# Wykład 3.

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

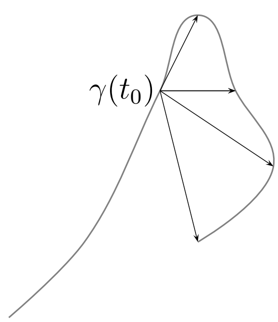
11 października 2011

W trakcie trzeciego wykładu z Matematyki 3 poznają państwo pojęcia wektora stycznego i przestrzeni stycznej. Przyjrzyjmy się na początek nad następującemu przykładowi:

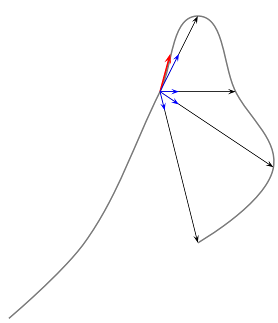
**Przykład 1.** Niech $A$ będzie trójwymiarową przestrzenią afiniczną reprezentującą przestrzeń fizyczną związaną z ustalonym obserwatorem (myślimy tutaj o mechanice nierelatywistycznej). Załóżmy, że cząstka porusza się w tej przestrzeni wzdłuż krzywej parametryzowanej czasem. Trajektoria cząstki jest więc odwzorowaniem

$$\gamma : I \to A,$$

gdzie $I$ jest otwartym odcinkiem w $\mathbb{R}$. Prędkość cząstki w chwili czasu $t_0$ badamy dzieląc wektor będący różnicą położeń w chwili czasu $t_0 + \delta t$ i $t_0$ przez różnicę czasu $\delta t$. Im mniejsze jest $\delta t$ tym dokładniej wyznaczamy prędkość w chwili czasu $t_0$. Na poniższym obrazku zaznaczono różnice położeń:




Różnice położeń są wektorami, czyli elementami przestrzeni modelowej $V$. A teraz obejrzyjmy kolejne przybliżenia prędkości (na niebiesko) i samą prędkość (na czerwono)



W ten sposób zdefiniowana (na razie nieprecyzyjnie) prędkość też jest wektorem, tzn. elementem przestrzeni modelowej. Bardziej precyzyjnie napiszemy

$$v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}(\gamma(t_0 + \delta t) - \gamma(t_0)).$$

Pamiętajmy jednak, że prędkość związana jest z konkretną chwilą czasu, a co za tym idzie z konkretnym punktem na krzywej. O wektorze $v$ myślimy jako o wektorze zaczepionym w punkcie $\gamma(t_0)$. Wektor prędkości związany z krzywą w $A$ jest typowym *wektorem stycznym* do $A$. ♣

*Wektor styczny do przestrzeni afinicznej* jest to para $(a, v)$, gdzie $a$ jest punktem przestrzeni $A$ natomiast $v$ jest wektorem z przestrzeni modelowej $V$. Zbiór wszystkich wektorów stycznych do $A$ oznaczamy $\mathsf{T}A$, natomiast zbiór wektorów stycznych zaczepionych w punkcie $a \in A$ oznaczamy $\mathsf{T}_aA$. Dla przestrzeni afinicznej mamy $\mathsf{T}A \simeq A \times V$ oraz $\mathsf{T}_aA \simeq V$. Zbiór wektorów zaczepionych w jednym punkcie jest, jak widać, przestrzenią wektorową. Nie można jednak dodawać do siebie wektorów zaczepionych w różnych punktach. Ze względu na drugi izomorfizm, tzn. $\mathsf{T}_aA \simeq V$ często będziemy myśleć o wektorze stycznym wprost jako o elemencie $V$. Przynajmniej na początku będę jednak starała odwoływać się do pary $(a, v)$, żeby podkreślać „zaczepienie" wektora stycznego w konkretnym punkcie.

Wektor styczny do przestrzeni afinicznej jest szczególnie łatwo zdefiniować, ponieważ potrafimy opisać różnicę między punktami: jest to wektor z przestrzeni modelowej. Poniżej (na niebiesko, gdyż jest to część w zasadzie nieobowiązkowa) opiszemy inny sposób definiowania wektorów stycznych, który łatwo uogólnia się na sytuacje bardziej abstrakcyjne. Jest to sposób wygodny, kiedy myślimy o wektorach stycznych do powierzchni.

W dalszym ciągu potrzebne nam będzie pojęcie odwzorowania gładkiego miedzy przestrzeniami afinicznymi. Jak dotąd posługiwaliśmy się odwzorowaniami gładkimi miedzy przestrzeniami $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$. Odwzorowanie $F : A \subset O \to B$ określone na otwartym podzbiorze przestrzeni afinicznej $A$ o wartościach w przestrzeni afinicznej $B$ jest *gładkie* jeśli jego wyrażenie w dowolnych afinicznych układach współrzędnych w $A$ i $B$ jest odwzorowaniem gładkim w dotychczasowym sensie. Nietrudno stwierdzić, że wystarczy sprawdzić gładkość dla jednej pary układów współrzędnych.

Rozważmy zbiór wszystkich gładkich krzywych w przestrzeni $A$ określonych w otoczeniu 0 w $\mathbb{R}$. W zbiorze tym wprowadźmy następującą relację równoważności: mówimy, że dwie krzywe $\gamma_1$ i $\gamma_2$ są równoważne jeśli $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ (to znaczy krzywe te mają wspólny punkt w zerze), oraz jeśli dla każdej gładkiej funkcji określonej w otoczeniu $\gamma_1(0)$ zachodzi

$$(f \circ \gamma_1)'(0) = (f \circ \gamma_2)'(0).$$

Zauważmy, że złożenie $f \circ \gamma$ jest zwykłą funkcją rzeczywistą określoną na otoczeniu 0, dobrze więc wiadomo, czym jest pochodna tej funkcji w 0. Klasę równoważności krzywej $\gamma$ chcielibyśmy nazywać wektorem stycznym w punkcie $\gamma(0)$. Żeby można było to robić musimy uzasadnić, że rzeczywiście klasy równoważności są w jednoznacznej odpowiedniości z parami $(a, v)$. Odwzorowanie w jedną stronę łatwo napisać. Parze $(a, v)$ możemy przyporządkować klasę równoważności krzywej (prostej):

$$\gamma_v : t \longmapsto a + t \cdot v.$$

Odwzorowanie powyższe injekcją, co dość łatwo sprawdzić. Przypominam, że odwzorowanie jest injekcją, jeśli równość wartości pociąga za sobą równość argumentów. Warto porównywać wartości na dwóch wektorach stycznych z jednakowym punktem zaczepienia, inaczej z całą pewnością nie będziemy mieli równości odpowiadających im klas równoważności krzywych. Weźmy dwie pary $(a, w)$ i $(a, v)$. Wprowadźmy w $A$ afiniczny układ współrzędnych związany z punktem $a$ i bazą $e$. Weźmy także bazę $\epsilon$ w przestrzeni $V^*$ dualną do $e$. Każdy element bazy dualnej wraz a punktem $a$ definiuje pewną funkcję na $A$:

$$f^i : A \ni b \longmapsto \epsilon^i(b - a).$$

Mówiąc po ludzku, wartością tej funkcji punkcie $b$ jest $i$-ta współrzędna wektora $b - a$ względem bazy $e$. Niech $w^i$ oraz $v^i$ oznaczają współrzędne $w$ i $v$ względem bazy $e$. Obliczmy $f^i \circ \gamma_w$ i

$f^i \circ \gamma_v$:

$$(f^i \circ \gamma_w)(t) = f^i(\gamma_w(t)) = \epsilon^i(\gamma_w(t) - a) = \epsilon^i(a + tw - a) = \epsilon^i(tw) = t\epsilon^i(w) = tw^i,$$

podobnie

$$(f^i \circ \gamma_v)(t) = tv^i.$$

Pochodne tych złożeń względem $t$ w punkcie 0 są równe odpowiednio $w^i$ i $v^i$. Jeśli $\gamma_w$ i $\gamma_v$ są równoważne, to pochodne złożeń są jednakowe, a to oznacza

$$w^i = v^i \qquad \text{dla wszystkich} \;\; i,$$

czyli $w = v$, a co za tym idzie $(a, w) = (a, v)$ $\square$.

Możemy także każdej klasie równoważności krzywych przyporządkować parę $(a, v)$. Niech $\gamma$ będzie dowolnym reprezentantem klasy równoważności. Kładziemy $a = \gamma(0)$ i

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\gamma(0) - \gamma(t)).$$

Musimy przede wszystkim przekonać, się, że definicja pary $(a, v)$ nie zależy od tego, którego reprezentanta klasy równoważności wybierzemy. Dalej powinniśmy pokazać, że jeśli dwie krzywe mają tę samą prędkość w punkcie 0 to są równoważne. Tę część dowodu pominiemy.

Istnieje jeszcze trzecia reprezentacja wektora stycznego: Każdy wektor styczny definiuje operację różniczkowania w zbiorze funkcji gładkich na przestrzeni afinicznej $A$. *Różniczkowanie* jest to takie słowo, które może oznaczać proces obliczania pochodnej, ale może też mieć nieco inne znaczenie. W tym drugim znaczeniu *różniczkowanie* jest odwzorowaniem z algebry funkcji gładkich do $\mathbb{R}$ spełniające regułę Leibniza. Symbolicznie zapisalibyśmy, że

$$D : \mathcal{C}^\infty(A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

jest różniczkowaniem jeśli dla dowolnych dwóch funkcji gładkich zachodzi wzór

$$D(fg) = D(f)g + fD(g).$$

Oczywiście różniczkowaniem jest obliczanie pochodnej funkcji jednej zmiennej w ustalonym punkcie. W kontekście funkcji wielu zmiennych różniczkowaniem jest obliczanie pochodnej kierunkowej funkcji w ustalonym punkcie i w kierunku ustalonego wektora. W wersji dostosowanej do środowiska afinicznego pochodna kierunkowa jest to właśnie różniczkowanie zadane przez wektor styczny:

$$f \longmapsto \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(a + tv)_{|t=0}.$$

Sprawdzenie, że powyższe odwzorowanie spełnia regułę Leibniza jest trywialne. Zauważmy, że pochodna kierunkowa jest to pochodna obliczana wzdłuż krzywej $t \mapsto a + tv$, lub każdej inne równoważnej do niej. (Z samej definicji równoważności krzywych wynika, że krzywe równoważne dają to samo różniczkowanie, a więc ten sam wektor styczny.) Nie będziemy tutaj zajmować się szczegółowym dowodzeniem, że te trzy definicje są równoważne. Wymaga to trochę pracy, a nam w tym momencie nie przyniesie zbyt dużych korzyści. Zapiszmy tylko ten fakt w postaci twierdzenia w wersji dla przestrzeni afinicznych:

**Fakt 1.** *Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między parami $(a, v)$ i klasami równoważności krzywych oraz między parami $(a, v)$ i różniczkowaniami w algebrze funkcji gładkich na $A$.*

Powyższy fakt oznacza, że wolno nam korzystać z takiej reprezentacji wektora stycznego jaka nam w danym momencie najbardziej odpowiada. Mamy trzy możliwości: wektor styczny możemy traktować jako parę $(a, v)$, czyli element $A \times V$, możemy myśleć o nim jako o klasie równoważności krzywch, możemy także pamiętać, że wektor styczny zadaje różniczkowanie algebry funkcji gładkich na $A$.

Przejdźmy teraz do kwestii sposobu zapisywania wektorów stycznych za pomocą współrzędnych. Zaczniemy od wektorów stycznych zapisanych za pomocą współrzędnych afinicznych, a potem przejdziemy do wektorów stycznych zapisanych za pomocą współrzędnych krzywoliniowych.

# Wykład 4.

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012
14 października 2011

**Wektor styczny we współrzędnych afinicznych.** Korzystanie ze współrzędnych afinicznych jest stosunkowo proste. Przypomnijmy, że współrzędne afiniczne zadane są poprzez wybranie punktu $a \in A$ i bazy $e$ in $V$. Ponieważ mamy teraz do dyspozycji pojęcie bazy dualnej (oznaczmy ją, jak zwykle, $\epsilon$), możemy bardzo łatwo wypisać współrzędne punktu $b$ względem układu współrzędnych $\Phi = (a, e)$:

$$b = (\epsilon^1(b-a), \epsilon^2(b-a), \ldots, \epsilon^n(b-a))^\Phi.$$

Bazę w przestrzeni stycznej $\mathsf{T}_b A$ wprowadzimy w następujący sposób. Przez punkt $b$ przechodzą szczególne krzywe $\gamma^i$ związane z układem współrzędnych. Krzywa $\gamma^1$ ma (we współrzędnych) postać:

$$\gamma^1(t) = (\epsilon^1(b-a) + t, \epsilon^2(b-a), \ldots, \epsilon^n(b-a))^\Phi,$$

krzywa $\gamma^2$ to

$$\gamma^2(t) = (\epsilon^1(b-a), \epsilon^2(b-a) + t, \ldots, \epsilon^n(b-a))^\Phi$$

i podobnie krzywa $\gamma^i$

$$\gamma^i(t) = (\epsilon^1(b-a), \epsilon^2(b-a), \ldots, \epsilon^i(b-a) + t, \ldots, \epsilon^n(b-a))^\Phi.$$

Prędkości tych krzywych w punkcie $b$, czyli dla $t = 0$ tworzą bazę $\mathsf{T}_b A$. Nietrudno zauważyć, że $\gamma^i(t) = b + te^i$, zatem baza $\mathsf{T}_b A$ składa się wektorów $(b, e^i)$. Baza w każdym punkcie jest więc identyczna - pochodzi ona od bazy $e$ w $V$. Wektor styczny $(b, v)$ ma współrzędne

$$(\epsilon^1(b-a), \epsilon^2(b-a), \ldots, \epsilon^n(b-a))^\Phi$$

dla punktu zaczepienia i

$$\begin{bmatrix} \epsilon^1(v) \\ \epsilon^2(v) \\ \vdots \\ \epsilon^n(v) \end{bmatrix}$$

dla części wektorowej.

Spróbujmy rozwiązać następujące zadanie:

**Zadanie 1.** Niech $A = \mathbb{R}^2$. Cząstka porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Okres obiegu jest równy dwie jednostki czasu. Znaleźć współrzędne prędkości ruchu cząstki w chwili, gdy przechodzi ona przez punkt $(0,0)$ względem kanonicznego układu współrzędnych (tzn. związanego z punktem $O = (0,0)$ i kanoniczną bazą w $\mathbb{R}^2$) oraz wględem układu współrzędnych $\Phi = (P = (3,4), (f^1, f^1))$. Bazę $(f^1, f^2)$ otrzymujemy obracając bazę kanoniczną $(e_1, e_2)$ o $\pi/4$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. ♠

**Rozwiązanie:** pierwsza część zadania jest mało kłopotliwa. Skonstruujmy parametryczny opis krzywej $\gamma$ po ktorej porusza się cząstka. Okrąg ma środek w punkcie $(3,4)$ i promień 5, zatem

$$\gamma(t) = (3 + 5\cos(\pi t), 4 + 5\sin(t\pi)).$$

Argument funkcji trygonometrycznych $t\pi$ związany jest z okresem obiegu cząstki. Chwila czasu $t_0$ w której cząstka mija punkt $(0,0)$ zadana jest warunkami:

$$3 + 5\cos(t_0\pi) = 0, \qquad 4 + 5\sin(t_0\pi),$$

czyli

$$\cos(t_0\pi) = -\frac{3}{5}, \qquad \sin(t_0\pi) = -\frac{4}{5}.$$

Dokładna wartość $t_0$ nie jest nam potrzebna. Prędkość związana z ruchem z trajektorią $\gamma$ w punkcie $(0,0)$ ma w bazie kanonicznej współrzędne

$$[v]^e = \begin{bmatrix} -5\pi\sin(t_0\pi) \\ 5\pi\cos(t_0\pi) \end{bmatrix}.$$

Korzystając z wyznaczonych wcześniej wartości sinusa i cosinusa dostajemy

$$[v]^e = \begin{bmatrix} -5\pi\left(-\frac{4}{5}\right) \\ 5\pi\left(-\frac{3}{5}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\pi \\ -3\pi \end{bmatrix}.$$

Wektory $f_1$ i $f_2$ możemy zapisać przy pomocy wektorów z bazy kanonicznej jako

$$f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2, \qquad f_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2$$

Macierz przejścia $[id]^f{}_e$ otrzymamy odwracając macierz przejścia $[id]^e{}_f$, którą łatwo odczytać ze wzorów określających wektory $f_i$:

$$[id]^e{}_f = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

zatem

$$[id]^f{}_e = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Obliczamy $[v]^f$ :

$$[v]^f = [id]^f{}_e[v]^e = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\pi \\ -3\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \\ -\frac{7\sqrt{2}}{2}\pi \end{bmatrix}.$$

Pozostaje jeszcze znaleźć współrzędne punktu $O$ względem układu współrzędnych $\Phi$. Ze środka $P$ układu współrzędnych $\Phi$ do punktu $O$ dostajemy się za pomocą wektora $O-P$, który w bazie kanonicznej ma współrzędne

$$\left[\begin{array}{c} -3 \\ -4 \end{array}\right].$$

Ten sam wektor w bazie $f$ będzie miał współrzędne

$$[O-P]^f = [id]^f{}_e[O-P]^e = \left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} -3 \\ -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\frac{7\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right].$$

Podsumujmy nasze ustalenia: prędkość cząstki poruszającej się po danym okręgu z okresem obiegu 2 w chwili, kiedy cząstka przechodzi przez punkt $O$ jest wektorem stycznym zaczepionym w $O$ o współrzędnych

$$\left[\begin{array}{c} 4\pi \\ -3\pi \end{array}\right] \quad \text{względem bazy kanonicznej.}$$

Ten sam wektor we współrzędnych w układzie $\Phi$ jest wektorem zaczepionym w punkcie $O = (-\frac{7\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})^\Phi$ i mającym współrzędne

$$\left[\begin{array}{c} -\frac{7\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right] \quad \text{w bazie } f.$$

Z interpretacją wektora stycznego jako różniczkowania wiążą się szczególne oznaczenia używane w mechanice i geometrii różniczkowej. Ustalmy pewien układ współrzędnych $\Phi = (a, e)$. Współrzędne związane z tym układem będziemy oznaczać $(x^i)$. Oznacza to, że punkt o współrzędnych $(x^1, x^2, \ldots, x^n)^\Phi$ to punkt

$$a + x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^n e_n.$$

Bazowe wektory styczne w ustalonym (dowolnym) punkcie $b \in A$ pochodzące od krzywych $\gamma^i = b + te^i$ oznacza się często

$$\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Oznaczenie to związane jest z faktem, że wektor $(b, e_i)$ styczny do krzywej $\gamma^i$ działa na funkcję $f$ jak różniczkowanie cząstkowe po zmiennej $x^i$, jeśli funkcję tę wyrazimy we współrzędnych. Innymi słowy

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(f \circ \gamma^i)(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_b^1, x_b^2, \ldots, x_b^n)$$

jeśli $(x_b^1, x_b^2, \ldots, x_b^n)$ to współrzędne punktu $b$ w układzie $\Phi$. Jeśli układ wpółrzędnych jest afiniczny to wektor

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{zaczepiony w punkie } b \text{ to } (b, e_i).$$

Trochę inaczej sytuacja wygląda ze współrzędnymi krzywoliniowymi.

**Wektor styczny we współrzędnych krzywoliniowych.** W przestrzeni afinicznej tak samo jak w $\mathbb{R}^n$ możemy wprowadzać współrzędne krzywoliniowe. Zazwyczaj robimy to na raty: najpierw wprowadzamy współrzędne afiniczne utożsamiając naszą przestrzeń afiniczną z $\mathbb{R}^n$ a potem definiujemy współrzędne krzywoliniowe w znany sposób w $\mathbb{R}^n$, podając odpowiednie odwzorowanie. Popracujemy jak zwykle ze współrzędnymi biegunowymi. Załóżmy na chwilę, że przestrzeń afiniczna w której pracujemy jest dwuwymiarowa, a jej modelowa przestrzeń jest wyposażona w iloczyn skalarny. Możemy więc mierzyć długości wektorów i liczyć kąty miedzy wektorami. Wybierzmy w $V$ bazę ortonormalną $e = (e_1, e_2)$, wybierzmy także punkt $a$. Współrzędne związane z układem $\Phi = (a, e)$ oznaczymy $(x, y)$. Wprowadzamy teraz w $A$ współrzędne krzywoliniowe $(r, \varphi)$ znanymi wzorami

$$x = r \cos\varphi \qquad y = r \sin\varphi.$$

Podobnie jak w przypadku współrzędnych afinicznych możemy rozważać krzywe związane z krzywoliniowym układem współrzędnych. W otoczeniu punktu $b = (r_0, \varphi_0)$ będą to krzywe

$$\gamma_r(t) = ((r_0 + t)\cos\varphi_0, (r_0 + t)\sin\varphi_0)^\Phi, \qquad \gamma_\varphi(t) = (r_0\cos(\varphi_0 + t), r_0\sin(\varphi_0 + t))^\Phi$$

Prędkości tych krzywych w punkcie $b$ tworzą bazę przestrzeni stycznej. Prędkości te możemy zapisać korzystając z bazy $e$. Wektor $(b, u_\varphi)$ styczny do krzywej $\gamma_\varphi$ to wektor dla którego

$$u_\varphi = -r_0 \sin\varphi_0 e_1 + r_0 \cos\varphi_0 e_2,$$

zaś wektor $(b, u_r)$ styczny do krzywej $\gamma_r$ to wektor dla którego

$$u_r = r\cos\varphi_0 e_1 + \sin\varphi_0 e_2.$$

Wektory bazowe w przestrzeni stycznej związane z biegunowym układem współrzędnych zależą od punktu przestrzeni $A$ w którym są zaczepione: współrzędne tego punktu pojawiają się we wzorach. Wektory $(b, u_\varphi)$ oznacza się także

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \text{podobnie} \quad (b, u_r) = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Oznaczenia związane z interpretacją wektora jako różniczkowania są jednakowe dla wektorów stycznych w różnych punktach, jednak należy pamiętać, że jako elementy $V$ wektory te zależą one od punktu. Zmienia się nie tylko ich kierunek, ale także długość. Łatwo policzyć, że długość wektora $u_\varphi$ jest równa $r_0$. Baza złożona z wektorów $(b, u_r)$ i $(b, u_\varphi)$ jest otrogonalna, ale nie jest otronormalna. Używa się także bazy ortonormalnej $((b, e_r), (b, e_\varphi))$ związanej z układem współrzędnych. Mamy $e_r = u_r = \frac{\partial}{\partial r}$ i $e_\varphi = \frac{1}{r_0}u_\varphi = \frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

**Zadanie 2.** Zdefiniujmy krzywą $\gamma$ podając zależność od czasu współrzędnych biegunowych, tzn

$$\gamma(t) = (r(t), \varphi(t)).$$

Wyrazić długość prędkości krzywej w chwili czasu $t_0$ poprzez wartości funkcji $r(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ i ich pochodnych w punkcie $t_0$.♠

W przestrzeni afinicznej możemy także rozważać wektor przyspieszenia. Ze względu na to, że wszystkie przestrzenie styczne są kanonicznie izomorficzne, możemy porównywać ze sobą prędkości w różnych punktach. We współrzędnych afinicznych współrzędne wektora przyspieszenia uzyskamy różniczkując raz współrzędne wektora prędkości wyrażone w zależności od czasu. We współrzędnych krzywoliniowych tak nie jest, bo musimy uwzględnić także zmianę wektorów bazowych względem których wyznaczane są współrzędne w różnych punktach krzywej. Do rozwiązania mamy zadanie:

**Zadanie 3.** Znaleźć współrzędne wektora przyspieszenia cząstki poruszającej się wzdłuż krzywej

$$\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$$

zapisanej we współrzędnych biegunowych względem ortonormalnej bazy w przestrzeni stycznej związanej z biegunowym układem współrzędnych. Współrzędne wektora przyspieszenia powinny wyrażać się poprzez wartości funkcji, pierwszych pochodnych i drugich pochodnych tych funkcji. ♠