Homografie problemowo

1. *Odwzorowaniem afinicznym* (Af'em) nazywamy odwzorowanie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $g(z) = az + b$, $a \neq 0$. Kilka łatwych faktów nt. odwz. afinicznych:

   (a) g jest bijekcją $\mathbb{C}$ na siebie.

   (b) Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $w_1 \neq w_2$ istnieje dokładnie jedno odwz. afiniczne przeprowadzające z_1 na w_1 oraz z_2 na w_2.
   Odp. Niech szukane g ma postać: $w = g(z) = az+b$. Wtedy warunki: $w_1 = g(z_1)$ i $w_2 = g(z_2)$ tworzą układ dwóch równań liniowych na współczynniki a, b.

2. *Homografią* nazywamy odwzorowanie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$. Pokazać, że:

   (a) homografia jest bijekcją $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.
   Odp. Przedstawiamy homografię jako złożenie Af'a, inwersji i Af'a:

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = (g_1 \circ k \circ g_2)(z), \tag{1}$$

   gdzie:

$$g_2(z) = cz + d, \qquad k(z) = \frac{1}{z}, \qquad g_1(z) = \frac{bc - ad}{c} z + \frac{a}{c}.$$

   g_1, g_2 – Af'y, więc bijekcje; k – inwersja – też bijekcja; złożenie jest więc bijekcją.

   (b) Znaleźć odwzorowanie odwrotne do danej homografii.
   Odp. $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $czw + dw = az + b$, $z(cw - a) = b - dw$, $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$.

   (c) Pokazać, że złożenie dwóch homografii jest homografią.
   Odp. By simple calculation.

3. Zapisać równanie okręgu oraz prostej na płaszczyźnie zespolonej (tzn. wyrazić równania prostej i okręgu przez z i $\bar{z}$ zamiast x i y).
   Odp. Ponieważ: $z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$, to: $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, i wstawiamy to do równania okręgu o środku w p. $(a, b) = a + ib$ i promieniu R. Mamy, po pomnożeniu przez 4:

$$\begin{aligned} 4R^2 &= (2x - 2a)^2 + (2y - 2b)^2 = (z + \bar{z} - 2a)^2 + (i\bar{z} - iz - 2b)^2 \\ &= z^2 + \bar{z}^2 + 4a^2 + 2z\bar{z} - 4az - 4a\bar{z} - z^2 - \bar{z}^2 + 4b^2 + 2z\bar{z} - 4ib\bar{z} + 4ibz \\ &= 4z\bar{z} + z(-4a + 4ib) + \bar{z}(-4a - 4ib) + 4(a^2 + b^2); \end{aligned}$$

   Po przekształceniu i oznaczeniu: $\gamma = -a + ib$ oraz $\delta = a^2 + b^2 - R^2 = \gamma\bar{\gamma} - R^2 \in \mathbb{R}$ mamy

$$z\bar{z} + \gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} + \delta = 0.$$

   Mamy przy tym: $\gamma\bar{\gamma} - \delta = R^2 \geqslant 0$.
   Pozostaje jeszcze rozpatrzyć równania prostych: $Ax + By + C = 0$ $(A, B, C \in \mathbb{R})$. Mamy:

$$2Ax + 2By + 2C = 0 = Az + A\bar{z} - iBz + iB\bar{z} + C = (A - iB)z + (A + iB)\bar{z} + C = 0$$

   lub, oznaczając $\Gamma = A - iB$, możemy zapisać równanie okręgu w postaci

$$\Gamma z + \bar{\Gamma}\bar{z} + C = 0.$$

4. Pokazać, że homografia przeprowadza okrąg uogólniony na okrąg uogólniony.
Odp. *Pierwszy sposób* – bezpośredni rachunek, przydługi, ale do ogarnięcia. *Drugi sposób* (pozwalający zaoszczędzić nieco rachunków)– wykorzystanie zad. 2a. Zauważmy, że odwz. afiniczne, jako złożenie translacji i skalowania (zespolonego), przekształca prostą na prostą i okrąg na okrąg. Zobaczmy jeszcze, co robi inwersja. Jej działanie na prostą nie przechodzącą przez zero ($C \neq 0$) daje

$$\Gamma z + \bar{\Gamma}\bar{z} + C = 0 \to \Gamma\frac{1}{z} + \bar{\Gamma}\frac{1}{\bar{z}} + C = 0 \Longrightarrow \frac{\Gamma}{C}\bar{z} + \frac{\bar{\Gamma}}{C}z + z\bar{z} = 0$$

więc okrąg. Gdy $C = 0$ to obrazem prostej $\Gamma z + \bar{\Gamma}\bar{z} = 0$ jest prosta $\Gamma\bar{z} + \bar{\Gamma}z = 0$. Wreszcie, dla $\delta \neq 0$, okrąg przechodzi w:

$$z\bar{z} + \gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} + \delta = 0 \to \frac{1}{z\bar{z}} + \gamma\frac{1}{z} + \bar{\gamma}\frac{1}{\bar{z}} + \delta = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta}\bar{z} + \frac{\bar{\gamma}}{\delta}z + z\bar{z} = 0,$$

więc okrąg. Gdy zaś $\delta = 0$, to

$$z\bar{z} + \gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} = 0 \to \frac{1}{z\bar{z}} + \gamma\frac{1}{z} + \bar{\gamma}\frac{1}{\bar{z}} = 0 \Longrightarrow 1 + \gamma\bar{z} + \bar{\gamma}z = 0,$$

więc obrazem jest prosta.
Każde z trzech przekształceń przeprowadza okrąg uogólniony w okrąg uogólniony, więc ich złożenie tak samo.

5. **a)** Znaleźć obraz górnej półpłaszczyzny (tzn. $z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \geqslant 0$) przy homografii $w = \frac{z+i}{z-i}$.
b) Znaleźć obraz ćwiartki płaszczyzny, dany przez równania: $y \geqslant 1$, $x \geqslant 1$ przy tejże homografii.

6. Wykazać,że homografia $h(z) := \frac{z-a}{z-\bar{a}}$, $Im(a) > 0$ przekształca górną półpłaszczyznę na koło $|z| < 1$. Znaleźć obrazy półprostych $\{(b, y)\ ,\ y > 0\}$ oraz półokręgów $\{(x, y)\ :\ y > 0\ ,\ (x - b)^2 + y^2 = r^2\}$.

7. Wykazać, że dla każdych 2 trójek punktów $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ istnieje *dokładnie jedna* homografia h taka, że $h(z_i) = w_i$.

8. *Homografie zachowujące prostą rzeczywistą.* Wykazać, że jeżeli $h(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$, to h jest zadane macierzą rzeczywistą.
Odp Niech $h(z) := \frac{az+b}{cz+d}$. Jeżeli $c = 0$, to można położyć $d = 1$. Wtedy $h(0) = b \in \mathbb{R}$ oraz $h(1) = a + b \in \mathbb{R}$. Jeżeli $c \neq 0$ to można położyć $c = 1$ i mamy $h(x) = \frac{(ax+b)(x+\bar{d})}{|x+d|^2} \in \mathbb{R}$. Zatem dla $x \in \mathbb{R}$ wielomian $x^2 Im(a) + x Im(a\bar{d} + b) + Im(b\bar{d}) = 0$. Stąd $a, b, d \in \mathbb{R}$.