Wykład 16

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

2 grudnia 2011

Kontynuujemy badanie własności funkcji holomorficznych. Poprzedni wykład zakończył się na definicji całki z funkcji argumentu zespolonego. Zaobserwowaliśmy także ciekawe zjawisko dla funkcji $z \mapsto z^2$: jej całka po łuku okręgu leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych okazała się być równa różnicy wartości funkcji pierwotnej na końcach łuku. Żeby przekonać się, że to nie jest przypadek wykonajmy następujący rachunek (najpierw dla funkcji $z \mapsto z^2$ a potem ogólnie):

$$\mathsf{d}(z^2\mathsf{d}z) = \mathsf{d}\left([(x^2-y^2)\mathsf{d}x - 2xy\mathsf{d}y] + i[(x^2-y^2)\mathsf{d}y + 2xy\mathsf{d}x]\right) = \\ [-2y\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x - 2y\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y] + i\,[2x\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y + 2x\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x] = 0$$

Gdybyśmy używali różniczek $\mathsf{d}z$ i $\mathsf{d}\bar{z}$ byłoby jeszcze łatwiej:

$$\mathsf{d}(z^2\mathsf{d}z) = \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}z + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^2)\mathsf{d}\bar{z} \wedge \mathsf{d}z = 0,$$

bo $\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}z = 0$ i $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^2) = 0$. Forma $z^2\mathsf{d}z$ okazała się zamknięta. Jest to forma określona na całym $\mathbb{C}$, który jest gwiaździsty, zatem jest to też forma zupełna. Jedną z możliwych form pierwotnych jest funkcja

$$\frac{1}{3}z^3 : \quad \mathsf{d}(\frac{1}{3}z^3) = z^2\mathsf{d}z.$$

Zgodnie z Twierdzeniem Stokes'a całka po łuku jest różnicą wartości funkcji pierwotnej na końcach. (W szczególności całka po krzywej zamkniętej jest zawsze równa 0.)

Podobny rachunek możemy wykonać dla dowolnej funkcji holomorficznej w obszarze $\mathcal{O}$:

$$\mathsf{d}(f(z)\mathsf{d}z) = \frac{\partial f}{\partial z}\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathsf{d}\bar{z} \wedge \mathsf{d}z = 0$$

gdyż $\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}z = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, więc forma jest jest zamknięta. W drugą stronę ten sam rachunek pokazuje, że z zamkniętości formy $f(z)\mathsf{d}z$ możemy wnioskować, że f jest holomorficzna, gdyż współczynnik przy $\mathsf{d}\bar{z} \wedge \mathsf{d}z$ musi być równy zero. Sama forma $\mathsf{d}\bar{z} \wedge \mathsf{d}z$ bowiem jest niezerowa:

$$\mathsf{d}\bar{z} \wedge \mathsf{d}z = (\mathsf{d}x - i\mathsf{d}y) \wedge (\mathsf{d}x + i\mathsf{d}y) = -i\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}x + i\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = 2i\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \neq 0.$$

Ostatecznie możemy sformułować następujący fakt:

Fakt 1. *Funkcja klasy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathcal{O}$ (w sensie rzeczywistym) jest holomorficzna na $\mathcal{O}$ wtedy i tylko wtedy, gdy forma $f\mathsf{d}z$ jest zamknięta.*

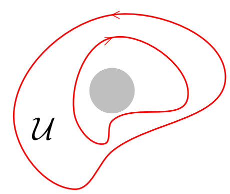
W konsekwencji mamy także

Fakt 2. *Całka po krzywej zamkniętej z funkcji holomorficznej w jednospójnym obszarze $\mathcal{O}$ jest równa* 0.

oraz

Fakt 3. *Jeśli γ jest brzegiem obszaru $\mathcal{U}$ zwartego w $\mathcal{O}$ w którym funkcja f jest holomorficzna, to całka z f po γ z orientacją zgodną z twierdzeniem Stokesa jest równa* 0

Dowód: Ten fakt różni się od poprzedniego tym, że nie zakładamy jednospójności obszaru $\mathcal{U}$, w szczególności dopuszczamy następujące sytuacje:



Obszar, gdzie pojawiają się problemy z holomorficznością zaznaczony jest na szaro, natomiast obszar $\mathcal{U}$ ograniczony jest czerwonymi krzywymi. Brzeg (γ) składa się więc z dwóch kawałków zorientowanych przeciwnie. Dowodząc, że całka po γ jest równa zero korzystamy z Twierdzenia Stokes'a w drugą stronę:

$$\int_\gamma f \mathsf{d}z = \int_{\mathcal{U}} \mathsf{d}(f\mathsf{d}z) = 0.$$

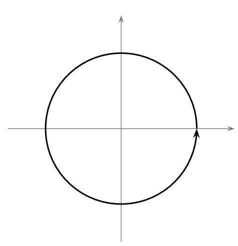
□.

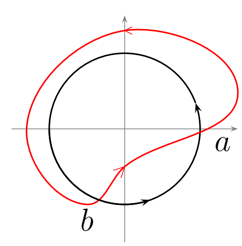
Oczywiście jeśli obszar holomorficzności nie jest jednospójny całka po krzywej zamkniętej może nie być równa 0. Policzmy całkę po okręgu promieniu 1 zorientowanym kanonicznie z funkcji $z \mapsto \frac{1}{z}$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}, \qquad \mathsf{d}z = \mathsf{d}(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi} i \mathsf{d}\varphi$$

$$\int_C \frac{\mathsf{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} e^{i\varphi} i \mathsf{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathsf{d}\varphi = 2\pi i$$

Ponieważ funkcja $z \mapsto \frac{1}{z}$ jest holomorficzna poza zerem, taki sam wynik otrzymamy całkując po jakiejkolwiek zamkniętej krzywej obiegającej zero jeden raz:



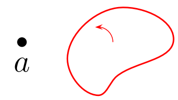


Całka po czerwonej krzywej z orientacją kanoniczną może być złożona z trzech całek: (1) całka od a do b po czerwonej i dalej od b do a po czarnej przeciwnie niż pokazuje strzałka, (2) całka od b do a po czerwonej i od a do b po czarnej, (3) i teraz trzeba odjąć te kawałki po czarnej całkując po czarnej zgodnie ze strzałką. Całka (1) jest równa 0, bo funkcja jest holomorficzna na pewnym otwartym jednospójnym obszarze zawierającym tą krzywą. Podobnie całka (2). Cała wartość bierze się więc z całki (3), a tę policzyliśmy już wcześniej.

Niewielkim uogólnieniem obserwacji dotyczącej całki z funkcji $z \mapsto \frac{1}{z}$ jest następujące twierdzenie zwane **Wzorem Całkowym Cauchy'ego**:

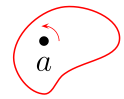
Twierdzenie 1. *Niech f będzie funkcją holomorficzną w obszarze otwartym $\mathcal{O}$. Dla krzywej γ będącej granicą zwartego obszaru $\mathcal{U}$ zawartego w $\mathcal{O}$ zorientowanej kanonicznie zachodzi jeden z* *dwóch przypadków:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathsf{d}z = 0$$



gdy $a \notin \mathcal{U}$, lub

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathsf{d}z = f(a)$$



gdy $a \notin \mathcal{U}$.

Dowód: interesujący jest przypadek $a \in \mathcal{U}$, gdyż w sytuacji przeciwnej funkcja podcałkowa jest holomorficzna na otwartym obszarze zawierającym krzywą, zatem odpowiednia całka jest zero. Jeśli a leży wnętrzu $\mathcal{U}$ ograniczonym krzywą γ to istnieje kula domknięta $\mathcal{K}_\epsilon$ o promieniu ϵ zawarta we wnętrzu $\mathcal{U}$. Obszar $\mathcal{U}\setminus\mathcal{K}_\epsilon$ jest teraz obszarem holomorficzności. Przyjmując na $\partial\mathcal{K}_\epsilon$ orientację kanoniczną otrzymujemy

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathsf{d}z - \int_{\partial\mathcal{K}_\epsilon}\frac{f(z)}{z-a}\mathsf{d}z = 0.$$

Wystarczy więc wyliczyć całkę po $\partial\mathcal{K}_\epsilon$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{K}_\epsilon}\frac{f(z)}{z-a}\mathsf{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{K}_\epsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathsf{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{K}_\epsilon}\frac{f(a)}{z-a}\mathsf{d}z$$

Druga z całek może zostać obliczona z użyciem parametryzacji $\partial\mathcal{K}_\epsilon$: $z = a + \epsilon e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{K}_\epsilon}\frac{f(a)}{z-a}\mathsf{d}z = f(a)\int_0^{2\pi}\frac{1}{\epsilon e^{i\varphi}}\epsilon i e^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi = f(a)$$

Pierwsza z całek jest równa zero, gdyż:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{K}_\epsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathsf{d}z = \int_0^{2\pi}\frac{f(a+\epsilon e^{i\varphi})-f(a)}{a+\epsilon e^{i\varphi}-a}i\epsilon e^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi =$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\epsilon e^{i\varphi})-f(a)}{\epsilon e^{i\varphi}}i\epsilon e^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi = \int_0^{2\pi}[f(a+\epsilon e^{i\varphi})-f(a)]i\mathsf{d}\varphi$$

Zgodnie z Twierdzeniem o Wartości Średniej dla odwzorowań

$$|f(a+\epsilon e^{i\varphi})-f(a)| \leqslant \sup_{z\in\mathcal{K}_\epsilon}|f'(z)|\epsilon$$

Zatem

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{K}_\epsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathsf{d}z\right| \leqslant \sup_{z\in\mathcal{K}_\epsilon}|f'(z)|\epsilon$$

Mamy więc

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{K}_\epsilon}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = 0$$

czyli ostatecznie (ze względu na dowolność ϵ,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}\mathsf{d}z = f(a)$$

$\square$.

Wzór Cauchy'ego ma bardzo doniosłe konsekwencje. **(1)** Przede wszystkim widzimy, że znajomość funkcji holomorficznej na krzywej ograniczającej pewien obszar jest równoznaczna ze znajomością wartości funkcji w każdym punkcie tego obszaru. Funkcje holomorficzne są więc dość sztywne. O ile zwykłe odwzorowanie różniczkowalną dwóch zmiennych z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ mogę lokalnie modyfikować nie zmieniając własności różniczkowalności o tyle to nie działa dla funkcji holomorficznych. Mówiliśmy już, że każda funkcja holomorficzna ma ciągłą pochodną. Dzięki wzorowi Cauchy'ego możemy wnioskować, że **(2)** funkcja ta jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ (na razie w sensie różniczkowania odwzorowań rzeczywistych). Wynika to z faktu, że odwzorowanie

$$F(\Re(a), \Im(a)) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \mathsf{d}z$$

traktowane jako zwykła całka z parametrem po zbiorze zwartym jest różniczkowalne gdy funkcja podcałkowa jest ciągła i pochodne cząstkowe po parametrach istnieją i są ciągłe. Te warunki są spełnione, gdyż funkcja holomorficzna jest ciągła. W takiej sytuacji pochodne cząstkowe całki po $\Re(a)$ i $\Im(a)$ też są całkami podobnego typu. Stosując ten sam argument otrzymujemy wniosek, że wszystkie pochodne cząstkowe dowolnego rzędu istnieją i są ciągłe. **(3)** Pochodna funkcji holomorficznej w sensie zespolonym jest funkcją holomorficzną, co można sprawdzić licząc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{a}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} \mathsf{d}z.$$

(4) Mamy też wzór na pochodną funkcji holomorficznej: Zmieniając nieco oznaczenia mamy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathsf{d}\xi.$$

Różniczkujemy (dla $z = x + iy$)

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathsf{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial x} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathsf{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathsf{d}\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathsf{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial y} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathsf{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{if(\xi}{(\xi - z)^2} \mathsf{d}\xi$$

Pamiętając, że

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

mamy

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}z} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathsf{d}\xi = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathsf{d}\xi - i \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{if(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathsf{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi}{(\xi - z)^2} \mathsf{d}\xi$$

i indukcyjnie

$$\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}z^n} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathsf{d}\xi = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathsf{d}\xi$$