Wykład 23

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012
10 stycznia 2012

Rozpoczynamy obecnie pracę nad tak zwaną *teorią dystrybucji*, zwaną inaczej teorią funkcji uogólnionych. Poszukując literatury dotyczącej tego tematu trzeba mieć na uwadze, że słowo „dystrybucja” ma w matematyce przynajmniej dwa znaczenia. W analizie funkcjonalnej dystrybucja oznacza (najogólniej mówiąc) odwzorowanie liniowe określone na zbiorze funkcji, natomiast w geometrii różniczkowej dystrybucja oznacza rozmaitość wraz z wyróżnioną w każdym punkcie podprzestrzenią wektorową w przestrzeni stycznej. Oba byty matematyczne są używane w fizyce. Przez najbliższe kilka wykładów zajmować sie będziemy dystrybucjami w sensie analizy funkcjonalnej.

O czym będzie mowa: na wykładach z fizyki spotkali się już Państwo zapewne z tak zwaną deltą Diraca. Mówi się o niej często jako o „funkcji delta Diraca”, oznacza się symbolem δ_0 i używa w następujący sposób: Jeśli f jest funkcją rzeczywistą to

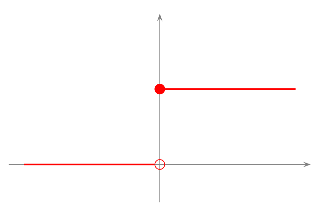
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_0(x)\mathsf{d}x = f(0). \tag{1}$$

Funkcja delta Diraca powinna mieć zatem własność $\delta_0(x) = 0$ dla wszystkich $x \neq 0$ i ponadto powinna mieć całkę równą 1, tzn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x)\mathsf{d}x = 1.$$

Oczywiście taka *funkcja* nie istnieje, (jeśli słowo *funkcja* mamy tu traktować poważnie). Tym nie mniej jakiś obiekt matematyczny mający powyższe własności jednak istnieje. Weźmy na przykład funkcję (tym razem prawdziwą) schodkową Heaviside'a:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$



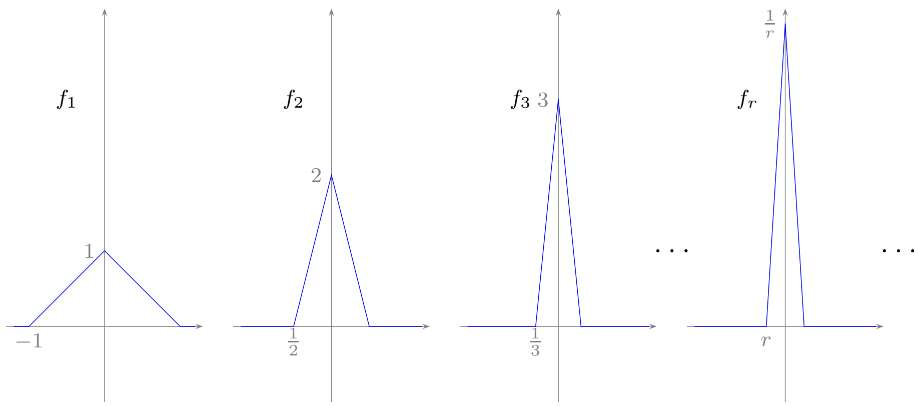
Spróbujmy „policzyć pochodną” θ' w pewien szczególny sposób. Niech f będzie różniczkowalną funkcją rzeczywistą znikającą w nieskończoności, wówczas (całkujemy przez części):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x)\mathsf{d}x = f(x)\theta(x)\big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\theta(x)\mathsf{d}x =$$
$$= \int_0^{\infty} f'(x)\mathsf{d}x = -\, f(x)\big|_0^{\infty} = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_0(x)\mathsf{d}x$$

Okazało się, że po scałkowaniu z funkcją θ' daje δ. Funkcja Heaviside'a jest kawałkami stała, więc jej pochodna (tam gdzie istnieje w normalnym sensie) jest zero. W punkcie nieciągłości pochodna w sensie różniczkowania funkcji nie istnieje, ale zapisany powyżej rachunek pokazuje, że być może warto rozszerzyć zakres rozumienia tego pojęcia tak, żeby można było napisać:

$$\theta' = \delta_0. \tag{2}$$

Jeszcze inne spojrzenie na δ_0, które często stosuje się w praktyce to podejście przez przybliżenie: bierzemy ciąg funkcji o tej własności, że ich nośnik „dąży do zbioru jednopunktowego $\{0\}$" i całka z tej funkcji po całym $\mathbb{R}$ jest stale równa 1, na przykład:



Dla funkcji (ciągłej) φ obliczmy

$$\lim_{r\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x$$

gdzie f_r jest jak na powyższym rysunku, tzn

$$f_r(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -r \\ \dfrac{1}{r^2}x + \dfrac{1}{r} & -r < x \leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{r^2}x + \dfrac{1}{r} & 0 < x \leqslant r \\ 0 & x > r \end{cases}$$

Liczymy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x = \int_{-r}^{0}\left(\frac{1}{r^2}x + \frac{1}{r}\right)\varphi(x)\mathsf{d}x + \int_0^r\left(-\frac{1}{r^2}x + \frac{1}{r}\right)\varphi(x)\mathsf{d}x = \\ \frac{1}{r^2}\left(\int_{-r}^{0} x\varphi(x)\mathsf{d}x - \int_0^r x\varphi(x)\mathsf{d}x\right) + \frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\varphi(x)\mathsf{d}x \tag{3}$$

Do całek w nawiasie stosujemy całkowanie przez części:

$$\int_{-r}^{0} x\varphi(x)\mathsf{d}x = x\int_0^x \varphi(t)\mathsf{d}t\Big|_{-r}^{0} - \int_{-r}^{0}\left(\int_0^x \varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x = r\int_0^{-r}\varphi(t)\mathsf{d}t - \int_{-r}^{0}\left(\int_0^x \varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x$$
$$\int_0^r x\varphi(x)\mathsf{d}x = x\int_0^x \varphi(t)\mathsf{d}t\Big|_0^r - \int_0^r\left(\int_0^x \varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x = r\int_0^r\varphi(t)\mathsf{d}t - \int_0^r\left(\int_0^x \varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x$$

Wyrażenie w nawiasie przyjmuje więc postać:

$$\int_{-r}^{0} x\varphi(x)\mathsf{d}x - \int_{0}^{r} x\varphi(x)\mathsf{d}x =$$

$$r\int_{0}^{-r}\varphi(t)\mathsf{d}t - \int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x - r\int_{0}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t + \int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x =$$

$$-r\int_{-r}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t - \int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + \int_{0}^{r}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x$$

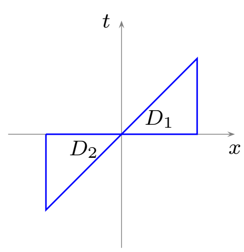
Wstawmy otrzymany wynik do (3):

$$(4)\quad \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x =$$

$$\frac{1}{r^2}\left(-r\int_{-r}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t - \int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + \int_{0}^{r}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x\right) + \frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\varphi(x)\mathsf{d}x$$

$$= -\frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\varphi(t)\mathsf{d}t + \frac{1}{r^2}\left(-\int_{-r}^{0}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x + \int_{0}^{r}\left(\int_{0}^{x}\varphi(t)\mathsf{d}t\right)\mathsf{d}x\right) + \frac{1}{r}\int_{-r}^{r}\varphi(x)\mathsf{d}x$$

Wyrażenia niebieskie w (4) się upraszczają. Całki iterowane interpretujemy jako całki po pewnym obszarze w $\mathbb{R}^2$.



Pierwsza całka w nawiasie w wyrażeniu (4) jest całką po obszarze D_2, zaś druga po obszarze D_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x = \frac{1}{r^2}\left(\int_{D_2}\varphi(t)\mathsf{d}x\mathsf{d}t + \int_{D_1}\varphi(t)\mathsf{d}x\mathsf{d}t\right) = \frac{1}{r^2}\int_{D_1\cup D_2}\varphi(t)\mathsf{d}x\mathsf{d}t.$$

Szacujemy:

$$\frac{1}{r^2}r^2\inf_{t\in[-r,r]}\varphi(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x \leqslant \frac{1}{r^2}r^2\sup_{t\in[-r,r]}\varphi(t)$$

$$\inf_{t\in[-r,r]}\varphi(t) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x \leqslant \sup_{t\in[-r,r]}\varphi(t)$$

i przechodzimy do granicy z $r \to 0$:

$$\varphi(0) \leqslant \lim_{r\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x \leqslant \varphi(0)$$

Ostatecznie

$$\lim_{r\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)\varphi(x)\mathsf{d}x = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta_0(x)\varphi(x)$$

i dalej chciałoby się napisać

$$(5)\qquad \lim_{r\to 0} f_r = \delta_0.$$

Granica musi być jednak w innym sensie niż zwykle dla (uogólnionych) ciągów funkcyjnych. Punktowa granica w $x = 0$ nie istnieje, w każdym innym punkcie jest równa 0.

Zauważmy, że wszystkie omawiane dzisiaj przez nas równości, takie jak (1), (2), (5) zostały wyprowadzone w działaniu na funkcję. Tajemnicze obiekty typu δ_0 działając na funkcję dawały liczbę. Działanie to ma charakter liniowy (czego bezpośrednio nie zaobserwowaliśmy w omawianych przykładach). Powyższe obserwacje uzasadniają definicje, które szczegółowo omawiać będziemy na następnym wykładzie, a które można by podsumować następująco: *Dystrybucje są to odwzorowania liniowe na przestrzeni funkcji.* Zazwyczaj nakładamy na dystrybucje warunek ciągłości, ale oczywiście żeby to miało sens, przestrzeń funkcji musi być wyposażona w topologię. Od tego jaką przestrzeń funkcji z jaką topologią wybierzemy, zależy jak duży będzie zbiór dystrybucji będący przestrzenią dualną do wybranej przestrzeni funkcji.