Wykład 5. i 6.

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

18, 21 października 2011

W czasie drugiego wykładu w tym semestrze poznaliśmy pojęcie przestrzeni dualnej do przestrzeni wektorowej. Przypominamy, że jeśli V jest przestrzenią wektorową to przestrzeń do niej dualna V^* jest przestrzenią funkcji liniowych na V o wartościach rzeczywistych. Przestrzeń $\mathsf{T}_a A$ wektorów stycznych zaczepionych w jednym punkcie jest przestrzenią wektorową. Można wiec rozważać przestrzeń do niej dualną. Przestrzeń tę oznaczamy $\mathsf{T}^*_a A$. Oto naturalny przykład kowektora stycznego: Jeśli f jest funkcją różniczkowalną określoną w otoczeniu punktu a, to odwzorowanie

$$\mathsf{T}_a A \ni (a, v) \longmapsto \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(a + tv)_{|t=0} \in \mathbb{R} \tag{1}$$

jest odwzorowaniem liniowym na wektorach stycznych, tzn. elementem T^*A. Liniowość względem wektorów stycznych wynika z założenia różniczkowalności. Jeśli w otoczeniu punktu a wprowadzimy afiniczny układ współrzędnych i zapiszemy funkcję f w tych współrzędnych otrzymamy funkcję $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto f(x^1, \ldots x^n)$ różniczkowalną w sensie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ a wzór (1) przyjmie postać

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f(x^1(a) + tv^1, \ldots, x^n(a) + tv^a)_{|t=0} = [\frac{\partial f}{\partial x^1}(a) \ldots \frac{\partial f}{\partial x^n}(a)] \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Odwzorowanie zdefiniowane w (1) wyrażone we współrzędnych jest pochodną funkcji, a jego wartość wartość na konkretnym wektorze stycznym odpowiada pochodnej kierunkowej. Odwzorowanie to nazywamy *różniczką funkcji f w punkcie $a \in A$* i oznaczamy zazwyczaj $\mathsf{d}f(a)$. Różniczka funkcji odpowiada pojęciu pochodnej funkcji w punkcie, którą omawialiśmy w kontekście przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Działanie różniczki funkcji na wektor styczny oznaczamy zazwyczaj

$$\langle \mathsf{d}f(a), (a, v) \rangle.$$

Zauważmy także, że w definicji działania różniczki na wektorze stycznym można zastąpić krzywą $t \mapsto a + tv$ dowolną krzywą równoważną z nią, tzn definiującą ten sam wektor styczny. Wkrótce okaże się, że każdy kowektor zaczepiony w punkcie a jest różniczką pewnej (a nawet wielu) funkcji w tym punkcie. Jeśli w przestrzeni A wprowadzimy układ współrzędnych $(x^1, \ldots, x^n)$ możemy skonstruować wygodną bazę w przestrzeni kostycznej. Poszczególne współrzędne traktować można jak funkcje określone na otoczeniu punktu a. Ograniczam się jedynie do otoczenia, ponieważ niektórych krzywoliniowych układów współrzędnych nie da się wprowadzić na całej przestrzeni afinicznej, ponadto konstrukcja różniczki funkcji w punkcie jest lokalna, tzn. zależy od wartości tej funkcji w samym punkcie a i w jego otoczeniu, a nie na całej przestrzeni. Funkcja współrzędnościowa, np x^i przypisuje taka punktowi b należącemu do otoczenia a wartość i-tej współrzędnej tego punktu względem wybranego układu współrzędnych.

Fakt 1. *Różniczki $\mathsf{d}x^i(a)$ funkcji współrzędnościowych tworzą bazę przestrzeni kostycznej.*

Dowód: Aby pokazać, że kowektory $(\mathsf{d}x^1(a), \ldots, \mathsf{d}x^n(a))$ tworzą bazę przestrzeni T^*A wystarczy pokazać, że są one liniowo niezależne. Wymiar przestrzeni kostycznej jest oczywiście równy wymiarowi przestrzeni stycznej, w tym przypadku n. Mamy więc wystarczającą liczbę kowektorów, aby utworzyć bazę. Sprawdzanie liniowej niezależności polega na badaniu, kiedy kombinacja liniowa kowektorów jest równa zero.

$$\lambda_1 \mathsf{d}x^1 + \lambda_2 \mathsf{d}x^2 + \cdots + \lambda_n \mathsf{d}x^n = 0$$

Kowektor jest równy zero jeśli obliczony na dowolnym wektorze jest równy zero. Powyższą kombinację liniową obliczymy więc na wektorach stycznych związanych z wybranym układem współrzędnych:

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 \mathsf{d}x^1 + \lambda_2 \mathsf{d}x^2 + \cdots + \lambda_n \mathsf{d}x^n, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle &= \\ \langle \lambda_1 \mathsf{d}x^1, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle + \langle \lambda_2 \mathsf{d}x^2, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle + \cdots + \langle \lambda_n \mathsf{d}x^n, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle &= \\ \lambda_1 \langle \mathsf{d}x^1, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle + \lambda_2 \langle \mathsf{d}x^2, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle + \cdots + \lambda_n \langle \mathsf{d}x^n, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\end{aligned}$$

Obliczenie powyższej ewaluacji wymaga wyznaczenia

$$\langle \mathsf{d}x^j, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle$$

dla $i = j$ oraz $i \neq j$. Wektor styczny $\frac{\partial}{\partial x^i}$ jest definiowany przez krzywą, która we współrzędnych zapisuje się jako

$$\gamma^i : t \longmapsto (x^1(a), x^2(a), \ldots, x^{i-1}(a), x^i(a) + t, x^{i-1}(a), x^{i+1}(a), \ldots, x^n(a))$$

Złożenie tej krzywej z funkcjami współrzędnościowymi ma postać (dla $i = j$):

$$x^i \circ \gamma^i(t) = x^i(a) + t$$

oraz (dla $i \neq j$)

$$x^j \circ \gamma^i(t) = x^j(a).$$

W pierwszym przypadku pochodna złożenia po t jest równa 1, natomiast w drugim 0, gdyż funkcja jest stała. Otrzymujemy więc

$$\langle \mathsf{d}x^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle = 1 \qquad \text{i} \qquad \langle \mathsf{d}x^j, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle = 0$$

Okazuje się więc, że

$$\langle \lambda_1 \mathsf{d}x^1 + \lambda_2 \mathsf{d}x^2 + \cdots + \lambda_n \mathsf{d}x^n, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle = \lambda_i$$

Zatem warunek

$$\langle \lambda_1 \mathsf{d}x^1 + \lambda_2 \mathsf{d}x^2 + \cdots + \lambda_n \mathsf{d}x^n, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle = 0$$

oznacza

$$\lambda_i = 0.$$

Ponieważ ewaluacja kombinacji liniowej różniczek wsopółrzędnych na wszystkich wektorach bazowych $(\frac{\partial}{\partial x^j})_{j=1}^n$ z przestrzeni stycznej ma być zero otrzymujemy $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Różniczki funkcji współrzędnościowych są liniowo niezależne, tworzą więc bazę przestrzeni kostycznej. Przy okazji stwierdziliśmy także, że jest to baza dualna do bazy

$$(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}).$$

Dowolny kowektor, czyli element $\mathsf{T}^*_a A$, można zapisać jako kombinację liniową wektorów bazowych, czyli

$$\alpha = \alpha_1 \mathsf{d}x^1 + \alpha_2 \mathsf{d}x^2 + \cdots + \alpha_n \mathsf{d}x^n. \tag{3}$$

W szczególności różniczka $\mathsf{d}f(a)$ we współrzędnych to

$$\mathsf{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^i(a))\mathsf{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x^i(a))\mathsf{d}x^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^i(a))\mathsf{d}x^2.$$

Dla każdego kowektora można także znaleźć funkcję, której jest on różniczką, na przykład dla kowektora (3) dobrą funkcją (zapisaną we współrzędnych) jest

$$f_\alpha(x^1, \ldots, x^n) = \alpha_1 x^1 + \alpha^1 x_2 + \cdots + \alpha_n x^n.$$

W bardziej abstrakcyjnych niż afiniczna przestrzeniach kowektory definiować można po prostu jako klasy równoważności funkcji, podobnie jak wektory jako klasy równoważności krzywych. Relację równoważności należy wprowadzić w zbiorze par punkt i funkcja. Mówimy, że (a_1, f_1) jest równoważna (a_2, f_2) jeśli $a_1 = a_2$ oraz dla każdej krzywej γ takiej, że $\gamma(0) = a_1$ zachodzi

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f_1 \circ \gamma(0) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} f_2 \circ \gamma(0).$$

Struktura przestrzeni wektorowej w zbiorze klas równoważności "dziedziczona jest" ze struktury wektorowej zbioru funkcji.

Kowektory w afinicznym układzie współrzędnych. Afiniczny układ wspólrzędnych jest szczególnie prosty. W przestrzeni stycznej mamy wówczas bazę taką samą w każdym punkcie i pochodzącą od bazy w V. Podobnie jest z przestrzenią kostyczną. Jeśli układ współrzędnych pochodzi od bazy e, wówczas różniczki współrzędnych odpowiadają w sposób naturalny kowektorom będącym elementami bazy dualnej $(\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$. Symbolicznie można zapisać to równością

$$\mathsf{d}x^i(a) = (e, \epsilon^i).$$

Kowektory w krzywoliniowym układzie współrzędnych. W krzywoliniowym układzie współrzędnych baza przestrzeni kostycznej jest w każdym punkcie inna. Używamy różniczek współrzędnych. Przykład obejrzymy rozwiązując następujące zadanie:

Zadanie 1. Wyrazić bazę $(\mathsf{d}r, \mathsf{d}\varphi)$ przestrzeni kostycznej związaną z biegunowym układem współrzędnych w $\mathbb{R}^2$ poprzez kowektory $(\mathsf{d}x, \mathsf{d}y)$ związane z kartezjańskim układem współrzędnych. ♠

Odwzorowanie styczne. Przyjrzyjmy się teraz jak zachowują się wektory i kowektory styczne względem odwzorowania. Załóżmy, że dane są dwie przestrzenie afiniczne (A, V) i (B, W). Załóżmy także, że $F : A \to B$ jest odwzorowaniem gładkim. Odwzorowanie f definiuje pewne odwzorowanie na przestrzeni stycznej do A w punkcie a o wartościach w przestrzeni stycznej do B w punkcie $F(a)$. Niech (a, v) będzie elementem $\mathsf{T}_a A$. Oznaczmy przez γ dowolną krzywą do której ten wektor jest styczny. Oznacza to między innymi, że $\gamma(0) = a$. Mozna wziąć $\gamma(t) = a+tv$, ale można także dowolną inną równoważną krzywą. Złożenie γ z F jest krzywą w B:

$$f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)) \in B.$$

Odwzorowaniem stycznym do F w punkcie a nazywamy odwzorowanie $\mathsf{T}_a f$, które wektorowi stycznemu do krzywej γ przyporządkowuje wektor styczny do krzywej $F \circ \gamma$ w $t = 0$. Odwzorowanie to jest liniowe. Pojęcie odwzorowania stycznego jest związane z pojęciem pochodnej odwzorowania w kontekście przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Istotnie, jeśli w przestrzeni A wprowadzimy pewien układ współrzędnych (x^i) (może być afiniczny, ale może być też krzywoliniowy) a w przestrzeni B układ (y^μ), to odwzorowanie f będzie postaci

$$y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n), \; \ldots \;, y^m = f^m(x^1, \ldots, x^n).$$

Weźmy krzywą $\gamma(t) = a + tv$ reprezentującą wektory styczne (a, v) dla $v = v^1 e_1 + \cdots + v^n e_n$

$$F(\gamma^i(t)) = (f^1(x^1(a) + tv^1, \ldots, x^i(a) + tv^i, \ldots, x^n(a) + tv^n), \ldots,$$
$$f^m(x^1(a) + tv^1, \ldots, x^i(a) + tv^i, \ldots, x^n(a) + tv^n)$$

Współrzędne wektora stycznego do krzywej $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ w $t = 0$ obliczamy różniczkując współrzędne punktu $f(\gamma^i(t))$ w $t = 0$. Otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x^i(a))v^1 + \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x^i(a))v^2 + \cdots + \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x^i(a))v^n \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x^i(a))v^1 + \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x^i(a))v^2 + \cdots + \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x^i(a))v^n \\ \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x^i(a))v^1 + \frac{\partial f^m}{\partial x^2}(x^i(a))v^2 + \cdots + \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x^i(a))v^n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x^i(a)) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x^i(a)) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x^i(a)) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x^i(a)) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x^i(a)) & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x^i(a)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x^i(a)) & \frac{\partial f^m}{\partial x^2}(x^i(a)) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x^i(a)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}.$$

Macierz odwzorowania stycznego $\mathsf{T}_a f$ w ustalonym punkcie w bazach związanych z układem współrzędnych jest więc istotnie macierzą pochodnej odwzorowania f wyrażonego we współrzędnych i traktowanego jako odwzorowanie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Żeby omówić sposób zachowania kowektorów względem odwzorowania między przestrzeniami afinicznymi musimy sięgnąć do algebry i wprowadzić pojęcie odwzorowania sprzężonego do odwzorowania liniowego. Niech więc V będzie przestrzenią wektorową wymiatu n a W przestrzenią wektorową wymiaru m. Niech także F oznacza odwzorowanie liniowe między tymi przestrzeniami. *Odwzorowaniem sprzężonym do* F nazywamy odwzorowanie liniowe

$$F^* : W^* \longrightarrow V^*$$

dane wzorem

$$\langle \alpha, F(v) \rangle = \langle F^*(\alpha), v \rangle,$$

dla $\alpha \in W^*$ i $v \in V$. W innej notacji napisalibyśmy

$$(F^*\alpha)(v) = \alpha(F(v)).$$

Sprawdźmy jak będzie wyglądała macierz odwzorowania sprzężonego, jeśli znana jest macierz odwzorowania F. Ustalmy więc bazy e w przestrzeni V i f w przestrzeni W oraz oznaczmy przez ϵ i ϕ odpowiednie bazy dualne. Działanie odwzorowania F w bazach f i e zapisujemy:

$$[F(v)]^f = [F]^f_e [v]^e$$

inaczej

$$F(v)^j = F^j{}_i v^i$$

Podobnie chcielibyśmy zapisać działanie odwzorowania sprzężonego

$$[F^*(\alpha)]^\epsilon = [F^*]^\epsilon{}_\phi [\alpha]^\phi$$

inaczej

$$F^*(\alpha)^i = (F^*)^i{}_j \alpha^j$$

Kolumny macierzy $[F^*]^\epsilon{}_\phi$ to kowektory $F^*(\phi^j)$ zapisane w bazie ϵ. Oznacza to, że wyraz położony w i-tym wierszu i j-tej kolumnie jest współrzędną przy ϵ^i kowektora $F^*(\phi^j)$ Współrzędną przy ϵ^i wyznaczymy obliczając $F^*(\phi^j)$ na e_i:

$$(F^*)^i{}_j = \langle F^*(\phi^j), e_i \rangle = \langle \phi^j, F(e_i) \rangle = F^j{}_i$$

Okazuje się więc, że macierze F i F^* w bazach odpowiednio parami dualnych są wzajemnie transponowane. Przy okazji zauważmy także, że Jeśli F jest odwzorowaniem z V do W a G z W do Y to

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*.$$

Istotnie

$$\langle (G \circ F)^*(\alpha), v \rangle = \langle \alpha, G \circ F(v) \rangle = \langle G^*(\alpha), F(v) \rangle = \langle F^*(G^*(\alpha)), v \rangle = \langle F^* \circ G^*(\alpha), v \rangle.$$

Łatwo także przekonać się, że odwzorowaniem sprzężonym do identyczności na V jest identyczność na V^*.

Uwaga: Warto zwrócić uwagę na fakt, że kowektor $\alpha \in V^*$ możemy zapisać w bazie na dwa sposoby: Możemy potraktować go jako odwzorowanie $V \to \mathbb{R}$ i zapisać jako macierz odwzorowania. Wtedy macierz ta będzie macierzą jednowierszową

$$[\alpha]_e = [\alpha(e_1) \;\; \alpha(e_2) \;\; \ldots \;\; \alpha(e_n)]$$

albo możemy myśleć o α jako o wektorze w przstrzeni wektorowej V^* i zapisać go w bazie ϵ jako wektor kolumnowy:

$$[\alpha]^\epsilon = \begin{bmatrix} \alpha(e_1) \\ \alpha(e_2) \\ \vdots \\ \alpha(e_n) \end{bmatrix}.$$

Macierz odwzorowania F^* jest transponowaną macierzą odwzorowania F jeśli myślimy o reprezentacji kowektorów w bazie na drugi ze sposobów.

Jeśli jako odwzorowanie liniowe, które sprzęgamy weźmiemy odwzorowanie styczne do odwzorowania $f : A \to B$, otrzymamy odwzorowanie sprzężone wiążące przestrzeni kostyczne:

$$\mathsf{T}_a f : \mathsf{T}_a A \longrightarrow \mathsf{T}_{f(a)} B, \qquad (\mathsf{T}_a f)^* : \mathsf{T}^*_{f(a)} B \longrightarrow \mathsf{T}^*_a A$$

W kontekście geometrii różniczkowej używa się rakże innych oznaczeń na odwzorowanie styczne i sprzężone do niego. Zamiast $\mathsf{T}f$ piszemy także f_* a zamiast $(\mathsf{T}f)^*$ piszemy f^*.

Odwzorowania styczne i sprzężone do niego mogą służyć także do zmiany reprezentacji wektora w różnych układach współrzędnych. Możemy bowiem zapisać identyczność w dwóch różnych układach współrzędnych i użyć odpowiedniego odwzorowania stycznego do zmiany współrzędnych wektora stycznego i odpowiedniego odwzorowania sprzężonego do zmiany współrzędnych w kowektorach. Jest to bardzo dobry materiał na cwiczenia. W kontekście przestrzeni dualnych i odwzorowań sprzężonych można także rozwiązać zadania algebraiczne:

Zadanie 2. Niech $V = R^3$. Sprawdzić, że formy liniowe ϕ^i

$$\phi^k(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}) = x^1 + x^2 + x^2 - 2kx^k,$$

dla $k = 1, 2, 3$ tworzą bazę przestrzeni V^*. Znaleźć macierz odwzorowania F^* w tej bazie jeśli

$$F(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^1 \end{bmatrix}.$$

♠