowalna w sensie zespolonym.

$$f(z) = z^2, \quad F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Rachujemy:

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

Powyższa macierz odpowiada mnożeniu przez liczbę zespoloną $2x + i2y = 2z$, zatem

$$f'(z) = 2z.$$

Definicja 2. *Funkcję $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ nazywamy holomorficzną na ω jeśli jest różniczkowalna w sensie zespolonym w kazdym punkcie obszaru Ω*

W dalszym ciągu będziemy zajmować się własnościami funkcji holomorficznych. Jedną z nich jest następujący fakt, który pozostawiamy bez dowodu:

Fakt 3. *Funkcja holomorficzna na obszarze $\mathcal{O}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$*

Kolejne własności funkcji holomorficznych uzyskamy przyglądając się całkom z funkcji holomorficznych wzdłuż krzywych w $\mathbb{C}$. Tu przydadzą nam się informacje z zakresu geometrii różniczkowej i całkowania form. Traktując $\mathbb{C}$ jako $\mathbb{R}^2$ stwierdzamy, że obiektem przeznaczonym do całkowania po krzywych (zorientowanych) są jedno-formy różniczkowe. Uwzględniając dodatkową strukturę $\mathbb{C}$ dopuszczamy jednak jednoformy o współczynnikach zespolonych. Przestrzeń kostyczna w punkcie $z = x + iy$ rozpięta jest przez różniczki $(\mathsf{d}x, \mathsf{d}y)$. „Zwyczajna” przestrzeń styczna jest przestrzenią wektorową rzeczywistą. Dokonując jej kompleksyfikacji dopuszczamy mnożenie wektorów bazowych przez liczby zspolone. Kowektor zespolony w punkcie z ma więc postać:

$$\alpha \mathsf{d}x + \beta \mathsf{d}y, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

W przestrzeni różniczek zespolonych wygodnie używać jest innych kowektorów bazowych:

$$\alpha \mathsf{d}x + \beta \mathsf{d}y = \frac{1}{2}\alpha[(\mathsf{d}x + i\mathsf{d}y) + (\mathsf{d}x - i\mathsf{d}y)] + \frac{1}{2i}[(\mathsf{d}x + i\mathsf{d}y) - (\mathsf{d}x - i\mathsf{d}y)] =$$
$$\frac{1}{2}(\alpha - i\beta)(\mathsf{d}x + i\mathsf{d}y) + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)(\mathsf{d}x - i\mathsf{d}y)$$

Nowe wektory bazowe oznaczamy

$$\mathsf{d}z = \mathsf{d}x + i\mathsf{d}y \qquad \mathsf{d}\bar{z} = \mathsf{d}x - i\mathsf{d}y$$

Kowektory $\mathsf{d}z$ i $\mathsf{d}\bar{z}$ są kanoniczne, tzn zdefiniowane z użyciem naturalnych struktur ciała liczb zespolonych. Niech teraz funkcja f będzie funkcją zespoloną różniczkowalną w sensie rzeczywistym, tzn różniczkowalne jest odpowiadające jej odwzorowanie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Jeśli $f = u + iv$

to

$$\mathsf{d}f = \mathsf{d}u + i\mathsf{d}v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathsf{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathsf{d}y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathsf{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathsf{d}y\right) =$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathsf{d}x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathsf{d}y =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathsf{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathsf{d}\bar{z} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\mathsf{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\mathsf{d}\bar{z}$$

Wprowadzamy nowe oznaczenia

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

które są sensowne, gdyż wówczas

$$\mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathsf{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathsf{d}\bar{z}.$$

Gdy funkcja f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w punkcie z_0, to w tym punkcie

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

ze względu na równania Cauchy-Riemanna:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Widać więc, że jest też odwrotnie: jeśli funkcja jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym i pochodna po $\bar{z}$ znika, to f jest różniczkowalna w sensie zespolonym. Dla funkcji różniczkowalnej w sensie zespolonym piszemy zazwyczaj

$$\frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}z} \quad \text{zamiast} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

Mając funkcję zespoloną f i kanoniczną formę $\mathsf{d}z$ możemy zdefiniować całkę z funkcji f po zorientowanej krzywej γ. Mówimy tu „krzywa" ale tak naprawde mamy na mysli jednowymiarową, zorientowaną podrozmaitość (być może z brzegiem) w $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Definicja 3. *Całką z funkcji f po zorientowanej krzywej γ* nazywamy całkę z formy $f\mathsf{d}z$, tzn:

$$\int_\gamma f\mathsf{d}z$$

Przykład: Obliczmy całkę z funkcji $z \mapsto z^2$ po łuku okręgu o promieniu 1 zawartym w pierwszej ćwiartce zorientowanego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

$$\int_\gamma z^2 \mathsf{d}z = \int_\gamma ((x^2-y^2)+2ixy)(\mathsf{d}x+i\mathsf{d}y) =$$

$$\int_\gamma [(x^2-y^2)\mathsf{d}x - 2xy\mathsf{d}y] + i[(x^2-y^2)\mathsf{d}y + 2xy\mathsf{d}x] =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^2 t - \sin^2 t)(-\sin t)\mathsf{d}t - 2\sin t\cos t\cos t\mathsf{d}t] +$$

$$i\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos t)\mathsf{d}t + 2\sin t\cos t(-\sin t)\mathsf{d}t] =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-4\cos^2 t)\sin t\mathsf{d}t + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\cos t\mathsf{d}t =$$

$$-\int_1^0 (1-4u^2)\mathsf{d}u + i\int_0^1 (1-4u^2)\mathsf{d}u = -\frac{1}{3} - \frac{i}{3}$$

Nawiasem mówiąc

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}z}\left(\frac{1}{3}z^3\right) = z^2$$

oraz

$$\frac{1}{3}z^3_{|z=i} - \frac{1}{3}z^3_{|z=1} = \frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{3} = -\frac{i}{3} - \frac{1}{3}$$

i nie jest to przypadek! Ale o tym następnym razem.