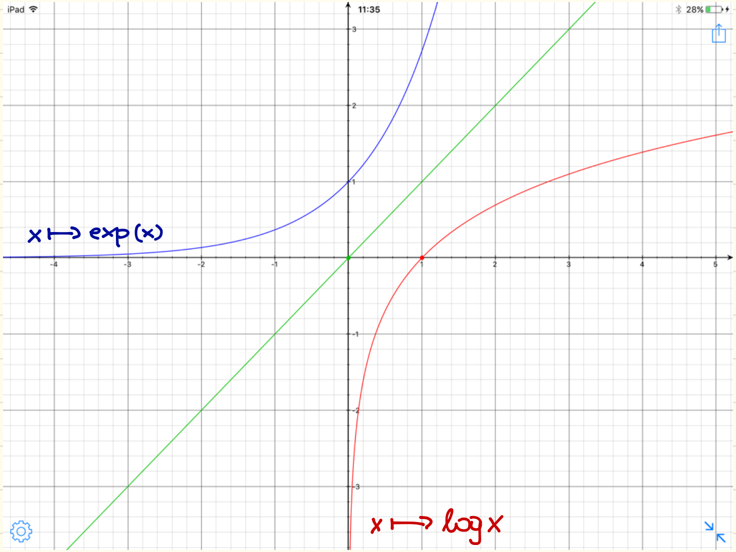
W dziedzinie rzeczywistej funkcja $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest injekcją i bijekcją $\mathbb{R}$ na $]0, +\infty[$



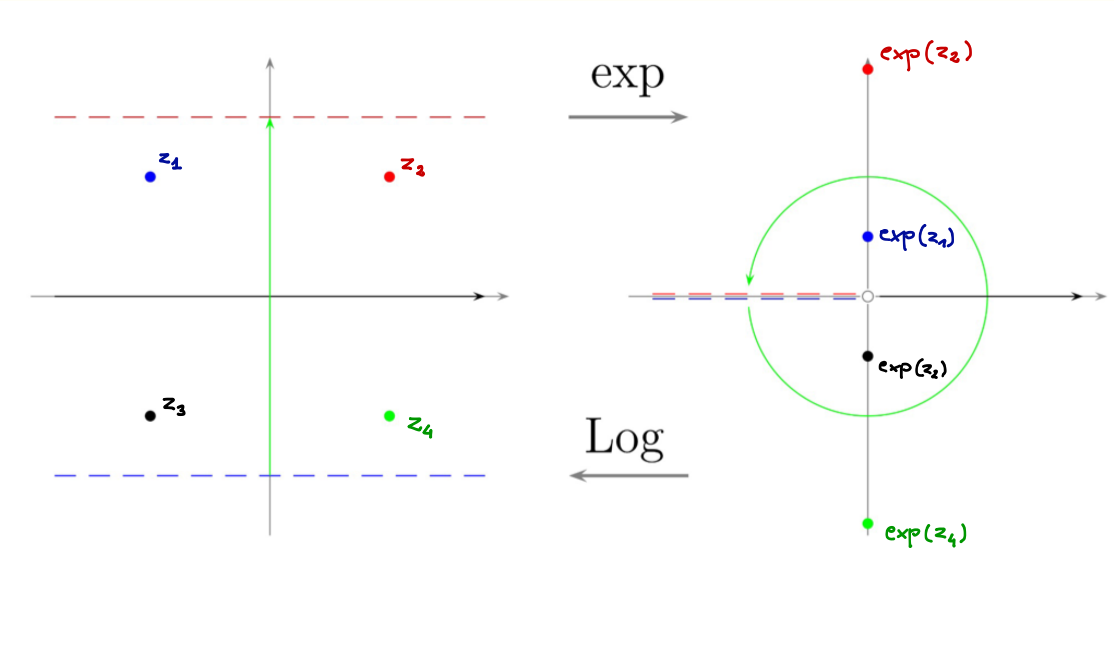

Funkcja $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nie jest bijekcją

$$\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy)$$
$$= \exp(x)(\cos y + i \sin y)$$

$$\exp(z) = \exp(z') \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') + 2k\pi \end{cases}$$

Żeby zdefiniować logarytm w dziedzinie zespolonej jako funkcję odwrotną trzeba ograniczyć dziedzinę. Można to zrobić na wiele sposobów!

$$\exp : \mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{]-\infty, 0]\}$$




$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]) \longrightarrow \mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[$$

Gałąź główna logarytmu.

$$\mathrm{Log}(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$$

$$\varphi \in ]-\pi, \pi[$$

Zauważmy, że $\exp(\mathrm{Log}(z)) = z$ $\quad \frac{d}{dz}\exp(\mathrm{Log}(z)) = 1 = \exp'(\mathrm{Log}(z))\,\mathrm{Log}'(z) = z\,\mathrm{Log}'(z)$

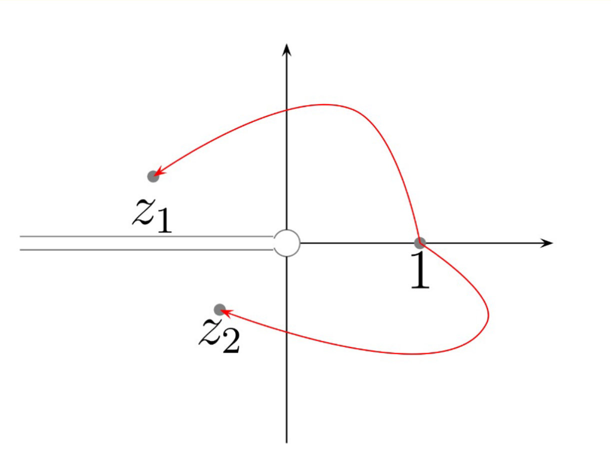
$$\Downarrow$$

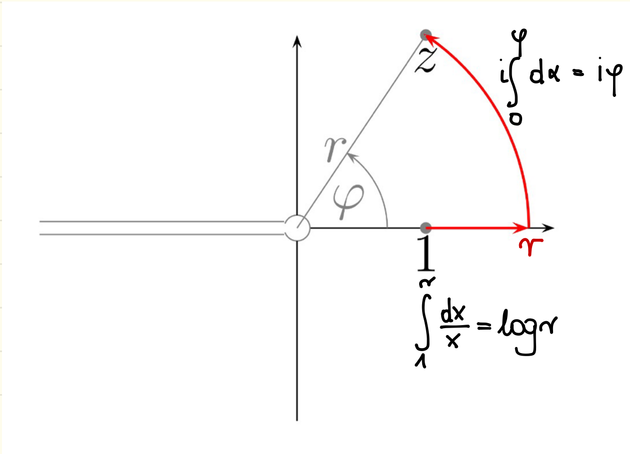
$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z) = \frac{1}{z}$$

Zgodnie z twierdzeniem Morery powinniśmy mieć równość

$$\mathrm{Log}(z) = \int_a^z \frac{1}{z}\,dz \qquad \text{dla pewnego } a \in \mathbb{C} \setminus \{]-\infty, 0]\}$$

Gałąź główną logarytmu otrzymamy dla $a = 1$



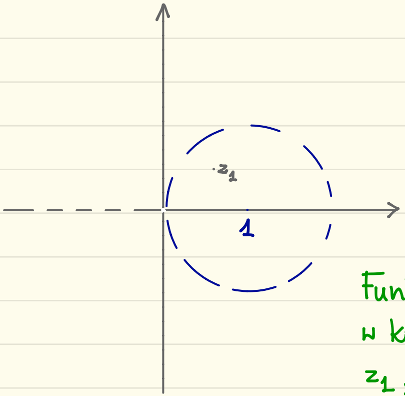
Rozwinięcie w szereg: $\mathrm{Log}'(z+1) = \dfrac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ całkujemy wyraz po wyrazie

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

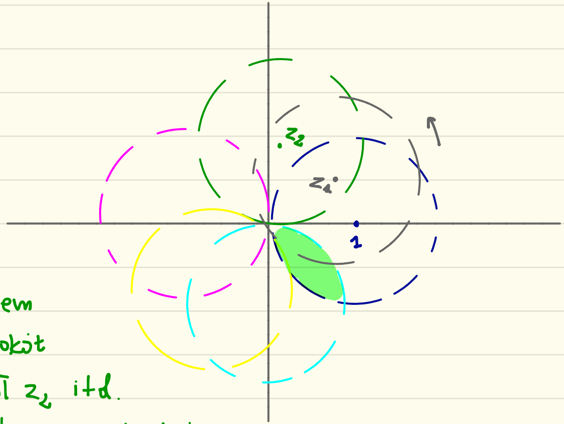
$R = 1$ promień zbieżności

$w = 1+z$
$z = w-1$

$$\mathrm{Log}\, w = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (w-1)^n$$

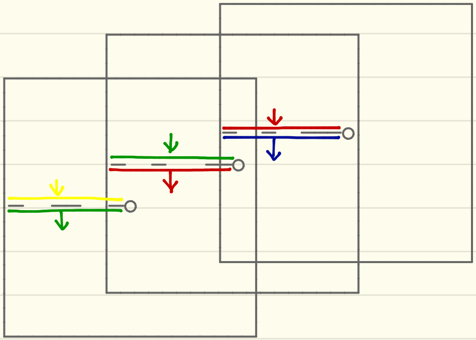


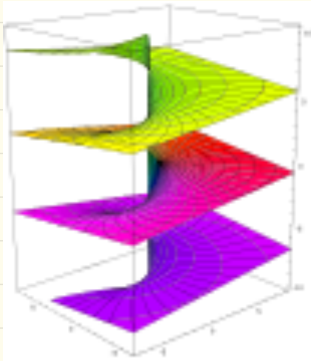

Funkcję zdefiniowaną szeregiem w kole $K(1,1)$ rozwijamy wokół $z_1$, otrzymaną funkcję wokół $z_2$ itd.
Czy funkcje w zielonym obszarze będzie identyczne z wyjściową funkcją?



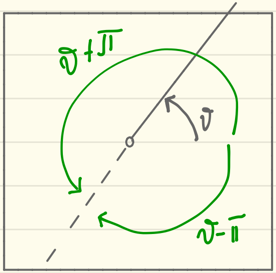
Opisany proces nazywa się przedłużeniem analitycznym. Więcej o nim będzie później. Okazuje się, że funkcja otrzymana w „ostatnim" kole różni się od wyjściowej o $2\pi i$.

Logarytm zespolony można „przedłużyć" do funkcji wieloznacznej na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Albo potraktować go jak funkcję jednoznaczną na tzw. powierzchni Riemanna.





# INNE GAŁĘZIE LOGARYTMU:




Czasami jest potrzeba używanie innej gałęzi logarytmu dla $\vartheta \in \mathbb{R}$ $\Omega_\vartheta = \mathbb{C} \setminus \{ re^{i\vartheta} : r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \}$

$$\log_\vartheta (re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi \quad \varphi \in ]\vartheta-\pi, \vartheta+\pi[$$

# FUNKCJA POTĘGOWA

Korzystając z logarytmu zdefiniować można funkcję potęgową dla potęgi $\mu \in \mathbb{C}$:

$$\Omega_0 \ni z \longmapsto z^\mu = \exp(\mu \operatorname{Log}(z))$$

szczególne sytuacje: $\mu = k \in \mathbb{Z}$ $z^k = \exp(k \operatorname{Log}(z))$ zdefiniowane na całym $\mathbb{C}$

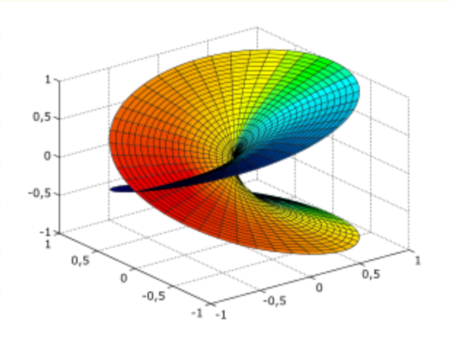
$\exp(k \operatorname{Log}(z)) = \exp(k \log r + ki\varphi) = r^k e^{ik\varphi}$ da się rozszerzyć także na $]-\infty, 0[$ bo kąt $\varphi$ po jednej i drugiej stronie cięcia różni się o $2\pi$ zatem w wykładniku $e^{ik(-\pi+2k\pi)}$

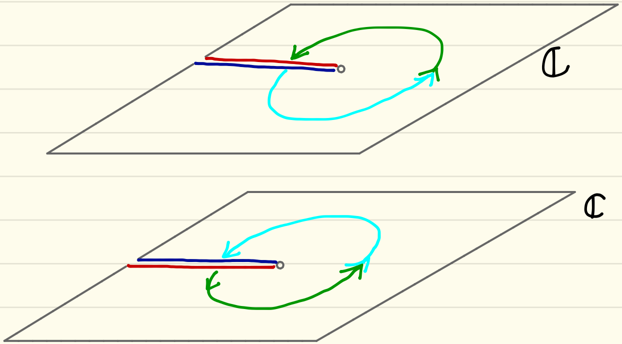
Dla $k \in \mathbb{N}$ istnieje także w $z=0$.

Dla $\mu = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\quad \exp\left(\frac{p}{q} \operatorname{Log}(z)\right) = \exp\left(\frac{p}{q} \log r + \frac{p}{q} i (\varphi + 2k\pi)\right) = r^{p/q} e^{\frac{p}{q} i\varphi} e^{i \frac{2p}{q} k\pi}$

zmieniając $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ dostaniemy różne wartości $z^{p/q}$. Funkcja ta ma $p$ gałęzi

Np $z^{1/2}$ ma dwie gałęzie. Odpowiednia powierzchnia Riemanna nie zanurza się w $\mathbb{R}^3$. Można ją sobie wyobrazić jako



Własności funkcji potęgowej (w poniższych wzorach używamy Log)

$$1^{\mu} = \exp(\mu \operatorname{Log} 1) = \exp(\mu \cdot 0) = 1$$

$$\frac{d}{dz} z^{\mu} = \frac{d}{dz} \exp(\mu \operatorname{Log} z) = \exp(\mu \operatorname{Log} z) \cdot \mu \frac{1}{z} = \mu \exp((\mu-1) \operatorname{Log} z) = \mu z^{\mu-1}$$

$\mu = a+ib \quad z^{\mu} = \exp((a+ib)(\log r + i\varphi)) = \exp(a \log r + ib \log r + ia\varphi - b\varphi)$

$$= \exp(a \log r - b\varphi) \exp(i(b \log r + a\varphi))$$

$$\binom{\mu}{n} = \frac{1}{n!} \mu(\mu-1) \cdots (\mu-n+1) \qquad (1+z)^{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} z^n \qquad R = 1.$$