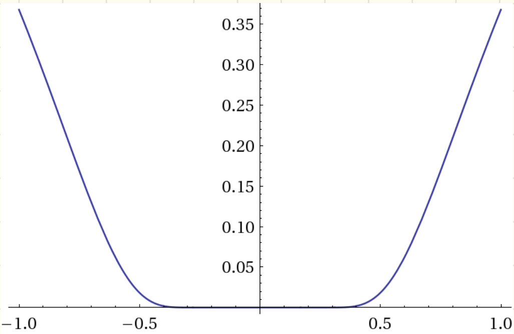
ROZWINIĘCIE FUNKCJI HOLOMORFICZNEJ W SZEREG TAYLORA



Pamiętają Państwo być może funkcję $x \longmapsto \exp(-1/x^2)$, którą dla $x=0$ dokreślamy $0 \longmapsto 0$.

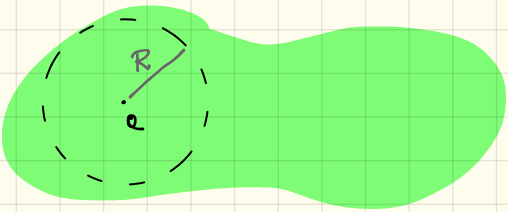
Ta funkcja jest wszędzie, w szczególności w $x=0$ różniczkowalna nieskończenie wiele razy (gładka). Wszystkie pochodne w $x=0$ są równe 0. Jest to funkcja gładka, ale w otoczeniu zera nieanalityczna tzn nie daje się na odcinku $]-R,R[$ zapisać za pomocą zbieżnego szeregu potęgowego.

Takie rzeczy nie zdarzają się w dziedzinie zespolonej, o czym mówi następujące twierdzenie

TWIERDZENIE: Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ i niech $K(a,R) \subset \Omega$. Wtedy szereg

$$f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{1}{2} f''(a)(z-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n + \dots$$

jest zbieżny w $K(a,R)$ do funkcji f niemal jednostajnie (tzn jednostajnie na każdym zbiorze zwartym zawartym w $K(a,R)$)



Z drugiej strony obowiązuje także twierdzenie o zadawaniu funkcji w postaci szeregu: 2

TWIERDZENIE: Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Niech także $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Wówczas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ jest funkcją holomorficzną w $K(z_0, R)$. Ponadto $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Twierdzenia nr 2 nie będziemy dowodzić, gdyż zbieżność niemal jednostajna szeregów potęgowych została wykazana w ramach Analizy I. Podobnie różniczkowalność, choć w dziedzinie rzeczywistej dowód w dziedzinie zespolonej nie odbiega od dowodu w dziedzinie rzeczywistej. Sumy częściowe są wielomianami, zatem spełniają warunki C-R. Granica także spełnia te warunki co wynika z twierdzeń o różniczkowaniu wyraz po wyrazie szeregów zbieżnych jednostajnie.

Zajmiemy się za to dowodem twierdzenia nr 1. W dowodzie korzysta się ze wzoru Cauchy'ego oraz z nierówności Cauchy'ego.

DOWÓD (1) Weźmy jak w treści twierdzenia $f \in A(\Omega)$, $K(a,R) \subset \Omega$. Mamy dowodzić zbieżności szeregu na każdym zbiorze zwartym zawartym w $K(a,R)$. Wystarczy wziąć $\overline{K(a,r)}$ takie, że $r < R$. Ustalmy więc odpowiednie r.

$$f \in A(\Omega),\ K(a,R) \subset \Omega$$

Nierówność Cauchy'ego

$$|f^{n}(a)| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{z=a+Re^{i\varphi}} |f(z)|$$

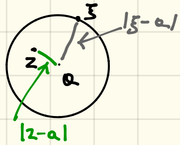
Niech $z \in \overline{K(a,r)}$ wtedy

$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $\qquad |a_n| \le \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\, R^n} \cdot C$ $\qquad$ istnieje takie C

np $C = \sup\limits_{z \in \partial K(a,R)} |f(z)|$

$$|a_n z^n| \le \frac{r^n}{R^n} = \left(\frac{r}{R}\right)^n \qquad \frac{r}{R} < 1$$

$$\xi - z = \xi - a + a - z$$



Z Nierówności Cauchy'ego wynika, że szereg jest jednostajnie zbieżny na $\overline{K(a,r)}$. Trzeba jeszcze wykazać, że suma tego szeregu to $f(z)$.

Weźmy teraz $r' < r$. Korzystamy ze wzoru Cauchy'ego:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(a,r')} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(a,r')} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \frac{\xi - a}{\xi - a + a - z}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(a,r')} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \frac{d\xi}{1 - \frac{z-a}{\xi - a}} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(a,r')} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi - a)^n} \right) d\xi =$$

$\left| \frac{z-a}{\xi - a} \right| < 1$ zatem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a} \right)^n$ zbieżny jednostajnie

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \oint\limits_{\partial K(a,r')} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.$$

$\blacksquare$

Przy obliczaniu promienia zbieżności częściej używa się pojęcia granicy niż granicy górnej. Wiadomo, że jeśli ciąg jest zbieżny to jego granica górna jest równa granicy. Najczęściej więc liczymy

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Ewentualnie korzystamy z faktu, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ istnieje, to jest równa . Pamiętać należy także że granicę górną można znaleźć badając granice podciągów.

NIEKTÓRE FUNKCJE HOLOMORFICZNE

Wiedząc, że funkcje holomorficzne można zadawać przy pomocy zbieżnych szeregów potęgowych możemy w dziedzinie zespolonej zdefiniować znane z $\mathbb{R}$ funkcje:

Funkcja wykładnicza: $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

o znanych własnościach $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ $\quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ $\quad (e^z)' = e^z$

Funkcje trygonometryczne:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \ldots$$

F. całkowite, tzn holomorficzne na $\mathbb{C}$

Funkcje hiperboliczne

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

Funkcje wymierne

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$, promień zbieżności $= 1$

$f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \rightarrow$ rozkładamy na ułamki proste i rozwijamy w szereg w kole w którym się da, tzn nie zahaczymy o osobliwość.

WNIOSKI Z TW. TAYLORA:

1685-1731

(1) Niech $f \in A(\Omega)$ Jeśli dla $a \in \Omega$ i dla $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(a) = 0$ to f jest stała na Ω.

(2) Jeżeli dwie funkcje holomorficzne mają równe wszystkie pochodne w jednym punkcie obszaru Ω to różnią się conajwyżej o stałą.

(3) Miejsca zerowe funkcji holomorficznej są izolowane. DOWÓD Istotnie, jeśli zbiór miejsc zerowych ma punkt skupienie, to istnieje ciąg (a_n) miejsc zerowych zbieżny do tego punktu.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{i} \quad f(a) = 0 \quad (\text{z ciągłości } f)$$

Okazuje się, że wszystkie pochodne f w a znikają. Załóżmy że nie i niech $f^{(k)}(a)$ będzie niezerową pochodną. Wtedy

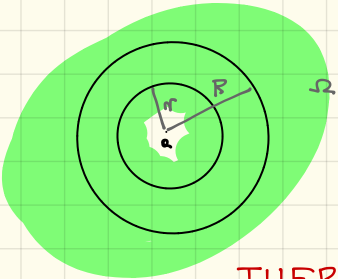
$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} (z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = (z-a)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{f^{(k+n)}(a)}{n!}}_{g(z)} = (z-a)^k g(z)$$

g jest holomorficzna i $g(a) = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$ Ale $g(a_n) = 0$ bo

$0 = f(a_n) = \underbrace{(a_n - a)^k}_{\neq 0} g(a_n)$ zatem $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = 0 = g(a)$ sprzeczność

Skoro wszystkie pochodne i wartość f w a są zero, to f jest zero. Jeśli więc f nie jest stała równa 0, to miejsca zerowe są izolowane.

Dotychczas dyskutowaliśmy rozwinięcie funkcji holomorficznej w kole, które mieści się w obszarze holomorficzności funkcji. Teraz rozpatrywać będziemy rozwinięcie w pierścieniu, który może otaczać punkty osobliwe



DEFINICJA: Pierścieniem otwartym o promieniach $r<R$ i środku w $a\in\mathbb{C}$ nazywamy

$$\mathcal{R}=\{z:\ r<|z-a|<R\}$$

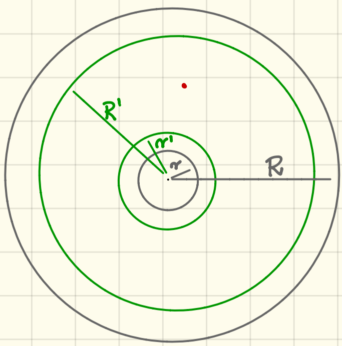
TWIERDZENIE (Laurent) Niech $f\in A(\Omega)$ i niech $\mathcal{R}(a,r,R)\subset\Omega$. Wtedy dla $f\in\mathcal{R}(a,r,R)$ zachodzi

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Szereg powyższy jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie na $\mathcal{R}(a,r,R)$ i ponadto

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial K(a,\rho)}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\,d\xi \qquad r<\rho<R$$

DOWÓD:



Weźmy $\overline{\mathcal{R}}(a,r',R')$ dla $r<r'<R'<R$ wtedy brzegi pierścienia zawierają się w obszarze holomorficzności. Bierzemy $z\in\mathcal{R}(a,r',R')$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{R}(a,r',R')}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi =$$

Brzeg $\partial\mathcal{R}(a,r',R')$ to dwa okręgi: $|\xi-a|=r'$ i $|\xi-a|=R'$. Większy zorientowany kanonicznie drugi przeciwnie, zatem

$$=\oint_{|\xi-a|=R'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi-\oint_{|\xi-z|=r'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

każdą z tych całek potraktujemy inaczej.

Całkę po większym obliczamy tak jak przy wzorze Taylora 7

$|z-a| < \underbrace{|\xi - a|}_{R'}$ zatem $\frac{|z-a|}{|\xi-a|} < 1$

$$\int\limits_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)}{\xi-a} \frac{\xi-a}{\xi-a+a-z} d\xi = \oint \frac{f(\xi)}{(\xi-a)} \frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} d\xi = \int\limits_{|\xi-a|=R'} \sum_{n=0}^{\infty} f(\xi) \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

Weźmy teraz z: $r < r' < r'' \leqslant |z-a| \leqslant R'' < R' < R$

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{(R'')^n}{(R')^{n+1}} = \left(\frac{R''}{R'}\right)^n \cdot \frac{1}{R'}$$

f jest holomorficzna więc ograniczona na okręgu $|\xi-a|=R'$ przez $M(a,R')$
Szereg pod całką jest zbieżny jednostajnie na $\overline{R}(a,r'',R'')$ i można zamienić kolejność całkowania i sumowania:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \oint\limits_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

$$\frac{\xi-a}{\xi-a+a-z} = \frac{\xi-a}{(z-a)\left[\frac{\xi-a}{z-a}-1\right]}$$

Drugą całkę „traktujemy" inaczej:

$$\oint\limits_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \oint\limits_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-a+a-z} d\xi = \oint\limits_{\dots} \frac{f(\xi)d\xi}{(z-a)\left[\frac{\xi-a}{z-a}-1\right]} = \oint \frac{f(\xi)}{z-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n}$$

$$= \oint\limits_{\dots} \sum_{n=0}^{\infty} f(\xi) \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \qquad \left| f(\xi) \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \right| < M(a,r') \frac{(r')^n}{(r'')^{n+1}}$$

znowu można zamienić kolejność:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \oint f(\xi)(\xi-a)^n d\xi$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \oint_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}} \oint_{|\xi-a|=r'} f(\xi)(\xi-a)^n\,d\xi$$

$$k=-(n+1)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}(z-a)^k \oint_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}\,d\xi$$

wyglądają jak trzeba

Oba okręgi o promieniach r' i R' leżą w obszarze holomorficzności, można je więc zastąpić przez wspólny promień $r<\rho<R$. Wykazaliśmy zbieżność jednostajną na zwartym $\overline{\mathcal{R}}(a, r'', R'')$ ale r'' i R'' były dowolne, zatem ostatecznie mamy niemal jednostajną zbieżność na $\mathcal{R}(a,r,R)$. ∎

Konsekwencje i wnioski w następnym wykładzie.

Karl
Weierstrass
1815–1897

1813–1854
Pierre Alphonse Laurent