Wykład 9.

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

4 listopada 2011

W trakcie poprzedniego wykładu zdefiniowaliśmy pojęcie k-kowektora na przestrzeni wektorowej. Wprowadziliśmy także iloczyn zewnętrzny wielokowektorów i uzasadniliśmy, że każdy k-kowektor jest kombinacją liniową k-kowektorów prostych, tzn. iloczynów zewnętrznych 1-kowektorów. Jeśli jako przestrzeń wektorową weźmiemy przestrzeń styczną T_pS do powierzchni S w punkcie p, możemy mówić o wielokowektorach na powierzchni. Mamy wtedy zazwyczaj do dyspozycji bazę w T_pS pochodzącą od układu współrzędnych oraz dualną do niej bazę w T^*_pS, składającą się z różniczek współrzędnych. Jeśli $(x^1, \ldots, x^m)$ oznaczają współrzędne na m-wymiarowej powierzchni S (zanurzonej w $\mathbb{R}^n$), to k-kowektor w punkcie $p \in S$ jest postaci

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}.$$

Załóżmy teraz, że w każdym punkcie powierzchni S, a przynajmniej w każdym punkcie p pewnego otwartego zbioru $\mathcal{O} \subset S$ zadany jest kowektor $\alpha(p)$. mamy więc odwzorowanie

$$\alpha : \mathcal{O} \longrightarrow \bigwedge^k \mathsf{T}^*S.$$

wymagać będziemy dodatkowo, aby współczynniki $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ zależały od punktu w taki sposób, żeby wyrażone we współrzędnych $(x^1, \ldots, x^m)$ były gładkimi funkcjami tych współrzędnych. W dziedzinie jednego układu współrzędnych możemy napisać

$$\alpha = \sum_{i_1<i_2\cdots<i_k} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x^1, \ldots, x^m) \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$$

Odwzorowanie α nazywamy *k-formą* na $\mathcal{O}$. Przykładem 1-formy jest różniczka funkcji

$$\mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathsf{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathsf{d}x^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}\mathsf{d}x^m.$$

Różniczka funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ma postać

$$\mathsf{d}f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathsf{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathsf{d}y.$$

i jest określona we wszystkich punktach $\mathbb{R}^2$ poza $(0, 0)$. W punkcie $(0, 0)$ funkcja f nie jest różniczkowalna. Ta sama funkcja zapisana w biegunowym układzie współrzędnych ma postać

$$f(r, \varphi) = r,$$

zatem jej różniczka to po prostu

$$\mathsf{d}f(r, \varphi) = \mathsf{d}r.$$

Przykładem dwuformy na $\mathbb{R}^2$ jest tzw. forma objętości zorientowanej związana z kanonicznym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^2$ (o formach objętości dokładniej powiemy za chwilę)

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

Tę samą formę możemy wyrazić we współrzędnych biegunowych biorąc pod uwagę, że

$$\mathsf{d}x = \cos\varphi \mathsf{d}r - r \sin\varphi \mathsf{d}\varphi, \quad \mathsf{d}y = \sin\varphi \mathsf{d}r + r \cos\varphi \mathsf{d}\varphi$$

Mnożymy zewnętrznie $\mathsf{d}x$ i $\mathsf{d}y$ wyrażone we współrzędnych biegunowych:

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = (\cos\varphi \mathsf{d}r - r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r + r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) =$$

$$(\cos\varphi \mathsf{d}r)\wedge(\sin\varphi \mathsf{d}r)+(\cos\varphi \mathsf{d}r)\wedge(r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi)+(-r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi)\wedge(\sin\varphi \mathsf{d}r)+(-r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi)\wedge(r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) =$$

$$\cos\varphi\sin\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}r + r\cos^2\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi - r\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r - r^2\sin\varphi\cos\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}\varphi$$

Pierwszy i ostatni składnik są równe zero, ponieważ iloczyn zewnętrzny dwóch identycznych kowektorów jest równy zero. Oznacza to, że

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = r\cos^2\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi - r\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r$$

Korzystając z własności iloczynu zewnętrznego piszemy

$$\mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r = -\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi,$$

zatem ostatecznie

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = (r\cos^2\varphi + r\cos^2\varphi)\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi = r\,\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi.$$

Podobnie jak k-formy definiować możemy pola wektorowe na powierzchni (lub oczywiście na przestrzeni afinicznej). Jeśli w każdym punkcie powierzchni (lub otwartego podzbioru $\mathcal{O}$ tej powierzchni) wyróżniony jest jeden wektor styczny w taki sposób, że odwzorowanie

$$X : S \longrightarrow \mathsf{T}S$$

zapisane w układzie współrzędnych, tzn.

$$X(x^1, \ldots, x^m) = X^1(x^1, \ldots, x^m)\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x^1, \ldots, x^m)\frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + X^m(x^1, \ldots, x^m)\frac{\partial}{\partial x^m}$$

wyraża się przez gładkie funkcje X^i mówimy, że X jest gładkim *polem wektorowym na* S. Przykładem pola wektorowego jest gradient funkcji.

Forma objętości i orientacja powierzchni. Wiadomo, że przestrzeń $\mathbb{R}^n$ wyposażona jest w kanoniczny iloczyn skalarny, dzięki czemu możemy liczyć długości wektorów, kąty między wektorami, pola powierzchni i objętości brył. W szczególności wiadomo, że objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dana jest wzorem

$$vol_+(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left|\det \begin{bmatrix} \epsilon^1(v_1) & \epsilon^1(v_2) & \cdots & \epsilon^1(v_n) \\ \epsilon^2(v_1) & \epsilon^2(v_2) & \cdots & \epsilon^2(v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon^n(v_1) & \epsilon^n(v_2) & \cdots & \epsilon^n(v_n) \end{bmatrix}\right|$$

Prawdziwa objętość jest dodatnia, a wyznacznik układu wektorów może być dodatni lub ujemny, dlatego we wzorze piszemy wartość bezwzględną. Współrzędne wektorów v_i względem bazy e zostały zapisane z użyciem bazy dualnej ϵ. Wzór ten obowiązuje pod warunkiem, że baza e jest bazą ortonormalną względem iloczynu skalarnego. W dalszym ciągu będziemy mówić o tzw. objętości zorientowanej, tzn. opuścimy wartość bezwzględną dopuszczając, że objętość wyjdzie nam ujemna. Objętość zorientowaną oznaczymy *vol*. Korzystając z definicji wyznacznika możemy napisać

$$vol(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\epsilon^1(v_{\sigma(1)})\epsilon^2(v_{\sigma(2)})\cdots\epsilon^n(v_{\sigma(n)})$$

Porównując powyższy wzór ze wzorami związanymi z iloczynem zewnętrznym stwierdzamy, iż

$$vol = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \cdots \wedge \epsilon^n.$$

Formę objętości wyrazimy teraz w innej bazie, niekoniecznie ortonormalnej. Załóżmy, że w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ mamy inną bazę $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ i związaną z nią bazę dualną $(\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n)$. Skorzystamy teraz ze wzorów obowiązujących przy zmianie bazy: Jeśli v jest elementem $\mathbb{R}^n$ to

$$[v]^e = [id]^e{}_f [v]^f. \tag{1}$$

Macierz $[id]^e{}_f$ oznaczmy krótszym symbolem M. Wyrażając współrzędne wektora względem danej bazy poprzez działanie kowektorów z bazy dualnej zapiszemy wzór (1) w postaci

$$\epsilon^i(v) = M^i{}_j \phi^j(v).$$

Ponieważ powyższa równość zachodzi dla dowolnego v, mamy także związek między kowektorami należącymi do odpowiednich baz dualnych:

$$\epsilon^i = M^i{}_j \phi^j. \tag{2}$$

Wyrażenie (2) możemy wstawić do wzoru na formę objetości (sumujemy po powtarzających się wskaźnikach):

$$vol = \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 \wedge \cdots \wedge \epsilon^n = (M^1{}_{j_1}\phi^{j_1}) \wedge (M^2{}_{j_2}\phi^{j_2}) \wedge \cdots \wedge (M^n{}_{j_n}\phi^{j_n}) =$$
$$M^1{}_{j_1} M^2{}_{j_2} \cdots M^n{}_{j_n} \phi^{j_1} \wedge \phi^{j_2} \wedge \cdots \wedge \phi^{j_n}.$$

W powyższej sumie niezerowe są jedynie składniki w których każdy z kowektorów występuje tylko raz. Takich składników jest $n!$. Część n-kowektorowa w każdym ze składników jest z dokładnością do znaku równa

$$\phi^1 \wedge \phi^2 \wedge \cdots \wedge \phi^n$$

Za każdym razem znak jest równy parzystości permutacji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix},$$

Ostatecznie więc

$$vol = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma M^1{}_{\sigma(1)} M^2{}_{\sigma(2)} \cdots M^n{}_{\sigma(n)} \right) \phi^1 \wedge \phi^2 \wedge \cdots \wedge \phi^n = (\det M) \phi^1 \wedge \phi^2 \wedge \cdots \wedge \phi^n.$$

Zapisaliśmy formę objętości w dowolnej bazie używając macierzy przejścia między tą bazą a bazą ortonormalną. Wiemy jednak, że pojęcie objętości ma sens jedynie w przestrzeni z iloczynem skalarnym. Jak forma objętości wyrażona w dowolnej bazie wiąże się z iloczynem skalarnym g? Macierz iloczynu skalarnego w bazie ortonormalnej e jest po prostu macierzą jednostkową:

$$[g]_e = \mathbf{1}$$

Zgodnie ze wzorem na zamianę bazy w macierzy formy dostajemy

$$[g]_f = ([id]^e{}_f)^\top [g]_e [id]^e{}_f = M^\top \mathbf{1} M = M^\top M$$

Korzystając z własności wyznacznika macierzy otrzymujemy

$$\det [g]_f = \det \left(M^\top M \right) = \det \left(M^\top \right) \det (M) = (\det M)^2 .$$

Wyznacznik macierzy M jest więc z dokładnością do znaku równy pierwiastkowi z wyznacznika macierzy iloczynu skalarnego

$$\det M = \pm\sqrt{\det[g]_f}.$$

Wyznacznik macierzy iloczynu skalarnego jest zawsze dodatni. Formę objętości można zapisać zatem następująco

$$vol = \pm\sqrt{\det[g]_f}\,\phi^1 \wedge \phi^2 \wedge \cdots \wedge \phi^n$$

a znak $+$ lub $-$ wstawiamy w zależności od tego, czy macierz przejścia między bazą kanoniczną a bazą f ma dodatni czy ujemny wyznacznik. Przy okazji okazuje się, że w zbiorze baz w przestrzeni wektorowej istnieje naturalna relacja równoważności: mówimy, że dwie bazy są równoważne, jeśli wyznacznik macierzy przejścia między tymi bazami jest dodatni. Zbiór baz dzieli się na dwie klasy równoważności, nazywane *orientacjami wewnętrznymi przestrzeni wektorowej*. Jeśli w danej przestrzeni wektorowej jest jakaś wyróżniona baza (kanoniczna) to także jest wyróżniona orientacja tej przestrzeni: ta, której reprezentantem jest baza kanoniczna. Taką orientację nazywamy także *kanoniczną*. W $\mathbb{R}^n$ mamy więc orientację kanoniczną. Istnienie orientacji kanonicznej (w obecności iloczynu skalarnego) pociąga za sobą także istnienie kanonicznej formy objętości, tak jak to widzieliśmy w $\mathbb{R}^n$. Kanoniczna forma objętości jest to ta z n-form, która przyjmuje wartość 1 na bazie ortonormalnej zgodnej z orientacją kanoniczną. Jeśli żadna z orientacji nie jest wyróżniona mamy także dwie różne formy objętości różniące się znakiem.

Wszystko co zrobiliśmy powyżej dla przestrzeni wektorowej możemy także zrobić na powierzchni biorąc jako przestrzeń wektorową przestrzeń styczną. Mówimy, że na powierzchni mamy dany iloczyn skalarny, jeśli przestrzeń styczna w każdym punkcie jest wyposażona w iloczyn skalarny. Dodatkowy warunek mówi, że jeśli zapiszemy macierz iloczynu skalarnego w bazie pochodzącej od układu współrzędnych wyrazy macierzowe powinny być gładkimi funkcjami współrzędnych. Zazwyczaj używa się iloczynu skalarnego indukowanego z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w której zanurzona jest powierzchnia. Możemy również używać pojęcia *orientacji powierzchni.* Mówimy, że powierzchnia jest zorientowana, jeśli w każdej przestrzeni stycznej wybrana jest orientacja w sposób zgodny, tzn. jeśli dwa punkty leżą w dziedzinie tego samego układu współrzędnych, to wybrana orientacja pozostaje w obu punktach w tej samej relacji z orientacją bazy pochodzącej od układu współrzędnych: albo w obu punktach jest to orientacja zgodna albo w obu przeciwna. Są powierzchnie, na których nie da się wybrać orientacji. Przykładem takiej powierzchni jest wstęga Moebiusa. Formy objętości służą do obliczania pól i objętości, warto więc przyjrzeć im się bliżej.

Zadanie 1. Zapisać kanoniczną formę objętości w $\mathbb{R}^3$ we współrzędnych sferycznych. ♠

Zadanie 2. Na sferze S^2 zanurzonej w $\mathbb{R}^3$ rozważyć iloczyn skalarny indukowany z przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć macierz iloczynu skalarnego w bazie pochodzącej od współrzędnych sferycznych i zapisać jedną z dwóch form objętości na S^2. ♠

Zadanie 3. Zapisać jedną z dwóch form objętości na torusie o promieniach $a > b$ we współrzędnych pochodzących od naturalnej parametryzacji. ♠

Zadanie 4. Wyrazić we współrzędnych sferycznych 2-formę na $\mathbb{R}^3$ daną wzorem

$$\omega = x\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + z\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y.$$

♠

Na następnym wykładzie poznamy pojęcia cofnięcia (pull-back) formy i różniczki formy. W dalszym ciągu zajmiemy się całkowaniem form różniczkowych po powierzchniach.