Wykład 24

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

13 stycznia 2012

Na poprzednim wykładzie pojawiły się przykłady nowych obiektów matematycznych, które nazwaliśmy *dystrybucjami*. Dystrybucje są to odwzorowania liniowe, ciągłe, określone na przestrzeni funkcji. Żeby precyzyjnie mówić o dystrybucjach, trzeba najpierw określić na jakiej przestrzeni funkcji mają te dystrybucje działać oraz jaka jest topologia w tej przestrzeni (żeby można było mówić o ciągłości). Tak naprawdę, wystarczy wiedzieć jakie ciągi w przestrzeni funkcji zbieżne są do zera. Przy okazji omawiania przestrzeni Banacha na początku drugiego semestru stwierdziliśmy bowiem, że ciągłość odwzorowania liniowego wystarczy badać w zerze. W trakcie naszego wykładu zajmiemy się dwiema przestrzeniami funkcji i odpowiadającymi im dystrybucjami. Pierwsza z tych przestrzeni to tak zwana *przestrzeń funkcji próbnych*:

W dalszym ciągu mówić będziemy o funkcjach określonych na $\mathbb{R}^n$, lub na otwartych obszarach $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach zespolonych. Różniczkowalność rozumiemy oczywiście w sensie rzeczywistym. Weźmy więc obszar otwarty $\mathcal{O}$ w $\mathbb{R}^n$. Zbiór $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$ jest zbiorem funkcji gładkich ($^\infty$) o zwartym nośniku ($_0$) zawartym w obszarze $\mathcal{O}$.

Potrzebujemy jeszcze jedno oznaczenie: Niech $\alpha = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ oznacza element $\mathbb{Z}_+^n$, tzn α jest n-elementowym ciągiem liczb całkowitych nieujemnych. Symbol $D^\alpha\varphi$ oznacza pochodną cząstkową funkcji φ rzędu $|\alpha| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ gdzie po współrzędnej x^i różniczkujemy k_i razy, tzn:

$$D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial^{k_1}x^1\partial^{k_2}x^2\cdots\partial^{k_n}x^n}.$$

Np. dla $n = 4$ możemy wziąć $\alpha = (1, 3, 5, 1)$ i wtedy

$$D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{10}\varphi}{\partial x^1\partial^3x^2\partial^5x^3\partial x^4}.$$

Zbiór $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$ wyposażymy w topologię mówiąc, które ciągi są zbieżne:

Definicja 1. *Mówimy, że ciąg φ_n jest zbieżny do funkcji φ jeśli spełnione są następujące warunki:*

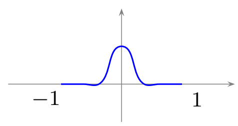
(1) *istnieje zbiór zwarty $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ taki, że $\operatorname{supp}\varphi_n \subset \mathcal{K}$ dla wszystkich n oraz*

(2) *ciąg $D^\alpha\varphi_n$ jest zbieżny jednostajnie do $D^\alpha\varphi$ dla każdego α (mówimy że φ_n dąży jednostajnie do φ ze wszystkimi pochodnymi).*

Bezpośrednią konsekwencją powyższej definicji jest to, że jeśli $\operatorname{supp}\varphi_n \subset \mathcal{K}$, to także $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathcal{K}$.

Definicja 2. Zbiór $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$ z topologią opisaną w definicji (1) nazywamy it przestrzenią funkcji próbnych i oznaczamy $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

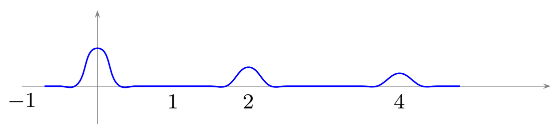
Przykład 1. Zastanówmy się teraz czym różni się zbieżność w $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ od zwykłej zbieżności jednostajnej. Weźmy dowolną funkcję gładką ψ o nośniku zawartym w odcinku $[-1, 1]$, np:



Skonstruujmy ciąg

$$\psi_n(x) = \psi(x) + \frac{1}{2}\psi(x-2) + \frac{1}{3}\psi(x-4) + \cdots + \frac{1}{n}\psi(x-2(n-1))$$

Funkcja ψ_3 wygląda np. tak:



Jeśli $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\psi(x-2(n-1))$ to oczywiście

$$\sup|\psi_n - \varphi| = \frac{1}{n}\sup|\psi| \to 0 \quad \text{dla} \quad n \to 0,$$

inaczej mówiąc

$$||\psi_n - \varphi||_\infty \to 0 \quad \text{dla} \quad n \to 0.$$

Ciąg ψ_n jest zbieżny do φ w normie jednostajnej, funkcja φ jest gładka na $\mathbb{R}$, jednak ciąg ψ_n nie jest zbieżny w $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ponieważ nie istnieje zbiór zwarty zawierający nośniki wszystkich wyrazów ciągu. Funkcja graniczna φ nie jest elementem $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, gdyż jej nośnik nie jest zwarty.
Podobnie ciąg $\eta_n = \frac{1}{n}\psi(x-2(n-1))$ jest ciągiem elementów z $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ zbieżnym do 0 w normie jednostajnej, ale nie zbieżnym w $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (mimo, że funkcja graniczna należy do $\mathcal{D}(\mathbb{R})$). Ciąg nie jest zbieżny również z tego powodu, że nie jest spełniony pierwszy warunek zbieżności dotyczący nośników wyrazów ciągu. ♣

Przestrzeń funkcji próbnych nie jest przestrzenią metryczną jednak można w niej zdefiniować ciągi Cauchyego.

Definicja 3. Mówimy, że ciąg (φ_n) jest *ciągiem Cauchy'ego* w $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ jeśli istnieje zbiór zwarty $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}$ zawierający nośniki wszystkich wyrazów ciągu i ponadto dla wszystkich wielowskaźników α

$$||D^\alpha(\varphi_n - \varphi_m)|| \to 0 \quad \text{dla} \quad n, m \to \infty$$

Mając ciągi Cauchy'ego możemy sformułować dość oczywisty fakt

Fakt 1. *Przestrzeń funkcji próbnych jest zupełna.*

Szkic dowodu: Jeśli ciąg φ_n jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, to w szczególności dla wielowskaźnika $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ mamy $||\varphi_n - \varphi_m)|| \to 0$ dla $n, m \to \infty$. W ustalonym punkcie $x \in \mathbb{R}^n$ ciąg $\varphi_n(x)$ jest więc ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{C}$ i jako taki jest zbieżny. Oznaczmy $\varphi(x)$ granicę tego ciągu. Ponieważ nośnik φ_n jest zawarty w $\mathcal{K}$ dla każdego n, to także nośnik φ ma tę własność. Z twierdzeń o ciągłości i różniczkowalności granicy jednostajnej ciągu funkcyjnego (których dokładnie nie omawialiśmy) wynika, że φ jest gładka i spełniony jest także drugi warunek zbieżności w sensie przestrzeni funkcji próbnych. □

Zdefiniowaliśmy zatem przestrzeń funkcji próbnych $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ i stwierdziliśmy, że jest to topologiczna przestrzeń zupełna. Możemy teraz przejść do dystrybucji określonych na przestrzeni funkcji próbnych.

Definicja 4. Funkcjonał liniowy i ciągły na przestrzeni funkcji próbnych $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ nazywamy *dystrybucją*. Przestrzeń wektorową dystrybucji oznaczamy $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

Przykład 2. Delta Diraca δ_a dla $a \in \mathcal{O}$:

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathcal{O}) \ni \varphi \longmapsto \varphi(a) \in \mathbb{C}$$

jest bez wątpienia dystrybucją. Jeśli ciąg φ_n dąży do zera w przestrzeni funkcji próbnych to dąży też do zera punktowo, zatem $\delta_a(\varphi_n) = \varphi_n(a) \to 0$ dla $n \to \infty$. ♣

Przykład 3. Podobnie dla dowolnego wektora $h \in \mathbb{R}^n$ pochodna kierunkowa w punkcie $a \in \mathcal{O}$

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) \ni \varphi \longmapsto (\nabla_h \varphi)(a) \in \mathbb{C}$$

także jest dystrybucją (patrz warunek zbieżności ciągu ze wszystkimi pochodnymi).♣

Przykład 4. Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na $\mathcal{O}$ (tzn. f jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym zwartym zbiorze zawartym w $\mathcal{O}$) wtedy odwzorowanie

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) \ni \varphi \longmapsto \int_{\mathcal{O}} \varphi(x) f(x) \mathsf{d}^n x \in \mathbb{C}$$

jest dystrybucją. Dystrybucja odpowiadająca funkcji nazywa się dystrybucją regularną i oznacza T_f, tzn.

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} \varphi(x) f(x) \mathsf{d}^n x.$$

♣

Przykład 5. Każdy zbiór mierzalny D także zadaje dystrybucję.

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) \ni \varphi \longmapsto \int_D \varphi(x) \mathsf{d}^n x \in \mathbb{C}$$

Jest ona równa dystrybucji regularnej dla funkcji charakterystycznej zbioru D. Oznaczamy ją T_D lub T_{χ_D}. ♣

Dystrybucje są nazywane także funkcjami uogólnionymi. Nazwa ta bierze się z faktu, który zostanie sformułowany precyzyjnie i udowodniony później, a który mówi, że dystrybucje regularne są gęste w zbiorze dystrybucji. Każdą dystrybucję można więc przybliżać z dowolną dokładnością przez dystrybucje regularne. Przykład takiego przybliżenia widzieliśmy, kiedy badaliśmy na poprzednim wykładzie granicę uogólnionego ciągu funkcji f_r.

Zajmijmy się teraz działalnością bardziej praktyczną, to znaczy *operacjami na dystrybucjach.* Ponieważ przestrzeń dystrybucji jest dualna do przestrzeni funkcji próbnych to operacje liniowe na dystrybucjach możemy próbować przenieść przez dualność z operacji na funkcjach. Trzeba jednak zachować czujność (proletariacką ;) gdyż mamy do czynienia z przestrzeniami nieskończenie-wymiarowymi. Druga metoda polega na definiowaniu operacji na funkcjach (a zatem na dystrybucjach regularnych) i szukaniu odpowiedniego rozszerzenia na przestrzeń wszystkich dystrybucji. My spróbujemy stosować obie metody równolegle, traktując je jako wskazówki do formułowania definicji.

Mnożenie dystrybucji przez liczbę i dodawanie: Tu akurat nie ma problemu, gdyż dystrybucje są z definicji liniowymi funkcjonałami na przestrzeni funkcji próbnych i jako takie tworzą przestrzeń wektorową. Dla $T, U \in \mathcal{D}'(O)$ mamy

$$(\alpha T + \beta U)(\varphi) = \alpha T(\varphi) + \beta U(\varphi).$$

Działanie to jest zgodne z odpowiednim działaniem na funkcjach i odpowiadających im dystrybucjach regularnych:

$$T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g.$$

Mnożenie dystrybucji przez funkcję: Jeżeli funkcję próbną pomnożymy przez funkcję f gładką na obszarze $\mathcal{O}$ otrzymamy funkcję próbną. Mamy zatem odwzorowanie:

$$\varphi \longmapsto f\varphi$$

Dualne do niego przyporządkowuje dystrybucji T dystrybucję fT, której działanie na funkcjach próbnych dane jest wzorem

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi).$$

Jeśli g jest funkcją lokalnie całkowalną zadającą dystrybucję regularną T_g, to

$$(fT_g) = T_g(f\varphi) = \int_{\mathcal{O}} gf\varphi = T_{fg}(\varphi).$$

Działanie mnożenia dystrybucji prze funkcję zdefiniowane jako odwzorowanie dualne jest zgodne z odpowiednim działaniem na funkcjach.

Różniczkowanie dystrybucji: Tu sytuacja jest nieco inna. Odwzorowanie różniczkowania (cząstkowego) na funkcjach próbnych jest ciągłym odwzorowaniem liniowym w $\mathcal{D}(\mathcal{O})$

$$\varphi \longmapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

jednak definicja różniczkowania dystrybucji pochodzi raczej od różniczkowania funkcji. Jako model weźmy $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ i dystrybucję T_f dla funkcji różniczkowalnej. Wówczas, jeśli zechcemy aby $(T_f)' = T_{f'}$ to mamy

$$(T_f)'(\varphi) = T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi \mathsf{d}x = f\varphi|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi' \mathsf{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi' \mathsf{d}x = -T_f(\varphi')$$

Stąd definicja:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi')$$

i dla dystrybucji na funkcjach wielu zmiennych

$$\frac{\partial T}{\partial x^i}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right).$$

W stosunku do odwzorowania dualnego do różniczkowania funkcji próbnych różniczkowanie dystrybucji różni się o znak. Teraz możemy już w pełni zrozumieć napis

$$\theta' = \delta_0.$$

W naszych oznaczeniach byłoby to:

$$(T_\theta)' = \delta_0.$$

Jednak często w praktyce nie rozróżnia się w notacji między funkcją a dystrybucją regularną jej odpowiadającą.

Przesunięcie dystrybucji: W $\mathbb{R}^n$ mamy odwzorowanie przesunięcia o wektor:

$$\tau_h(x) = x + h$$

Odwzorowanie to działa też na funkcjach próbnych

$$\varphi \longmapsto \tau_h^*\varphi, \qquad \tau_h^*\varphi(x) = \varphi(\tau_h(x)) = \varphi(x+h)$$

Dualne do niego odwzorowanie na dystrybucjach ma postać

$$\tau_h T(\varphi) = T(\tau_h^*\varphi) = T(\varphi \circ \tau_h).$$

Tym razem daliśmy pierwszeństwo odwzorowaniu dualnemu do odwzorowania na funkcjach próbnych. Jeśli weźmiemy dystrybucję regularną T_f odpowiadającą funkcji f to:

$$\tau_h T_f(\varphi) = T_f(\tau_h^*\varphi) = \int_{\mathcal{O}} f(x)\varphi(x+h)\mathsf{d}^n x = \int_{\mathcal{O}} f(y-h)\varphi(y)\mathsf{d}^n y = T_{\tau^*_{(-h)}f}(\varphi).$$

Omówimy teraz przykład (istotny z punktu widzenia zastosowań teorii dystrybucji w fizyce) dotyczący różniczkowania dystrybucji.

Zadanie 1. Znaleźć dystrybucję ΔT_f dla dystrybucji regularnej określonej na przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ odpowiadającej funkcji $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. ♠

Rozwiązanie: Zauważmy przede wszystkim, że funkcja f istotnie jest lokalnie całkowalna na $\mathbb{R}^3$, zatem zadaje dystrybucję regularną na przestrzeni funkcji próbnych. Naszym zadaniem jest więc policzenie

$$(\Delta T_f)(\varphi)$$

dla dowolnej funkcji próbnej φ. Korzystamy z definicji pochodnej dystrybucji:

$$(\Delta T_f)(\varphi) = T_f(\Delta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\Delta\varphi(x,y,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$$

Z lokalnej całkowalności funkcji f wynika, że całkę w powyższym wzorze można napisać następująco

$$(\Delta T_f)(\varphi) = T_f(\Delta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\Delta\varphi(x,y,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{r\geqslant\epsilon\}} f(x,y,z)\Delta\varphi(x,y,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z.$$

Symbol $\{r \geqslant \epsilon\}$ oznacza tu zbiór tych (x,y,z) takich, że $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ spełnia $r \geqslant \epsilon$, czyli domknięcie zewnętrza kuli o promieniu ϵ. Naszym zadaniem będzie teraz „przerzucić" różniczkowanie na f (Obserwujemy, że poza $(0,0,0)$ $\Delta f = 0$). Potrzebujemy kilku faktów z zakresu geometrii różniczkowej. Stosunkowo łatwo można pokazać, że dla pola wektorowego X i funkcji f obowiązuje:

$$\mathrm{div}\,(fX) = \langle \mathsf{d}f, X\rangle + f\mathrm{div}\,(X). \tag{1}$$

Istotnie,

$$\mathrm{div}\,(fX)\Omega = \mathsf{d}((fX)\lrcorner\Omega) = \mathsf{d}(f(X\lrcorner\Omega)) = \mathsf{d}f\wedge(X\lrcorner\Omega) + f\mathsf{d}(X\lrcorner\Omega).$$

Drygi ze składników to $f\mathrm{div}\,(X)\Omega$. Pierwszy policzymy zauważając, że skoro Ω jest trójformą na $\mathbb{R}^3$, to $\mathsf{d}f\wedge\Omega = 0$ jako cztero-forma na trójwymiarowej przestrzeni. Oczywiście zwężenie zerowej formy z jakimkolwiek polem wektorowym też będzie równe zero:

$$0 = X\lrcorner\mathsf{d}f\wedge\Omega = \langle\mathsf{d}f, X\rangle\Omega - \mathsf{d}f\wedge(X\lrcorner\Omega)$$

Pierwszy ze składników (1) jest więc równy $\langle\mathsf{d}f, X\rangle\Omega$. Jeśli pole X jest gradientem funkcji φ otrzymujemy

$$\mathrm{div}\,(f\mathrm{grad}\,\varphi) = (\mathrm{grad}\,f, \mathrm{grad}\,\varphi) + f\Delta\varphi.$$

Zamieniając rolami funkcje φ i f otrzymujemy

$$\mathrm{div}\,(\varphi\mathrm{grad}\,f) = (\mathrm{grad}\,\varphi, \mathrm{grad}\,f) + \varphi\Delta f.$$

Odejmujemy powyższe wzory stronami i korzystamy z symetrii iloczynu skalarnego.

$$\mathrm{div}\,(f\mathrm{grad}\,\varphi) - \mathrm{div}\,(\varphi\mathrm{grad}\,f) = f\Delta\varphi - \varphi\Delta f.$$

Możemy teraz napisać wzór do „przerzucania” laplasjanu z funkcji φ na funkcję f:

$$f\Delta\varphi = \varphi\Delta f + \mathrm{div}\,(f\mathrm{grad}\,\varphi) - \mathrm{div}\,(\varphi\mathrm{grad}\,f).$$

Naszą całkę zapisujemy jako

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\{r\geqslant\epsilon\}} f(x,y,z)\Delta\varphi(x,y,z)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z =$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\{r\geqslant\epsilon\}}\varphi\Delta f\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z + \int_{\{r\geqslant\epsilon\}}\mathrm{div}\,(f\mathrm{grad}\,\varphi)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z - \int_{\{r\geqslant\epsilon\}}\mathrm{div}\,(\varphi\mathrm{grad}\,f)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z\right).$$

Funkcja f jest funkcją harmoniczną na $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, tzn $\Delta f = 0$ $\{r\geqslant\epsilon\}$, pierwszy składnik sumy jest więc równy zero. Pozostałe dwa składniki tłumaczymy na całkę z formy korzystając z formy objętości na $\mathbb{R}^3$, iloczynu skalarnego i kanonicznej orientacji:

$$\int_{\{r\geqslant\epsilon\}}\mathrm{div}\,(f\mathrm{grad}\,\varphi)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z = \int_{(\{r\geqslant\epsilon\},+)}\mathrm{div}\,(f\mathrm{grad}\,\varphi)\Omega$$
$$\int_{\{r\geqslant\epsilon\}}\mathrm{div}\,(\varphi\mathrm{grad}\,f)\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z = \int_{\{r\geqslant\epsilon\},+}\mathrm{div}\,(\varphi\mathrm{grad}\,f)\Omega$$

Zarówno funkcja φ jak i jej gradient mają zwarte nośniki, zatem w nieskończoności forma pod całką jest równa zero. Korzystając z twierdzenia Stokesa możemy wyrazic obie całki z trójformy po objętości przez całkę ze stosownej dwuformy po sferze o promieniu ϵ z orientacją zewnętrzną daną przez $-\frac{\partial}{\partial r}$. Orientacja ta zadaje orientację sfery inną niż zazwyczaj. Oznaczymy ją $(-)$:

$$\int_{(\{r\geqslant\epsilon\},+)}\mathrm{div}\,(f\mathrm{grad}\,\varphi)\Omega = \int_{(\{r=\epsilon\},-)} f\mathrm{grad}\,\varphi\lrcorner\Omega,$$
$$\int_{\{r\geqslant\epsilon\},+}\mathrm{div}\,(\varphi\mathrm{grad}\,f)\Omega = \int_{(\{r=\epsilon\},-)}\varphi\mathrm{grad}\,f\lrcorner\Omega.$$

W pierwszej całce formę $f\mathrm{grad}\,\varphi\lrcorner\Omega$ wyrażamy we współrzędnych na sferze pochodzących od współrzędnych sferycznych (kąt φ oznaczamy przez α, żeby uniknąć konfliktu z oznaczeniem funkcji próbnej):

$$f\mathrm{grad}\,\varphi\lrcorner\Omega = \frac{1}{\epsilon}(\mathrm{grad}\,\varphi|\frac{\partial}{\partial r})\epsilon^2\sin\vartheta\mathsf{d}\vartheta\wedge\mathsf{d}\alpha = \epsilon\,(\mathrm{grad}\,\varphi|\frac{\partial}{\partial r})\sin\vartheta\mathsf{d}\vartheta\wedge\mathsf{d}\alpha$$

Oznaczając przez $M(\epsilon)$ wartość $M(\epsilon) = |\sup_{\{r=\epsilon\}}(\mathrm{grad}\,\varphi|\frac{\partial}{\partial r})|$ szacujemy pierwszą całkę:

$$\left|\int_{(\{r=\epsilon\},-)} f\mathrm{grad}\,\varphi\lrcorner\Omega\right| = \left|\int_{(\{r=\epsilon\},-)}\epsilon\,(\mathrm{grad}\,\varphi|\frac{\partial}{\partial r})\sin\vartheta\mathsf{d}\vartheta\wedge\mathsf{d}\alpha\right| =$$
$$\left|\int_{(\{r=\epsilon\}}\epsilon\,(\mathrm{grad}\,\varphi|\frac{\partial}{\partial r})\sin\vartheta\mathsf{d}\vartheta\mathsf{d}\alpha\right| \leqslant \int_{(\{r=\epsilon\}}\epsilon\,\left|(\mathrm{grad}\,\varphi|\frac{\partial}{\partial r})\sin\vartheta\right|\mathsf{d}\vartheta\mathsf{d}\alpha \leqslant M(\epsilon)\epsilon 4\pi$$

W granicy przy ϵ dążącym do zera pierwsza całka zatem znika, gdyż $M(\epsilon)$ jest funkcją ograniczoną, podobnie jak φ. Zajmiemy się teraz drugą całką. f jest równy $-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}$ (wyrażony we współrzędnych sferycznych). Zatem

$$\varphi\mathrm{grad}\,f\lrcorner\Omega = \varphi - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\lrcorner r^2\sin\theta\mathsf{d}r\wedge\mathsf{d}\theta\wedge\mathsf{d}\alpha = -\varphi\sin\theta\mathsf{d}\theta\wedge\mathsf{d}\alpha$$

Wyniki wstawiamy do całki:

$$\int_{(\{r=\epsilon\},-)}\varphi\mathrm{grad}\,f\lrcorner\Omega = -\int_{(\{r=\epsilon\},-)}\varphi\sin\theta\mathsf{d}\theta\wedge\mathsf{d}\alpha = \int_{(\{r=\epsilon\},+)}\varphi\sin\theta\mathsf{d}\theta\wedge\mathsf{d}\alpha = \int_{\{r=\epsilon\}}\varphi\sin\theta\mathsf{d}\theta\mathsf{d}\alpha.$$

Szacujemy

$$4\pi \inf_{\{r=\epsilon\}} \varphi \leqslant \int_{\{r=\epsilon\}} \varphi \sin\theta \mathsf{d}\theta \mathsf{d}\alpha \leqslant 4\pi \sup_{\{r=\epsilon\}} \varphi$$

W granicy $\epsilon \to 0$ dostajemy więc (korzystamy z ciągłości φ)

$$\int_{\{r=\epsilon\}} \varphi \sin\theta \mathsf{d}\theta \mathsf{d}\alpha = 4\pi\varphi(0).$$

Ostatecznie więc

$$(\Delta T_f)(\varphi) = 4\pi\varphi(0)$$

Z dowolności φ wnoskujemy, że

$$\Delta T_f = 4\pi\delta_0.$$

Wspomnijmy teraz równanie Poissona wiążące potencjał pola elektrycznego z gęstością ładunku. Powyższe równanie dystrybucyjne pozwala nam uwzględnić ładunek punktowy.