

Analiza zespolona, lista zadań nr 2

1 Warunki Cauchy'ego-Riemanna itd.

1. Dla następujących funkcji wypisać ich części rzeczywiste i urojone. Sprawdzić, czy następujące funkcje spełniają w całej płaszczyźnie równania Cauchy'ego-Riemanna. Sprawdzić też, czy części rzeczywiste i urojone spełniają równanie Laplace'a.

- (a) $f = z^3$;
- (b) $f = (\operatorname{Re}z)z^2$;
- (c) $f = e^{iz^2}$;
- (d) $f = \bar{z}\operatorname{Re}z$;
- (e) $f = \frac{1}{z}$;
- (f) $f = \frac{1}{z^2+1}$.

2. Sprawdzić, czy następujące funkcje są harmoniczne. Jeśli tak, to znaleźć funkcję harmonicznie sprzężoną do danej, oraz wynik zapisać jako funkcję samego z .

- (a) $x^2 - y^2 + 4xy$;
- (b) $\frac{x}{x^2+y^2}$;
- (c) $x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$;
- (d) $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;
- (e) $e^x(x \cos y - y \sin y)$.

2 Całki bez użycia residuów

Przypomnienie. Niech f – holomorficzna w $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω – otwarty; niech $a \in \Omega$, niech γ – krzywa obiegająca punkt a jednokrotnie antyzegarowo. Wtedy:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0; \tag{1}$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz; \tag{2}$$

$$f^{(n)}(a) = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \tag{3}$$

3. Obliczyć całkę $\int_{\gamma} \operatorname{Re}z dz$ dla:

- (a) $\gamma = [0, 2 + 2i]$;
- (b) γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 1.

4. Obliczyć całkę: $\int_{\gamma} |z-1||dz|$, gdzie γ – okrąg o środku w 0 i promieniu 1.

5. Obliczyć całkę $\int_{\gamma} |z|dz$, jeżeli:

- (a) $\gamma = [-i, i]$;
- (b) γ jest lewym półokręgiem łączącym punkt $-i$ z punktem i ,
- (c) γ jest prawym półokręgiem łączącym punkt $-i$ z punktem i

6. Całki Fresnela czyli Fresnelki czyli Frędzelki (Terminologia P. Ch.) Obliczyć całki Fresnela:

$$F_c = \int_0^\infty \cos(x^2)dx, \quad F_s = \int_0^\infty \sin(x^2)dx.$$

Odp. Obie $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$. **Rozw.** Scałkujemy funkcję $f(z) = e^{iz^2}$ po konturze $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_R \cup \Gamma_2$, gdzie: $R \in \mathbb{R}_+$; $\Gamma_1 = [0, R]$; $\Gamma_R = \{z \in C(0, R), 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$; Γ_2 – odcinek zamykający kontur Γ , tzn. odcinek łączący $e^{i\pi/4}R$ z zerem.

Ponieważ $f(z)$ jest holomorphyzna na całej \mathbb{C} , to

$$\int_{\Gamma} e^{iz^2} dz = 0$$

Obliczmy lub oszacujmy całki na każdej części konturu Γ .

- $$\int_{\Gamma_1} e^{iz^2} dz = \int_0^R (\cos(x^2) + i \sin(x^2))dx \xrightarrow{R} F_c + iF_s \quad (4)$$

– więc po przejściu $R \rightarrow \infty$ otrzymamy oba Frędzelki.

- $\int_{\Gamma_3} e^{iz^2} dz$: Sparametryzujemy $z \in \Gamma_3$ przez: $z = e^{i\pi/4}t, t \in [R, 0]$. Mamy więc, dla $z \in \Gamma_3$: $z^2 = e^{i\pi/2}t^2 = it^2, dz = e^{i\pi/4}dt$, zatem:

$$\int_{\Gamma_3} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{-t^2} e^{i\pi/4} dt \xrightarrow{R} -\frac{1}{2} e^{i\pi/4} \sqrt{\pi} = (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \quad (5)$$

- $\int_{\Gamma_2} e^{iz^2} dz$: Sparametryzujemy $z \in \Gamma_2$ przez: $z = Re^{i\phi}, \phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$; $e^{iz^2} = e^{iR^2 e^{2i\phi}} = e^{iR^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi)}$, $dz = iRe^{i\phi}d\phi$;

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} e^{iz^2} dz = \int_0^{\pi/4} d\phi iRe^{iR\phi} e^{iR^2 \cos 2\phi - R^2 \sin 2\phi};$$

szacujemy moduł z całki I_2 przez całkę z modułu (... – funkcja podcałkowa). *Uwaga.* Można skorzystać z lematu Jordana, ale raz oszacujemy wprost.

$$|I_2| = \left| \int_0^{\pi/4} \dots d\phi \right| \leq \int_0^{\pi/4} |\dots| d\phi = \int_0^{\pi/4} d\phi R e^{-R^2 \sin 2\phi};$$

szacujemy sinus *od dołu*, tak by $-\sin 2\phi$ był oszacowany *od góry*:

$$\forall \phi \in [0, \pi/4] : \sin 2\phi \geq \frac{4}{\pi}\phi,$$

skąd

$$|I_2| \leq R \int_0^{\pi/4} d\phi e^{-4R^2/\pi} = -R \frac{\pi}{4R^2} e^{-4R^2/\pi} \xrightarrow{R} 0.$$

Porównując (??) oraz (??) mamy:

$$F_c = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \quad F_s = \int_0^\infty \sin(x^2)dx \sqrt{\frac{\pi}{8}},$$

czyli wydawałoby się, że mamy już odpowiedź... GDYBY NIE to, że musimy się jeszcze upewnić, że Frędzelki ISTNIEJĄ! a są to całki niewłaściwe o istnieniu nieewidentnym.

Przetestujmy więc Frędzelka np. F_s , zamieniając zmienną: $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$:

$$F_s = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t dt.$$

W zerze jest to całkowne (dla Frędzelka F_c też). A co dla $t \rightarrow \infty$? Skorzystajmy z *kryterium Dirichleta*: Dla całki $I = \int_a^\infty f(t)g(t)dt$, jeśli $\int_a^M f(t)dt$ jest wspólnie ograniczona dla dowolnego M , a $g(t)$ dąży do zera monotonicznie, to I istnieje.

Tu bierzemy oczywiście $f(t) = \sin t$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ i to kończy sprawę.

7. **Ozn.** Okrąg o środku w punkcie p i promieniu r będziemy oznaczać $C(p, r)$.

Obliczyć całkę $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2} dz$, jeżeli:

- (a) $\gamma = C(0, \frac{1}{2})$;
- (b) $\gamma = C(0, 2)$;
- (c) $\gamma = C(i, 1)$;
- (d) $\gamma = C(-i, 1)$.

Wsk. Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste.

8. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$$

gdzie $\gamma = C(2+i, \sqrt{2})$. *Wsk.* Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

9. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{z}{z^4 - 1} dz$$

gdzie $\gamma = C(a, a)$, $a > 1$. *Wsk.* Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste i korzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

10. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$$

gdzie $\gamma = C(0, 2a)$, $a > 0$. *Wsk.* jw.

11. Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

gdzie:

- (a) $\gamma = C(0, \frac{1}{2})$,
- (b) $\gamma = C(1, \frac{1}{2})$.

Wsk. Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego dla drugiej pochodnej funkcji holomorficzej.

3 Taylor & Laurenty

Tw. Laurenta: Niech $f(z)$ będzie holomorficzną na okręgach współśrodkowych $C(a, R)$ i $C(a, r)$ (gdzie $r < R$) oraz w pierścieniu pomiędzy nimi. Wtedy w każdym punkcie z pierścienia $f(z)$ ma rozwinięcie postaci

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots + \frac{b_1}{z - a} + \frac{b_2}{(z - a)^2} + \dots, \quad (6)$$

gdzie

12. Dla podanych niżej funkcji znaleźć cztery początkowe różne od zera współczynniki rozwinięcia w szereg Taylora wokół $z = 0$, oraz podać promień zbieżności R odpowiedniego szeregu Taylora:

- (a) $\exp \frac{z}{1-z}$;
- (b) $\sin \frac{z}{1-z}$;
- (c) $\cos^2 z$;
- (d) $\frac{1}{\cos z}$.

13. Rozwinąć funkcję $f(z) = \frac{1}{1-z}$ w szereg Laurenta w obszarach: I: $|z| < 1$, II: $|z| > 1$, explicite licząc całki.

Odp. Szeregi geometryczne w odpowiedniej zmiennej: I. $f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$, II. $f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots$

14. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:

- (a) $|z| < 1$;
- (b) $1 < |z| < 2$;
- (c) $|z| > 2$.

15. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:

- (a) $|z| < 1$;
- (b) $1 < |z| < 2$;
- (c) $|z| > 2$.

16. Pokazać, że

$$f(z) \equiv \exp \left[\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] = J_0(x) + zJ_1(x) + z^2J_2(x) + \dots + z^nJ_n(x) + \dots \\ - \frac{1}{z}J_1(x) + \frac{1}{z^2}J_2(x) + \dots + \frac{(-1)^n}{z^n}J_n(x) + \dots \quad (7)$$

gdzie

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta. \quad (8)$$

Rozw. Punktem osobliwym $f(z)$ jest jedynie $z = 0$ (jaki to punkt osobl.? ppo,b,pio?) więc na podstawie tw. Laurenta można napisać rozwinięcie $f(z)$:

$$\exp \left[\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \exp \left[\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{z^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \exp \left[\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] z^{n-1} dz,$$

gdzie C, C' są dowolnymi okręgami o środku w $z = 0$. Można więc w obu przypadkach wziąć okrąg jednostkowy. Mamy więc parametryzację: $z = e^{i\theta}$, $a - \frac{1}{z} = 2i \sin \theta$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$ i mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} e^{-ni\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta;$$

część urojona a_n jest równa zero, bo $\text{Im } a_n = \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$, co można stwierdzić, zamieniając zmienną $\theta \rightarrow 2\pi - \theta$.

Mamy więc, zgodnie z definicją (??): $a_n = J_n(x)$, $b_n = (-1)^n J_n(x)$. To ostatnie wynika z faktu, że rozwinięcie Laurenta nie zmienia się tu przy zamianie $z \rightarrow -\frac{1}{z}$. *Uwaga.* Współczynniki $J_n(x)$ są to *funkcje Bessela*, a wzór (??) może służyć jako jedna z definicji tychże.

17. Znaleźć residua funkcji:

- (a) $\frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)}$ w punktach $0, 1, -1$;
- (b) $\frac{e^{z^2}}{z^2(z-1)}$ w punktach $0, 1$;
- (c) $\frac{e^{ez}}{1-z^4}$ w punktach $1, -1, i, -i$;
- (d) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$ ($a \neq 0$) w punktach $ai, -ai$; **Odp.** $\frac{-ie^{-am}}{4a^3}(am+1)$ w punkcie ai
- (e) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^3}$ ($a \neq 0$) w punktach $ai, -ai$;
- (f) $(z^3 - z^5)^{-1}$ w punktach osobliwych;
- (g) $\text{ctg}^3 z$ w punktach osobliwych;
- (h) $\sin \frac{z}{z+1}$ w punktach osobliwych;
- (i) $\frac{1}{(1+z^2)^4}$ z punkcie i ;
- (j) $\frac{z^6}{(1+z)^3}$ w punkcie -1 .

4 Całki trygonometryczne

18. Wykazać, że przy $0 < b < a$ zachodzi:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

19. Wykazać, że przy $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos 2\theta} = \pi \frac{1 - a + a^2}{1 - a}$$

20. Wykazać, że dla $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + a \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}^3}$$

5 Całki z funkcji wymiernych

21. Wykazać, że

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3} \quad (a > 0);$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a + 2b)}{2ab^3(a + b)^2}, \quad a, b > 0;$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{(a^4 + x^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}, \quad a > 0.$$

6 Całki z funkcji wymiernych razy f. trygonometryczne

22. Wykazać, że

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \quad (a > 0);$$

$$(b) \int_0^{\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi e^{-a}}{4a} \quad (a > 0);$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{b^2 - a^2} \left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b} \right) \quad (a \neq b, a, b > 0);$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi e^{-a}(a^2 + 3a + 3)}{2^3 a^5} \quad (a > 0); \text{ Uwaga. wynik sprawdzony dla } a = 1 \text{ only}$$

7 Całki z funkcji wieloznacznych

Terminologia: *Konturem ODS*¹ będziemy nazywać figurę, złożoną z dwóch półokręgów o promieniach r oraz R ($R > r$), o środkach w 0 i leżących w górnej półpłaszczyźnie, oraz odcinków $[-R, -r]$ i $[r, R]$, leżących na osi rzeczywistej.

23. Całkując funkcję $f(z) = (\text{Log} z)^2 (z^2 + a^2)^{-1}$ po konturze ODS wykazać, że przy $a > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{8a} (\pi^2 + 4(\log a)^2), \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

24. Wykazać w podobny sposób, że

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1 + x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

¹Geneza nazwy ODS będzie podana na życzenie zainteresowanych

25. Całkując po "dziurce od klucza" funkcję: $\exp(a\text{Log}z(z^2+1)^{-2})$ wykazać, że dla $-1 < a < 3$

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi(1-a)}{4 \cos \frac{\pi a}{2}}.$$

Skąd się bierze powyższy warunek na a ?

26. Całkując funkcję $\frac{\text{Log}z}{1+z^2}$ wzdłuż brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R\} \cap \{z : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$ wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^4} dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

27. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2} dx = 2^{-3/2} \pi a^{-5/2} \left(\frac{3}{2} \log a - 1 - \frac{3\pi}{4} \right), \quad a > 0.$$

28. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log 2.$$

Wsk. Całkować funkcję $\frac{\text{Log}(z+i)}{1+z^2}$ po brzegu górnego półkola $K(0, R)$.