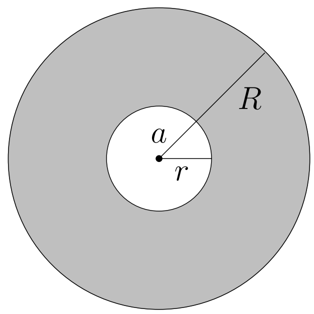
Wykład 20

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

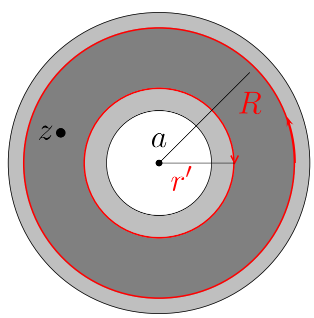
16 grudnia 2011

Niech $\mathcal{R}(a;r,R)$ oznacza pierścień o środku w punkcie a, promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r, tzn zbiór

$$\mathcal{R}(a;r,R)=\{z\in\mathbb{C}:\quad r<|z|<R\}.$$



Rozważamy funkcję $f\in\mathcal{A}(R(a;r,R))$ i dwa okręgi Γ i γ o promieniach odpowiednio R' i r' położone wewnątrz pierścienia, dokładniej $r<r'<R'<R$ i zorientowane jak na rysunku.



Krzywe te stanowią brzeg obszaru w którym funkcja f jest holomorficzna, zatem ze wzoru Cauchy'ego otrzymujemy

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma,+)}\frac{f(w)}{w-z}\mathsf{d}w+\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma,-)}\frac{f(w)}{w-z}\mathsf{d}w.$$

jeśli orientacja $(+)$ oznacza orientację przeciwną do ruchu wskazówek zegara a $(-)$ zgodną. Dla w należącego do krzywej Γ zachodzi $|w-a|>|z-a|$, tzn $\frac{|z-a|}{|w-a|}<1$. Jak poprzednio, przy wzorze Taylora otrzymujemy

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a+a-z}=\frac{1}{(w-a)(1-\frac{(z-a)}{(w-a)})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

Dla w należącego do krzywej γ zachodzi $|w-a|<|z-a|$, tzn $\frac{|w-a|}{|z-a|}<1$. Tym razem rachunek wygląda następująco:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a+a-z}=-\frac{1}{(z-a)(1-\frac{(w-a)}{(z-a)})}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

Wstawiamy otrzymane sumy do wzoru Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma,+)} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\mathsf{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma,-)} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\mathsf{d}w =$$

W drugiej całce zmieniamy orientację na $(+)$ zmieniając jednocześnie znak przed całką. Zamieniamy także kolejność całkowania i sumowania, co jest w tym przypadku dozwolone.

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\Gamma,+)} f(w)\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\mathsf{d}w + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\gamma,+)} f(w)\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\mathsf{d}w =$$

Czynniki zawierające z można wyłączyć przed całkę

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{(\Gamma,+)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathsf{d}w + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int_{(\gamma,+)} f(w)(w-a)^n\mathsf{d}w =$$

W drugiej całce zamieniamy wskaźnik sumowania $-k = n+1$:

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{(\Gamma,+)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathsf{d}w + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{-1}(z-a)^k\int_{(\gamma,+)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\mathsf{d}w =$$

Obie całki wyglądają teraz bardzo podobnie, różni je jednak krzywa po której całkujemy. Jeśli jednak zauważymy, że oba okręgi położone są w obszarze holomorficzności funkcji podcałkowej stwierdzimy od razu, że w obu przypadkach całka nie zależy od promienia okręgu. Możemy więc całkować po dowolnym okręgu χ o promieniu $r < \rho < R$. Ostatecznie więc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-a)^n\int_{(\chi,+)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathsf{d}w.$$

W ten sposób przedstawiliśmy funkcję f w postaci szeregu potęgowego uwzględniającego także ujemne potęgi $(z-a)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\chi,+)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\mathsf{d}w.$$

Szczególną rolę odgrywa współczynnik b_{-1}:

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\chi,+)} \frac{f(w)}{(w-a)^{-1+1}}\mathsf{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\chi,+)} f(w)\mathsf{d}w.$$

Gdybyśmy więc znaleźli inną niż całkowanie metodę wyznaczania b_{-1} moglibyśmy z jego pomocą obliczać całki. Zanim zajmiemy się poszukiwaniem takiej metody musimy wyjaśnić kilka terminów: Mówimy, że funkcja f ma *izolowany punkt osobliwy* w $z = a$ jeśli istnieje R takie, że funkcja f jest holomorficzna w pierścieniu $\mathcal{R}(a; 0, R)$, tzn w kole bez środka. Izolowany punkt osobliwy w zerze ma funkcja $z \mapsto \frac{1}{z^n}$ dla każdego n. Natomiast funkcja

$$z \longmapsto \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

ma w zerze punkt osobliwy nieizolowany, ze względu na to, że także punkty $z = \frac{1}{k\pi}$ są osobliwe dla tej funkcji i stanowią ciąg zbieżny do zera. Izolowany punkt osobliwy nazywamy *istotnie osobliwym* jeśli istnieje nieskończenie wiele niezerowych współczynników b_n dla ujemnych wartości n. Punkt $z = 0$ jest punktem istotnie osobliwym dla funkcji $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$, ponieważ

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}.$$

Jeśli tylko skończona liczba współczynników b_n dla ujemnych n jest różna od zera, to punkt $z = a$ nazywamy *biegunem* funkcji f. Jeśli k jest nawiększą liczbą całkowitą taką, że $b_{-k} \neq 0$ to mówimy że a jest biegunem *rzędu* k. Funkcja $z \mapsto \frac{1}{z^n}$ ma w $z = 0$ biegun rzędu n. Zdarza się także, że w izolowanym punkcie osobliwym niezerowe są jedynie współczynniki b_n dla $n >\geqslant 0$, jak dla funkcji $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$. W takim przypadku osobliwość nazywamy *pozorną* lub *usuwalną*. Funkcję taką można rozszerzyć do funkcji holomorficznej w kole $K(a, R)$ kładąc $f(a) = b_0$.

Szczególnie łatwo policzyć jest b_{-1} dla bieguna rzędu k. Jeśli bowiem f ma w punkcie $z = a$ biegun rzędu k to

$$f(z) = \frac{b_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{b_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{b_{-1}}{(z-a)} + b_0 + b_1(z-a) + \cdots$$

Wtedy funkcja $g(z) = (z-a)^k f(z)$ jest holomorficzna

$$g(z) = b_{-k} + (z-a)^1 b_{-k+1} + \cdots + (z-a)^{k-1} b_{-1} + (z-a)^k b_0 + \cdots$$

Z twierdzenia Taylora wynika, że współczynniki rozwinięcia funkcji holomorficznej związane są z pochodnymi tej funkcji, tzn., w szczególności

$$b_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathsf{d}^{k-1}}{\mathsf{d}z^{k-1}} g(z)_{|z=a} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathsf{d}^{k-1}}{\mathsf{d}z^{k-1}}[(z-a)^k f(z)]$$

Mamy więc stosunkowo łatwy sposób liczenia b_{-1} w biegunie. Pora zastosowac w praktyce nowo zdobytą wiedzę:

Przykład 1. Obliczyć całkę

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi}{1 + 2a\cos\varphi + a^2}$$

Obserwujemy, że mianownik funkcji podcałkowej można przekształcić w następujący sposób:

$$1 - 2a\cos\varphi + a^2 = (a + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = (a + e^{i\varphi})(a + e^{-i\varphi}).$$

Dla $z = e^{i\varphi}$ liczba sprzężona $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Mianownik więc piszemy ostatecznie w postaci

$$(a+z)(a+\frac{1}{z}).$$

W liczniku sinus zapisujemy jako

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$$

Pamiętamy także, że

$$z = e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{d}z = ie^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathsf{d}z}{iz} = \mathsf{d}\varphi.$$

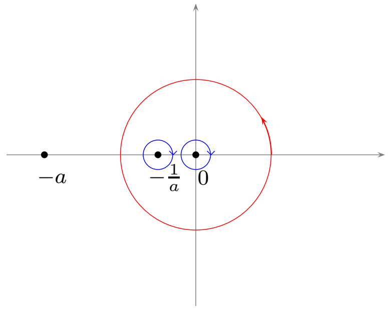
Ostatecznie wyrażenie pod całką przyjmuje postać

$$\frac{-\frac{1}{4}(z-\frac{1}{z})^2\frac{\mathsf{d}z}{iz}}{(a+z)(a+\frac{1}{z})} = \frac{-\frac{1}{4i}\frac{(z^2-1)^2}{z}^2\frac{\mathsf{d}z}{z}}{(a+z)(a+\frac{1}{z})} = \frac{-\frac{1}{4i}(z^2-1)^2\mathsf{d}z}{z^3(a+z)(a+\frac{1}{z})} = \frac{-\frac{1}{4i}(z^2-1)^2\mathsf{d}z}{z^2(a+z)(az+1)}$$

Zamiast wyjściowej całki można policzyć całkę po S^1 z funkcji zespolonej

$$\int_{S^1} \frac{-\frac{1}{4i}(z^2-1)^2\mathsf{d}z}{z^2(a+z)(az+1)}$$

Funkcja ta ma biegun drugiego rzędu w $z = 0$ oraz dwa bieguny pierwszego rzędu w $z = -a$ i w $z = -\frac{1}{a}$. Dwa z nich znajdują się w kole o promieniu 1 (zakładając, że $a \neq 1$ i $a \neq -1$). Jeśli np. $a > 1$, to w kole jest biegun w 0 i biegun w $-\frac{1}{a}$. Suma całek po czerwonej krzywej i po niebieskich (funkcja jest holomorficzna na obszarze, którego brzegiem są te krzywe) jest równa zero. Każda z całek po niebieskim okręgu jest równa odpowiedniemu residuum (ze znakiem minus z powodu orientacji).



Ostatecznie, uwzględniając wszystkie znaki, otrzymujemy wzór

$$\int_{S^1} \frac{-\frac{1}{4i}(z^2-1)^2 \mathsf{d}z}{z^2(a+z)(az+1)} = 2\pi i \ \mathrm{Res}_0(f) + 2\pi i \ \mathrm{Res}_{-\frac{1}{a}}(f),$$

gdzie

$$f(z) = \frac{-\frac{1}{4i}(z^2-1)^2 \mathsf{d}z}{z^2(a+z)(az+1)}$$

a $\mathrm{Res}_w f$ oznacza residuum funkcji f w punkcie w. Biegun w $-\frac{1}{a}$ jest biegunem pierwszego rzędu, łatwo więc liczymy residuum:

$$\mathrm{Res}_{-\frac{1}{a}}(f) = \lim_{z \to -\frac{1}{a}} [(z+\frac{1}{a})f(z)] = \frac{1}{4i}(\frac{1-a^2}{a^2}).$$

W $z=0$ biegun jest rzędu drugiego, obowiązuje więc wzór

$$\mathrm{Res}_0(f) = \lim_{z \to 0} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}z}[(z^2 f(z))] = \frac{1}{4i}\frac{1+a^2}{a^2}.$$

Obliczamy więc całkę

$$2\pi i \ \mathrm{Res}_0(f) + 2\pi i \ \mathrm{Res}_{-\frac{1}{a}}(f) = 2\pi i \frac{1}{4i}\left(\frac{1-a^2}{a^2} + \frac{1+a^2}{a^2}\right) = \frac{\pi}{a^2}$$

Podobny rachunek należy wykonać dla $a < 1$. ♣