Wykład 8.

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012
28 października 2011

k-kowektory na przestrzeni wektorowej. Niech V będzie przestrzenią wektorową wymiaru n. *k-kowektorem* na przestrzeni V nazywamy ozdwzorowanie

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

liniowe ze względu na każdy argument, tzn. dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, dowolnych wektorów $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $(v_1', v_2', \ldots, v_k')$, dowolnych liczb λ, μ

$$\alpha(v_1, v_2, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i', \ldots, v_k) = \lambda\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \mu(v_1, v_2, \ldots, v_i', \ldots, v_k),$$

oraz antysymetryczne, tzn

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}\sigma\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

odwzorowania tego rodzaju pojawiły się już w zeszłym semestrze przy okazji wprowadzania pojęcia wyznacznika macierzy. Jeśli kolumny macierzy potraktujemy jak elementy $\mathbb{R}^n$ wyznacznik jest n-kowektorem ne $\mathbb{R}^n$. Zbiór wszystkich odwzorowań k-liniowych jest przestrzenią wektorową, z zbiór k-kowektorów jest w niej podprzestrzenią wektorową. Podprzestrzeń tę oznaczamy

$$\bigwedge^k V^*$$

Sensowność tego oznaczenia będzie jasna później. Przypomnijmy sobie własności k-kowektorów. W poniższych wypowiedzach α jest k-kowektorem:

- Jeśli wśród argumentów α którykolwiek z wektorów powtarza się, wartość α na tym układzie wektorów jest równa zero. Wynika z tego, że
- jeśli $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jest układem liniowo-zależnym to $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$.
- Jak każde odwzorowanie liniowe α jest jednoznacznie określone na wektorach bazowych. Jeśli $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ jest bazą w V to liczby

  $$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}), \qquad 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n+1$$

  wyznaczają jednoznacznie odwzorowanie α. Wynika z tego, że
- $\dim \bigwedge^k V^* = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Skoro znamy już wymiar przestrzeni k-kowektorów, przydałby nam się także jakaś wygodna baza. Jako narzędzie do konstrukcji takiej bazy posłuży następujące działanie: *lioczynem zewnętrznym* k-kowektora α i l-kowektora β jest $(k+l)$-kowektor zadany wzorem

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{k!l!}\alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(l+2)}, \ldots, v_{\sigma(l)}).$$

Zanim zastanowimy się nad własnościami iloczynu zewnętrznego przyjrzyjmy się przykładom dla konkretnych (niedużych) k i l. Niech $k = 1$ i $l = 1$, czyli α, β są po prostu kowektorami na V. Wtedy $\alpha \wedge \beta$ jest 2-kowektorem określonym wzorem

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{1!1!}\alpha(v_{\sigma(1)})\beta(v_{\sigma(2)}).$$

W grupie permutacji S_2 są tylko dwie permutacje: identyczność (parzysta) i jedna transpozycja $(1\ \ 2)$ (nieparzysta). Wzór przyjmuje więc postać

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1)$$

Teraz załóżmy, że α jest 2-kowektorem a β kowektorem. Potrzebujemy więc permutacji z S_3. W tej grupie jest sześć permutacji: trzy transpozycje $(1\ \ 2)$, $(1\ \ 3)$, $(2\ \ 3)$ (nbieparzyste), dwa cykle $(1\ \ 2\ \ 3)$, $(1\ \ 3\ \ 2)$ i identycznosć. Wzór na iloczyn zewnętrzny przyjmuje postać:

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2!1!}\left(+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) - \alpha(v_3, v_2)\beta(v_1)\right.$$
$$\left.+\alpha(v_3, v_1)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)\right) =$$

Wyrazy zaznaczone tym samym kolorem różnią się jedynie kolejnością argumentów 2-kowektora α. Po uporządkowaniu można je dodać. Trzeba jedynie pamiętać o zmianie znalu przy zamianie kolejności argumentów:

$$= \frac{1}{2!1!}\left(+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) + \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2)\right.$$
$$\left.+\alpha(v_2, v_3)\beta(v_1) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(+2\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - 2\alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + 2\alpha(v_2, v_3)\beta(v_1)\right) =$$
$$\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1).$$

Ostatecznie

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) = \alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1).$$

Jako ostatniej przyjrzyjmy się sytuacji kiedy oba czynniki iloczynu zewnętrznego są 2-kowektorami. Potrzebujemy teraz permutacji z S_4. poprzedni przykład pokazuje, że istotny jest jedynie podział argumentów między czynniki. Argumenty jednego 2-kowektora porządkujemy rosnąco dodając podobne składniki. W tym przypadku mamy sześć możliwych podziałów zbioru indeksów $\{1, 2, 3, 4\}$ pomiedzy 2-kowektory α i β:

$$\begin{aligned}
\{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 2\} \cup \{3, 4\}\\
\{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 3\} \cup \{2, 4\}\\
\{1, 2, 3, 4\} &= \{1, 4\} \cup \{2, 3\}\\
\{1, 2, 3, 4\} &= \{2, 3\} \cup \{1, 4\}\\
\{1, 2, 3, 4\} &= \{2, 4\} \cup \{1, 3\}\\
\{1, 2, 3, 4\} &= \{3, 4\} \cup \{1, 2\}.
\end{aligned}$$

Argumenty z indeksami z pierwszego zbioru będziemy wstawiac do α a z drugiego do β. Pierwszemu z podziałów odpowiadają cztery możliwe permutacje:

$$\mathrm{id}, \quad (1\ \ 2), \quad (3\ \ 4), \quad (1\ \ 2)(3\ \ 4)$$

Pierwsza i ostatnia są parzyste, druga i trzecia nieparzyste. Permutacje te mieszają indeksy w ramach podziału, a nie między zbiorami podziału. Wkład od tych czterech permutacji do wzoru na iloczyn $\alpha \wedge \beta$ jest następujący

$$+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4) - \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3, v_4) - \alpha(v_1, v_2)\beta(v_4, v_3) + \alpha(v_2, v_1)\beta(v_4, v_3)$$

Po uporządkowaniu rosnąco argumentów obu 2-kowektorów otrzymujemy wkład

$$+4\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3, v_4).$$

Podobnie analizując każdy z możliwych podziałów i odpowiadające każdemu cztery permutacje dostaniemy wzór

$$\alpha\wedge\beta(v_1,v_2,v_3,v_4)=\frac{1}{2!2!}\left(4\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4)-4\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2,v_4)+4\alpha(v_1,v_4)\beta(v_2,v_3)\right.$$
$$\left.+4\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1,v_4)-4\alpha(v_2,v_4)\beta(v_1,v_3)+4\alpha(v_3,v_4)\beta(v_1,v_2)\right)=$$
$$\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4)-\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2,v_4)+\alpha(v_1,v_4)\beta(v_2,v_3)$$
$$+\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1,v_4)-\alpha(v_2,v_4)\beta(v_1,v_3)+\alpha(v_3,v_4)\beta(v_1,v_2).$$

Zupełnie nieprzypadkowo współczynniki liczbowe za każdym razem się upraszczają. Oto najważniejsze własności ioczynu zewnętrznego:

- Iloczyn zewnętrzny jest operacją dwuliniową, tzn:
$$(a\alpha+b\alpha')\wedge\beta=a\alpha\wedge\beta+b\alpha'\wedge\beta,\qquad \alpha\wedge(a\beta+b\beta'=a\alpha\wedge\beta+b\alpha\wedge\beta').$$
Fakt ten wynika łatwo z definicji.
- Iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn
$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).$$
Dowód tego faktu jest dość nieprzyjemny. Polega na pokazaniu, że lewa i prawa strona obliczona na układzie $k+l+p$ wektorów daje
$$\sum_{\sigma\in S_{k+l+p}}\frac{\operatorname{sgn}\sigma}{k!l!p!}\alpha(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)})\gamma(v_{\sigma(k+l+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l+p)}).$$
- Iloczyn zewnętrzny w ogólności niejest przemienny, ale zachodzi wzór:
$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha.$$

Wspominaliśmy już, że każdy k-kowektor jest zadany przez swoje wartości na układach wektorów bazowych. Wartości te są współrzędnymi k-kowektora w pewnej bazie. Zajdźmy tę bazę. Niech, jak poprzednio, $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ będzie bazą w V. Kowektory tworzące baze dualną oznaczymy jak zwykle $(\epsilon^1,\epsilon^2,\ldots,\epsilon^n)$. Wybierzmy teraz k-elementowy zbiór indeksów $I=\{i_1,\ldots,i_k\}$ i uporządkujemy indeksy rosnąco, tzn. $i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k$. Interesuje nas k-kowektor
$$\epsilon^{i_1}\wedge\epsilon^{i_2}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{i_k}.$$
Jeśli w zbiorze I choć jeden indeks powtarza się, to powyższy k-kowektor jest równy zero: Zamiana miejscami dwóch czynników powinna powodować zmianę znaku, jednak jeśli czynniki te są jednkowe, tak naprawdę nic się nie zmienia. Możemy więc rozważać tylko takie zbiory indeksów, że $i_1<i_2<\cdots<i_k$. Obliczmy k-kowektor $\epsilon^{i_1}\wedge\epsilon^{i_2}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{i_k}$ na układzie wektorów $(e_{j_1},\ldots,e_{j_k})$ (zakładamy, że indeksy w tym ukłądzie wektorów są uporządkowane rosnąco):
$$\epsilon^{i_1}\wedge\epsilon^{i_2}\wedge\cdots\wedge\epsilon^{i_k}(e_{j_1},\ldots,e_{j_k})=\sum_{\sigma\in S_k}\epsilon^{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}})\cdot\ \cdots\ \cdot\epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$$
W powyższej sumie albo wszystkie skladniki są równe 0, albo jest tylko jeden niezerowy składnik. Wszystkie składniki są równe zero, jeśli zbiory $\{i_1,\ldots,i_k\}$ i $\{j_1,\ldots,j_k\}$ nie są identyczne. Wtedy zawsze przynajmniej jedna ewaluacja $\epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$ w każdym z iloczynów jest równa 0. Jeśli

zbiory indeksów są jednakowe wtedy w powyższej sumie jest jeden niezerowy wyraz dla permutacji identycznościowej (założyliśmy początkowo, że indeksy w obu zbiorach są uporządkowane rosnąco). W takiej sytuacji otrzymujemy

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \epsilon^{i_1}(e_{i_1}) \cdot \epsilon^{i_1}(e_{i_1}) \cdot \ \cdots \ \cdot \epsilon^{i_k}(e_{i_k}) = 1$$

Postulujemy, że układ k-kowektorów składający się ze wszystkich iloczynów zewnętrznych k kowektorów bazowych z odpowiednio uporządkowanycmi indeksami jest dobrą bazą w $\bigwedge^k V^*$. Liczba k-kowektorów w powyższym ukłądzie się zgadza, tzn jest ich liczba równa wymiarowi przestrzeni. Ponadto układ ten jest liniowo niezależny: wystrczy obliczyć wartości kombinacji liniowej wektorów z tego układu na wszystkich k elementowych ciągach wektorów bazowych e_i z uporządkowanymi rosnąco indeksami. Na każdym z takich ciągów wartość niezerową ma tylko jeden z k-kowektorów, co daje warunkek znikania współczynnika przy tym właśnie k-kowektorze. Okazuje się, że istotnie badany przez nas układ k-kowektorów jest dobrą bazą. Współrzędne rozważąne przez nas wcześniej związane są właśnie z tą bazą. Oznacza to, że każdy k-kowektor α można zapisać jako kombinację liniową

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} \epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}$$

W dalszym ciągu zajmować się będziemy k-kowektorami na przestrzeni stycznej do powierzchni i polami k-kowektorowymi. Będą one treścią następnego wykładu. Oto propozycje zadań do rozwiązywania na cwiczeniach:

Zadanie 1. Niech $\omega = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^3 \wedge \epsilon^4$. Obliczyć $\omega \wedge \omega$. Podobnie dla $\rho = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^3 \wedge \epsilon^4 + \epsilon^5 \wedge \epsilon^6$ obliczyć $\rho \wedge \rho \wedge \rho$. Czy potrafimy uogólnić nasze rachunki na

$$\theta = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + \epsilon^3 \wedge \epsilon^4 + \cdots + \epsilon^{2n-1} \wedge \epsilon^{2n} \quad \text{i} \quad \underbrace{\theta \wedge \cdots \wedge \theta}_{n} ?$$

Zadanie 2. *(może być za trudne)* Pokazać, że dla każdego dwukowektora α istnieje baza kanoniczna, tzn taka w której ma on postać

$$\alpha = \varphi^1 \wedge \varphi^2 + \varphi^3 \wedge \varphi^4 + \cdots + \varphi^{2k-1} \wedge \varphi^{2k}.$$

dla pewnego k. Skonstruować taką bazę dla $\alpha = f^1 \wedge f^2 + f^2 \wedge f^3 + f^4 \wedge f^4 + f^4 \wedge f^1$, jeśli (f^1, f^2, f^3, f^4) stanowią bazę w czterowymiarowej przestrzeni V^*.

Zadanie 3. Wprowadzić pojęcie kowektora prostego, podać kilka przykładów prostych i nieprostych. Wybrać kilka takich przykładów w których k-kowektory są proste choć na pierwszy rzut oka tego nie widać.

Zadanie 4. *(wybiegające w przyszłość, ale można zrobić już teraz)* W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wprowadzamy współrzędne sferyczne. Wyrazić kowektory bazowe $\mathsf{d}x$, $\mathsf{d}y$, $\mathsf{d}z$ poprzez $\mathsf{d}r$, $\mathsf{d}\vartheta$ i $\mathsf{d}\varphi$ a następnie obliczyć $\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$ w nowych współrzędnych.