Zadanie 5

$$F(a) = \int_0^1 \underbrace{\frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}}_{=f(a,x)} dx$$

$a \in [-1,1]$

Funkcja $f(a,x)$ na zbiorze $]-1,1[\times]0,1[$ jest funkcją ciągłą (złożenie funkcji ciągłych, nie ma zer w mianowniku ...). Sprawdźmy więc, czy mamy do czynienia z całką właściwą czy niewłaściwą.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^2a^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-a^2x^2 - \frac{1}{2}a^4x^4 - \dots}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -a^2$$

W okolicy zera funkcja podcałkowa jest ograniczona i da się dookreślić do funkcji ciągłej (z prawej strony) w $x=0$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1-x^2a^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} a \neq \pm 1 & \lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1-a^2)}{\sqrt{1-x}\sqrt{2}} = -\infty \\ a \neq \pm 1 & \lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1-x)2}{\sqrt{1-x}\sqrt{2}} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\log t}{\sqrt{t}} = -\infty$$

W okolicach 1 funkcja $f(a,x)$ ma nieskończoną granicę, mamy zatem do czynienia z całką niewłaściwą.

$|\log(1-a^2x^2)| \leq \log(1-x^2)$ istotnie dla ustalonego x

$\frac{\partial}{\partial a}\log(1-a^2x^2) = \frac{1}{1-a^2x^2}(-2ax^2) < 0$ funkcja jest więc malejąca ze względu na a dla a dodatnich, wartości ma ujemne zatem $|\log(1-a^2x^2)|$ jest rosnąca ze względu na a dla a dodatnich

Z tego powodu dla $a \in [0,1]$ $|\log(1-a^2x^2)| \le |\log(1-x^2)|$

z symetrii względem zmiany znaku a nierówność obowiązuje dla $a \in [-1,1]$

$$|f(a,b)| \le \frac{|\log(1-x^2)|}{x^2\sqrt{1-x^2}} = g(x).$$

Pokażemy, że $g(x)$ jest całkowalna. W $x=0$ wartość można dookreślić kładąc $g(0)=1$, g jest prawostronnie ciągła w zerze. W $x=1$ mamy

$$\left|\frac{\log(1+x)(1-x)}{x^2\sqrt{(1-x)(1+x)}}\right| \underset{x\in[x_0,1]}{\le} \frac{|\log(1+x_0)(1-x)|}{x_0\sqrt{1+x_0}\sqrt{1-x}}$$

pytanie o całkowalności g na $[x_0,1]$ sprowadza się więc do pytania o całkowalności $\frac{\log(bt)}{\sqrt{t}}$ na $[0,\alpha]$

taką całkę można wyliczyć!

$$\int_0^\alpha \frac{\log(bt)}{\sqrt{t}} = \left\{\begin{array}{ll} u(t) = \log bt & v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \\ u'(t) = \frac{1}{t} & v(t) = 2\sqrt{t} \end{array}\right\} =$$

$$\log(bt)\cdot 2\sqrt{t}\,\Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt = 2\log(b\alpha)\sqrt{\alpha} - 4\sqrt{t}\,\Big|_0^\alpha = 2\log(b\alpha)\sqrt{\alpha} - 4\sqrt{\alpha}$$

Funkcja g jest więc ciągła i ograniczona na $[0,x_0]$ oraz całkowalna na $[x_0,1]$, ostatecznie więc całkowalna na $[0,1]$.

Powyższe oszacowanie pokazuje, że $F(a)$ istnieje dla $a \in [-1,1]$ a także jest ciągła na $[-1,1]$ na końcach jednostronnie.

Pozostaje wyliczyć całkę. Zobaczymy czy da się to zrobić metodą różniczkowania po parametrze:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)=\frac{-2a\cancel{x^2}}{(1-a^2x^2)\cancel{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Dla ustalonego x funkcja $a \mapsto \frac{1}{1-a^2x^2}$ jest rosnąca (dla dodatnich a) zatem $\left|\frac{2a}{1-a^2x^2}\right| \leq \frac{2}{1-x^2}$

problem w tym, że $\frac{2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ nie jest całkowalna na $[0,1]$, istotnie decydujące znaczenie ma $\frac{1}{(1-x)^{3/2}}$ dla której f. pierwotna to $-2\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$, która dla $x \to 1$ ma granicę nieskończoną.

W tej sytuacji ograniczymy $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|$ poprzez $\frac{2a_0}{(1-a_0^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ dla $0<a_0<1$

$a \in [-a_0, a_0]$. Wystarczy to do wyznaczenia $F(a)$ dla $a \in]-1,1[$. Wiemy jednak, że F jest ciągła na $[-1,1]$, więc wartości na brzegach wyznaczymy biorąc granicę. Całkujemy:

$$F'(a)=\int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \end{matrix} = -2a\int_0^{\pi/2}\frac{\cancel{\cos t}\,dt}{(1-a^2\sin^2 t)\cancel{\cos t}} =$$

$$= -2a\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1-a^2\sin^2 t} \quad \begin{matrix} u=\operatorname{tg} t \\ \frac{du}{1+u^2}=dt \\ \sin^2 u = \frac{t^2}{1+t^2} \end{matrix} \quad = -2a\int_0^{\infty}\frac{\frac{du}{1+u^2}}{1-\frac{a^2u^2}{1+u^2}} =$$

$$= -2a\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2-a^2u^2} = -2a\int_0^{\infty}\frac{du}{1+(1-a^2)u^2} = -2a\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-a^2}\,u\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$= -\cancel{2}a\,\frac{1\cdot\pi/\cancel{2}}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{-\pi a}{\sqrt{1-a^2}} \qquad F(a)=\pi\sqrt{1-a^2}+C$$

$$F(0)=0 \Rightarrow C=-\pi$$