Wykład 19

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

13 grudnia 2011

Zajmiemy się teraz rozwinięciem funkcji holomorficznej w szereg Taylora. Przypomnijmy podstawowe fakty związane z szeregami potęgowymi o wyrazach rzeczywistych. Napis postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \tag{1}$$

gdzie $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem liczbowym o wartościach rzeczywistych, nazywaliśmy szeregiem potęgowym. Liczba rzeczywista R zdefiniowana wzorem

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

nazywana jest *promieniem zbieżności* szeregu (1). Twierdzenia dotyczące zbieżności szeregów funkcyjnych gwarantują, że wewnątrz odcinka $]a-R, a+R[$ szereg jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie, definiuje zatem pewną funkcję. Dowodziliśmy także, że funkcje będące sumami szeregów potęgowych są gładkie wewnątrz obszaru zbieżności, ponadto pochodną i funkcję pierwotną można uzyskać różniczkując i całkując szereg wyraz po wyrazie. Te same zasady obowiązują dla szeregów o wyrazach zespolonych. Oto stosowne twierdzenie (które pozostawimy bez dowodu):

Twierdzenie 1. *Funkcja określona wzorem*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

w kole $\{|z-a| < R\}$*, dla* R *takiego, że* $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ *jest funkcją holomorficzną, ponadto*

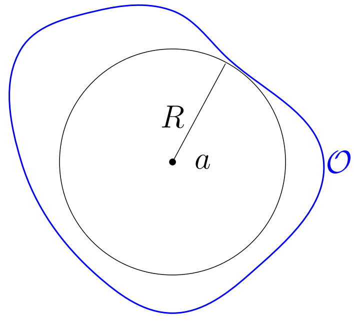
$$f^{(n)}(a) = n! c_n$$

Okazuje się, że zachodzi także odwrotne twierdzenie:

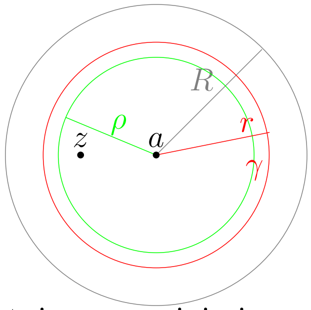
Twierdzenie 2. *Niech* $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ *i niech ponadto* $K(a,R) \subset \mathcal{O}$ *wówczas szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$$

jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f *w kole* $K(a,R) \subset \mathcal{O}$*.*



Dowód: Skorzystamy ze wzoru całkowego Cauchy'ego dla krzywej γ leżącej wewnątrz koła zbieżności i z należącego do obszaru ograniczanego krzywą:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathsf{d}\xi$$

korzystając z rozwinięcia

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

dla $|w| < 1$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{(\xi - a)(1 - \frac{(z-a)}{(\xi-a)})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

dla $|\frac{(z-a)}{(\xi-a)}| < 1$, czyli $|z-a| < |\xi - a| = r$ co wstawiamy do wzoru Cauchy'ego:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathsf{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\mathsf{d}\xi$$

Szacujemy teraz wyraz szeregu pod całką: funkcja f na okręgu γ jest ograniczona: $|f| \leqslant M$, $|z-a| < \rho$, zatem

$$\left|\frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\right| \leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \frac{M}{r}.$$

Ponieważ $\rho < r$ szereg pod całką jest zbieżny jednostajnie (kryterium Weierstrassa) i można zamieniać kolejność całkowania i sumowania:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathsf{d}\xi = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Powyższy szereg jest zbieżny jednostajnie w kole $|z-a| \leqslant \rho$. Ponieważ r, ρ były dowolne, takie że $0 < \rho < r < R$, to szereg jest zbieżny niemal jednostajnie w $|z-a| < R$.

□

Oto kilka wniosków z Twierdzenia Taylora:

(1) Niech $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ dla spójnego obszaru $\mathcal{O}$. Niech także $a \in \mathcal{O}$ będzie takie, że $f^{(n)}(a) = 0$ dla $n \geqslant 0$, wówczas f jest równa 0 na całym $\mathcal{O}$. W szczególności jeśli dwie funkcje mają jednakowe wszystkie pochodne, w pewnym punkcie, to są równe na składowej spójnej obszaru holomorficzności.

(2) Załóżmy, że a jest punktem skupienia zbioru $A = \{z : f(z) = 0\}$. Oznacza to, że istnieje ciąg (a_n) elementów A zbieżny do a, taki, że $a_n \neq a$. Z ciągłości funkcji f wynika, że $a \in A$. Załóżmy, że $f^{(k)}(a)$ jest pierwszą nieznikającą pochodną f w punkcie a. Wtedy z rozwinięcia Taylora mamy

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(k+l)}(a)}{(k+l)!}(z-a)^l = (z-a)^k g(z)$$

gdzie g jest pewną funkcją holomorficzną. Skoro $f(a_n) = 0$ to także $g(a_n) = 0$ i w konsekwencji $g(a) = 0$. Z drugiej strony $g(a) = f^{(k)}(a)\frac{1}{k!}$ co z założenia jest różne od zera. Okazało się więc, że przyjęcie założenia o istnieniu niezerowej pochodnej f w punkcie a doprowadziło nas do sprzeczności. Wnioskujemy zatem, że f ma wszystkie pochodne równe zero w punkcie a, zatem jest stała i równa zero w składowej spójności obszaru holomorficzności zawierającej a. Okazało się, że funkcja holomorficzna albo jest równa zero na obszarze otwartym albo jej zera są izolowane, tzn zbiór miejsc zerowych nie ma punktu skupienia.

(3) Punkt pierwszy pozwala uzupełnić lukę w dowodzie twierdzenia o własnościach modułu funkcji holomorficznej: jeśli moduł ma lokalne maksimum to funkcja jest stała na otoczeniu maksimum. Jeśli jest stała to ma wszystkie pochodne poza zerową równe zero w punkcie a, zatem jest też równa tej samej stałej na całej składowej spójności obszaru holomorficzności zawierającej a.

Funkcję, którą można lokalnie przedstawić jako sumę zbieżnego szeregu potęgowego nazywamy *funkcją analityczną*. Twierdzenie Taylora mówi zatem, że wszystkie funkcje holomorficzne są analityczne. Funkcję holomorficzną można też zdefiniować poprzez szereg potęgowy. Wzór taki obowiązuje wewnątrz promienia zbieżności. Z drugiej strony wiadomo na przykład, że szereg

$$(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \cdots$$

jest zbieżny w kole $K(1,1)$ i jest równy (wiemy to przynajmniej dla rzeczywistych wartości z) funkcji logarytm. Wiemy również, że logarytm zdefiniowany jest na obszarze istotnie większym niż $K(1,1)$. Dochodzimy tutaj do problemu przedłużenia analitycznego funkcji.

Przedłużenie analityczne i funkcje wieloznaczne:

Przykład 1. Funkcja $z \mapsto \sqrt{z}$. Dla rzeczywistego $x \geqslant 0$ funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ jest dobrze określona. Ponadto jest ona różniczkowalna dla $x > 0$. Okazuje się, że w otoczeniu $x = 1$ funkcję tę można rozwinąć w szereg potęgowy. Używamy rozwinięcia Taylora:

$$f(z) = \sqrt{(}z), \quad f'(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(z) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) z^{-\frac{3}{2}}, \ldots$$

$$f^{(n)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right) z^{\frac{1}{2}-n}$$

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right), \ldots, f^{(n)}(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)$$

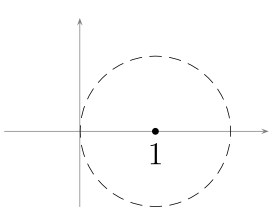
Oznaczając

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ n \end{array}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)\frac{1}{n!}$$

otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ n \end{array}\right) (x-1)^n$$

Łatwo sprawdzić, że szereg ten ma promień zbieżności równy 1. Można więc zdefiniować nim holomorficzną funkcję argumentu zespolonego określoną w $K(1,1)$:



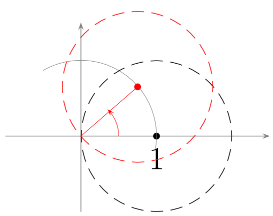
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ n \end{array}\right) (z-1)^n$$

Jest faktem natury algebraicznej, że $f(z)^2 = z$. Istotnie:

$$\left(1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{8}(z-1)^2+\frac{3}{48}(z-1)^3-\cdots\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{8}(z-1)^2+\frac{3}{48}(z-1)^3-\cdots\right)=$$
$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)(z-1)+\left(-2\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)(z-1)^2+\left(2\frac{3}{48}-2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)(z-1)^3+\cdots=$$
$$1+(z-1)=z$$

Wynika z tego, że wartość w punkcie $z = e^{i\varphi}$ (dla $\varphi \in]-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}[$ tzn wewnątrz koła zbieżności) może być $e^{i\frac{\varphi}{2}}$ lub $-e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Funkcja zadana szeregiem musi być ciągła, tzn właściwa jest wartość $f(e^{i\varphi}) = e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Spróbujmy przedłużyć analitycznie tę funkcję znajdując rozwinięcie wokół $e^{i\varphi}$. Okazuje się, że jest to szereg, który też ma promień zbieżności równy 1:

$$f(e^{i\varphi}) = e^{\frac{1}{2}i\varphi}, \quad f'(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i\varphi}, \quad f''(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}i\varphi}, \ldots$$
$$f^{(n)}(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)e^{-\frac{2n+1}{2}i\varphi}$$

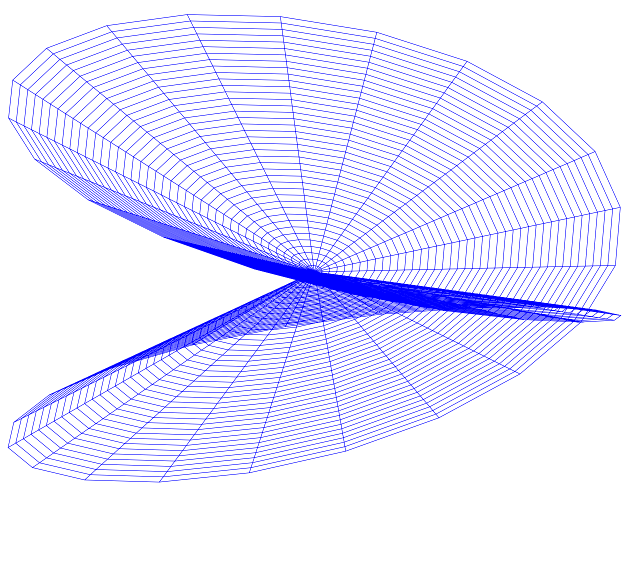


$$f(z) = e^{i\frac{\varphi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{z-e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}\right)^n$$

Przedłużając dalej wzdłuż okręgu jednostkowego dochodzimy znowu do punktu $z = 1$, ale rozwinięcie ma postać

$$f(z) = e^{i\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(z-1)^n.$$

W stosunku do wyjściowej wartości w punkcie $z = 1$ funkcja zmieniła znak. Okazuje się więc, że (podobnie jak logarytm) funkcja $\sqrt{\cdot}$ jest funkcją wieloznaczną. Można ją ujednoznacznić zmniejszając dziedzinę i przyjmując podobnie jak dla logarytmu, że funkcja ta jest określona (i holomorficzna) na np. $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, lub zdefiniować ją na odpowiedniej powierzchni Riemanna, którą można sobie wyobrażać np. tak:

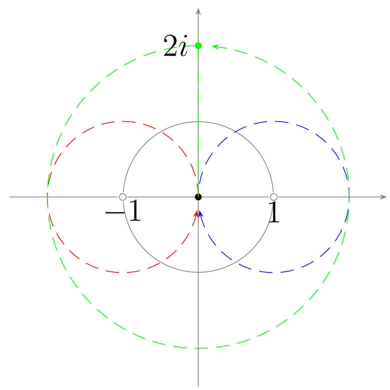


♣

Przykład 2. (nieobowiązkowy) Funkcja $z \mapsto \sqrt{1-z^2}$. W dziedzinie rzeczywistej rozważać możemy funkcję $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Jest ona określona na przedziale domkniętym $[-1,1]$ i różniczkowalna w przedziale otwartym $]-1,1[$. Mamy nawet więcej: w przedziale otwartym $]-1,1[$ jest to funkcja analityczna. Szereg potęgowy, który ją definiuje ma promień zbieżności równy 1, więc możemy rozszerzyć funkcję na $K(0,1) \subset \mathbb{C}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n z^{2n}$$

Możemy próbować rozszerzać analitycznie wzdłuż krzywych zaznaczonych na rysunku:



Sprawdźmy zachowanie na krzywej czerwonej:

$$\varphi \longmapsto -1 + e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Skorzystamy ze znanych już własności pierwiastka

$$\sqrt{1-(-1+e^{i\varphi})^2} = \sqrt{2-e^{i\varphi}}\sqrt{e^{i\varphi}} = \dots$$

Dla $\varphi = 0$ wartość funkcji jest 1 i musi się zmieniać w sposób ciągły:

$$\dots = \sqrt{2-e^{i\varphi}} e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

Krzywa $\varphi \mapsto 2 - e^{i\varphi}$ leży cała w jednej gałęzi pierwiastka, zatem powraca do tej samej wartości po obejściu kąta pełnego. Znak zmienia za to $\varphi \mapsto e^{i\frac{\varphi}{2}}$. Ostatecznie po obejściu osobliwości w -1 wzdłuż czerwonej krzywej funkcja zmienia wartość z 1 na -1. Podobnie stanie się po obejściu osobliwości w 1 wzdłuż krzywej niebieskiej.

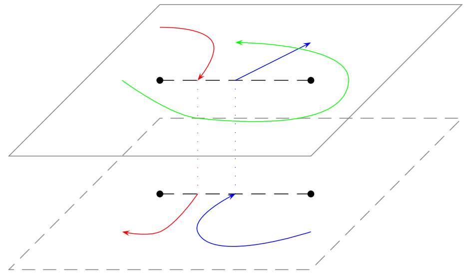
Interesujące jest zachowanie na krzywej zielonej. Od punktu $z = 0$ do punktu $z = 2i$ funkcja ma rzeczywiste wartości i $f(2i) = \sqrt{5}$. Na krzywej

$$\varphi \longmapsto 2e^{i\varphi}, \qquad \varphi \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$$

mamy

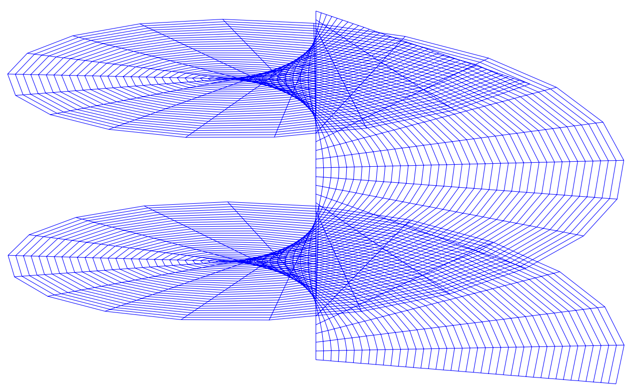
$$1 - z^2 = (1-2e^{i\varphi})(1+2e^{i\varphi}), \qquad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{(1-2e^{i\varphi})}\sqrt{(1+2e^{i\varphi})}$$

Tym razem obie krzywe znajdujące się pod pierwiastkami obchodzą osobliwość w 0, zatem oba pierwiastki zmieniają znak - wartość funkcji pozostaje więc bez zmian. Odpowiednia powierzchnia Riemanna ma dwa płaty połączone wzdłuż cięcia między punktami -1 a 1:



Wzdłuż czerwonej krzywej przechodzimy z góry na dół, wzdłuż niebieskiej z dołu do góry a wzdłuż zielonej zostajemy cały czas na górze ♣

Przykład 3. (nieobowiązkowy) Jeszcze o logarytmie: Odpowiednia dla logarytmu powierzchnia Riemanna może wyglądać na przykład tak:



♣