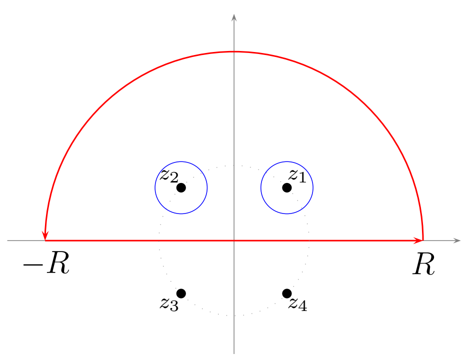
Wykład 21

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012
20 grudnia 2011

Całka z funkcji wymiernej. Posługując się metodami pochodzącymi z analizy zespolonej obliczymy całkę w sensie Riemanna
$$I=\int_0^\infty \frac{\mathsf{d}x}{x^4+1}.$$
Zauważmy, że ze względu na symetrię funkcji podcałkowej względem zmiany znaku, prawdą jest, iż
$$2I=\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathsf{d}x}{x^4+1}.$$
Powyższa całka jest całką niewłaściwą, bardzo przyzwoicie zbieżną, zatem prawdą jest także, że
$$2I=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{\mathsf{d}x}{x^4+1}.$$
Całka po odcinku $[-R,R]$ jest składnikiem całki z funkcji
$$f(z)=\frac{1}{z^4+1}$$
po konturze zaznaczonym na rysunku kolorem czerwonym i zorientowanym kanonicznie, tzn. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Kontur ten oznaczmy Γ.



Drugim (oprócz odcinka) składnikiem tego konturu jest półokrąg Γ_R o promieniu R i środku w $z=0$. Przedyskutujmy wartość całki z funkcji f po konturze Γ_R:
$$\left|\int_{(\Gamma_R,+)}\frac{\mathsf{d}z}{z^4+1}\right|=\left|\int_0^\pi \frac{Rie^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi}{R^4e^{4i\varphi}+1}\right|\leqslant\int_0^\pi\left|\frac{Rie^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi}{R^4e^{4i\varphi}+1}\right|=\int_0^\pi\frac{R\mathsf{d}\varphi}{|R^4e^{4i\varphi}+1|}$$
Ostatnią całkę oszacujemy z góry zastępując funkcję podcałkową funkcją nieco większą, niezależną od φ. Żeby zwiększyć ułamek mianownik trzeba zmniejszyć. Sprawdźmy więc jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia $|R^4e^{4i\varphi}+1|$. Wyrażenie to jest odległością punktu $z=R^4e^{4i\varphi}$ od punktu -1. Gdy φ przebiega odcinek $[0,\pi]$ liczba z przebiega (dwukrotnie) okrąg o promieniu R^4. Najmniejsza odległość -1 od jest wtedy, gdy $z=-R^4$. Odległość ta jest równa R^4-1. Mamy więc
$$\int_0^\pi\frac{R\mathsf{d}\varphi}{|R^4e^{4i\varphi}+1|}\leqslant\int_0^\pi\frac{R\mathsf{d}\varphi}{R^4-1}=\frac{\pi R}{R^4-1}$$

Ostatnie wyrażenie zmierza do zera gdy R dąży do nieskończoności. Okazało się więc, że

$$\lim_{R\to\infty}\int_{(\Gamma_R,+)}\frac{\mathsf{d}z}{z^4+1}=0$$

Z drugiej strony całka po całym czerwonym konturze może być obliczona metodą residuów. Wynik nie zależy od promienia R jeśli tylko jest on wystarczająco duży, żeby punkty osobliwe z_1 i z_2 znalazły się wewnątrz konturu. Mamy więc

$$\int_{(\Gamma,+)}\frac{\mathsf{d}z}{z^4+1}=2\pi i(Res_{z_1}f+Res_{z_2}f)$$

oraz

$$\lim_{R\to\infty}\int_{(\Gamma,+)}\frac{\mathsf{d}z}{z^4+1}=2\pi i(Res_{z_1}f+Res_{z_2}f).$$

Z naszych wcześniejszych rozważań wynika, że

$$\lim_{R\to\infty}\int_{(\Gamma,+)}\frac{\mathsf{d}z}{z^4+1}=\lim_{R\to\infty}\int_{(\Gamma_R,+)}\frac{\mathsf{d}z}{z^4+1}+\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\mathsf{d}x}{x^4+1}=0+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathsf{d}x}{x^4+1}=2I$$

Ostatecznie

$$I=\pi i(Res_{z_1}f+Res_{z_2}f).$$

Kluczem do obliczenia całki jest więc policzenie residuów funkcji f w punktach z_1 i z_2. Funkcja f ma w tych punktach bieguny pierwszego rzędu.

$$Res_{z_1}f(z)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}=$$
$$\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

Podobnie

$$Res_{z_2}f(z)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)=\frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}.$$

Podstawiamy do powyższych wzorów $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}$ i upraszczamy otrzymane wyrażenia:

$$\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}=\frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{3\pi}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{5\pi}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{7\pi}{4}})}=$$
$$\frac{1}{e^{2i\frac{\pi}{4}}(e^{-i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}})e^{i\frac{3\pi}{4}}(e^{-i\frac{2\pi}{4}}-e^{i\frac{2\pi}{4}})e^{i\frac{4\pi}{4}}(e^{-i\frac{3\pi}{4}}-e^{i\frac{3\pi}{4}})}=$$
$$\frac{1}{i(2i)[-\sin(\frac{\pi}{4})]e^{i\frac{3\pi}{4}}(2i)[-\sin(\frac{\pi}{2})](-1)(2i)[-\sin(\frac{3\pi}{4})]}=\frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}.$$

$$\frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)}=\frac{1}{(e^{i\frac{3\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}})(e^{i\frac{3\pi}{4}}-e^{i\frac{5\pi}{4}})(e^{i\frac{3\pi}{4}}-e^{i\frac{7\pi}{4}})}=$$
$$\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{4}}(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}})e^{i\frac{4\pi}{4}}(e^{-i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{4}})e^{i\frac{5\pi}{4}}(e^{-i\frac{2\pi}{4}}-e^{i\frac{2\pi}{4}})}=$$
$$\frac{1}{i(2i)[\sin(\frac{\pi}{4})](-1)(2i)[-\sin(\frac{\pi}{4})]e^{i\frac{5\pi}{4}}(2i)[-\sin(\frac{\pi}{2})]}=\frac{1}{4ie^{i\frac{5\pi}{4}}}$$

Obliczamy całkę:

$$i = \pi i \left(\frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4ie^{i\frac{5\pi}{4}}} \right) = \frac{i\pi}{4} \left(\frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}} \right) = \frac{i\pi}{4} \left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}} \right) =$$

$$\frac{i\pi}{4} e^{-\frac{2\pi}{4}} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{i\pi}{4}(-i)2\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Podobnie obliczyć można całkę z funkcji wymiernej $x \mapsto Q(x)$ po $\mathbb{R}$ jeśli funkcja Q spełnia następujące warunki:

(1) $z \mapsto Q(z)$ nie ma osobliwości na osi rzeczywistej;
(2) $\lim_{|z|\to\infty} zQ(z) = 0$

Warunek (1) gwarantuje, że całka po konturze czerwonym Γ jest dobrze określona, warunek (2) gwarantuje, że w granicy $R \to \infty$ całka po konturze Γ_R znika. Jedynym niezerowym wkładem do całki po Γ jest wtedy całka po $\mathbb{R}$ z funkcji Q. Z drugiej strony całkę po Γ można obliczyć uwzględniając residua w górnej półpłaszczyźnie.