Wykład 17 i 18

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

6 i 9 grudnia 2011

W uzupełnieniu do faktów dotyczących związków między funkcjami holomorficznymi i geometrią różniczkową na $\mathbb{R}^2$ zanotujmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Jeśli funkcja f jest ciągła na $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ i ponadto całka z formy $f\mathsf{d}z$ wzdłuż krzywych w $\mathcal{O}$ nie zależy od drogi a tylko od końcowych punktów krzywej to przyporządkowanie*

$$z \longmapsto \int_a^z f\mathsf{d}z$$

jest funkcją holomorficzną na $\mathcal{O}$i jej pochodną jest funkcja f.

Dowód: Oznaczmy zdefiniowaną w twierdzeniu funkcję przez F i spróbujmy policzyć jej pochodną w punkcie $z_0 \in \mathcal{O}$:

$$\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h} f(\xi)\mathsf{d}\xi$$

Ponieważ całka z funkcji stałej równej 1 po odcinku łączącym z_0 i z_0+h jest równa h można napisać

$$f(z_0) = \frac{1}{h}f(z_0)\int_{z_0}^{z_0+h}\mathsf{d}\xi$$

i dalej

$$\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} - f(z_0) = \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h} f(\xi)\mathsf{d}\xi - \frac{1}{h}f(z_0)\int_{z_0}^{z_0+h}\mathsf{d}\xi = \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h}[f(\xi)-f(z_0)]\mathsf{d}\xi$$

Szacujemy moduł różnicy:

$$\left|\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} - f(z_0)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\sup_{[z_0,z_0+h]}|f(\xi)-f(z_0)||h| = \sup_{[z_0,z_0+h]}|f(\xi)-f(z_0)|$$

Z ciągłości funkcji f wynika, że $\sup_{[z_0,z_0+h]}|f(\xi)-f(z_0)|$ zmierza do zera, gdy długość odcinka zmierza do zera. Z niezależności od drogi skorzystaliśmy wybierając odcinek jako drogę całkowania, co umożliwiło przeprowadzone szacowanie. Wykazaliśmy tym samym, że

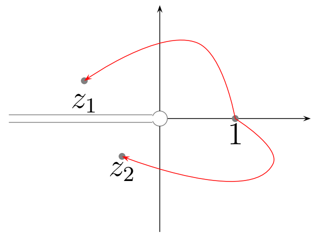
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} = f(z_0),$$

co dowodzi, że F jest holomorficzna. Oczywiście oznacza to także, że f jest holomorficzna. $\square$.

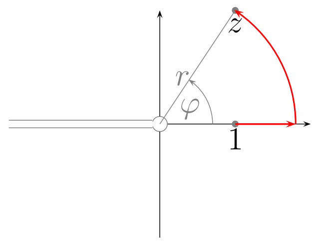
Powyższe twierdzenie daje nam możliwość definiowania nowych funkcji holomorficznych. Można na przykład, posługując się przykładem rzeczywistym zdefiniować logarytm liczby zespolonej:

$$z \longmapsto \int_1^z \frac{\mathsf{d}z}{z} \tag{1}$$

pamiętając jednak, że całka jest niezależna od drogi tak długo jak ta droga nie zawija się wokół zera. Musimy więc ograniczyć obszar, na którym zdefiniowana jest funkcja tak, aby nie popaść w kłopoty. Jedna z możliwości jest następująca:



Funkcję, zdefiniowaną wzorem (1) nazywamy *gałęzią główną logarytmu* i oznaczamy Log. Funkcje tę możemy obliczyć wybierając wygodną drogę całkowania:



Całkując wzdłuż osi rzeczywistej od 1 do r otrzymujemy:

$$\int_1^r \frac{1}{x} \mathsf{d}x = \log r,$$

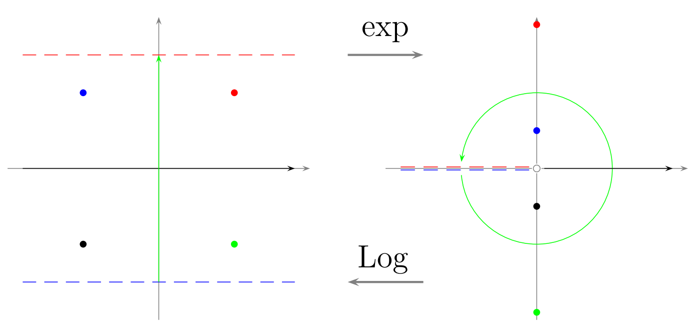
a całkując po łuku okręgu o promieniu r otrzymujemy:

$$\int_0^\varphi \frac{1}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} \mathsf{d}\varphi = i\varphi.$$

Ostatecznie więc:

$$\operatorname{Log} z = \log r + i\varphi, \qquad \text{gdy} \qquad z = re^{i\varphi}$$

Przy obszarze holomorficzności jak na rysunku argument liczby zespolonej przyjmuje wartości w przedziale $]-\pi, \pi[$. Oczywiście Log jest odwrotny do funkcji wykładniczej w tym sensie, że $e^{\operatorname{Log} z} = z$. Oto stosowny obrazek:



Poniżej znajdą państwo spis pożytecznych faktów będących konsekwencją wzoru Cauchy'ego oraz twierdzeń dotyczących geometrii różniczkowej na $\mathbb{R}^2$:

Fakt 1 (Nierówność Cauchy'ego)**.** *Jeśli* $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ *i* $K(a, \rho) \subset \mathcal{O}$, *to*

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n! M(a, \rho)}{\rho^n}$$

dla $n \geqslant 0$ i $M(a,\rho)$ będącego maksimum $|f|$ na brzegu $K(a,\rho)$.

Dowód: Korzystamy ze wzoru Cauchy'ego dla brzegu koła $K(a,\rho)$:

$$|f^{(n)}(a)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathsf{d}\xi\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\varphi})\rho^{-(n+1)}e^{-i\varphi(n+1)}\rho i e^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi\right| \leqslant$$
$$\frac{n!}{\rho^n 2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(a+\rho e^{i\varphi})ie^{-i\varphi n}\right|\mathsf{d}\varphi = \frac{n!}{\rho^n 2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(a+\rho e^{i\varphi})\right|\mathsf{d}\varphi \leqslant$$
$$\frac{n!}{\rho^n 2\pi}M(a,\rho)2\pi = \frac{n!M(a,\rho)}{\rho^n}$$

□

Fakt 2. *Jeśli funkcja $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ dla spójnego $\mathcal{O}$ i $|f|$ ma lokalne maksimum w punkcie $a \in \mathcal{O}$ to f jest stała na $\mathcal{O}$*

Dowód: Niech a będzie punktem w którym $|f|$ ma lokalne maksimum. Oznacza to, że istnieje $\epsilon > 0$ taki, że dla z spełniającego warunek $|z-a| \leqslant \epsilon$

$$|f(a)| - |f(z)| \geqslant 0.$$

Całka z powyższej funkcji po $K(a,\epsilon)$ jest więc także dodatnia:

$$\int_{K(a,\epsilon)}(|f(a)|-|f(z)|)\mathsf{d}x\mathsf{d}y \geqslant 0. \tag{2}$$

Oszacujmy całkę

$$\int_{K(a,\epsilon)}|f(z)|\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

przyglądając się

$$\int_{K(a,\epsilon)}f(z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

we współrzędnych biegunowych:

$$\int_{K(a,\epsilon)}f(z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_{K(a,\epsilon)}f(z)r\mathsf{d}r\mathsf{d}\varphi = \int_0^\epsilon r\mathsf{d}r\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\varphi})\mathsf{d}\varphi$$

Ze wzoru Cauchy'ego wynika, że

$$\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\varphi}) = 2\pi f(a)$$

zatem

$$\int_{K(a,\epsilon)}f(z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_0^\epsilon 2\pi f(a)r\mathsf{d}r = 2\pi f(a)\frac{\epsilon^2}{2} = \pi f(a)\epsilon^2$$

Mamy więc nierówność:

$$\int_{K(a,\epsilon)}|f(z)|\mathsf{d}x\mathsf{d}y \geqslant \left|\int_{K(a,\epsilon)}f(z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\right| = \pi|f(a)|\epsilon^2.$$

Wracamy do wzoru (2):

$$0 \leqslant \int_{K(a,\epsilon)}(|f(a)|-|f(z)|)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = \pi\epsilon^2|f(a)| - \int_{K(a,\epsilon)}|f(z)|\mathsf{d}x\mathsf{d}y \leqslant \pi\epsilon^2|f(a)| - \pi|f(a)|\epsilon^2 = 0$$

Ostatecznie
$$0 \leqslant \int_{K(a,\epsilon)} (|f(a)| - |f(z)|)\mathsf{d}x\mathsf{d}y \leqslant 0$$
czyli
$$\int_{K(a,\epsilon)} (|f(a)| - |f(z)|)\mathsf{d}x\mathsf{d}y = 0.$$
Funkcja podcałkowa jest nieujemna, skoro całka z niej jest równa zero, to znaczy, że sama funkcja jest stała i równa zero (jeśli weźmiemy także pod uwagę ciągłość). Ostatecznie okazuje się, że na $K(a, \epsilon)$ funkcja f może się różnić od $f(z)$ co najwyżej o fazę:
$$f(z) = e^{i\varphi(z)} f(a),$$
gdzie φ jest funkcją holomorficzną o wartościach rzeczywistych. Z równań C-R wynika, że taka funkcja musi być stała. Wartość $f(a)$ pokazuje, że ta stała musi być zero. W ten sposób otrzymaliśmy wniosek, który mówi, że f jest stała na otoczeniu a. Rozszerzenie tego na cały obszar $\mathcal{O}$ wymaga użycia rozwinięcia Taylora (o którym w następnym wykładzie).□

Definicja 1. *Funkcją całkowitą* nazywamy funkcję holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$

Twierdzenie 2. *Funkcja całkowita i ograniczona jet stała*

Dowód: Funkcja f jest ograniczona, to znaczy $|f(z)| \leqslant C$. Dla każdego z i dla każdego promienia r mamy więc $M(z, r) \leqslant C$. Nierówność Cauchy'ego dla pochodnej daje
$$|f'(z)|r \leqslant M(z, r) \leqslant C.$$
Skoro nierówność ta zachodzi la każdego r, to znaczy, że $f'(z) = 0$ w każdym punkcie $z \in \mathbb{C}$. Funkcja f jest więc stała. □

Twierdzenie 3 (Podstawowe Algebry)**.** *Wielomian stopnia $n > 0$ o współczynnikach zespolonych ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (liczonych z krotnościami).*

Dowód: Załóżmy, że wielomian w_n nie ma pierwiastków. Wtedy funkcja $z \mapsto \frac{1}{w_n(z)}$ jest całkowita i ograniczona, a więc stała. No ale wtedy wielomian nie jest stopnia n! Wielomian musi więc mieć choć jeden pierwiastek z_1. Jeśli ma jeden pierwiastek to jest iloczynem
$$w_n(z) = (z - z_1)w_{n-1}(z)$$
i dla wielomianu w_{n-1} stopnia $n - 1$ rozumowanie można powtórzyć. □

Sprawne wykonywanie rachunków na funkcjach argumentu zespolonego wymaga nabycia nowych przyzwyczajeń i wyrobienia sobie intuicji. Posłużą nam do tego przykłady:

Przykład 1. Znaleźć wszystkie funkcje holomorficzne $f(x+iy) = u(x, y)+i(x, y)$ takie, że ich część rzeczywista jest równa
$$u(x, y) = e^x \sin(y).$$
♣

Przykład 2. Znaleźć wszystkie funkcje holomorficzne $f(x+iy) = u(x,y)+i(x,y)$ takie, że ich część rzeczywista jest równa

$$u(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Do wyznaczania $v(x,y)$ użyć równań Cauchy'ego-Riemanna wyrażonych w zmiennych (r,φ), tzn dla funkcji holomorficznej w postaci

$$f(re^{i\varphi} = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi).$$

Równania te należy najpierw wyprowadzić zamieniając zmienne w równaniach Cauchy'ego-Riemanna wyrażonych we współrzędnych kartezjańskich. ♣

Przykład 3. Czy istnieje funkcja holomorficzna taka, że jej część rzeczywista jest równa $x\cos\varphi$? Jakie gładkie funkcje dwóch zmiennych (x,y) mogą stanowić część rzeczywistą lub urojoną funkcji holomorficznej? Załóżmy, że $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ spełnia równania Cauchy'ego-Riemanna. Obliczyć Δu i Δv. ♣

Powyższe przykłady omówiliśmy w czasie wykładu. Wprowadziliśmy także pojęcie funkcji harmonicznej. Osoby nie uczestniczące w wykładzie będą musiały poradzić sobie samodzielnie.