WYKŁAD 1.

5.X

CIAŁO LICZB ZESPOLONYCH – przypomnienie

Ciało liczb zespolonych jako zbiór jest płaszczyzną $\mathbb{R}^2$. Działania dzięki którym płaszczyzna uzyskuje strukturę ciała to

dodawanie: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

mnożenie: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Prowadząc nudne rachunki stwierdzamy, że istotnie jest to ciało. W celu uproszczenia notacji i ułatwienia rachunków obserwujemy, że używając wyróżnionego elementu $i = (0,1)$ możemy dowolną liczbę zespoloną $z = (x, y)$ zapisać jako

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (y,0) \cdot (0,1)$$

Jeśli dodatkowo zauważymy, że ciało $\mathbb{R}$ wkłada się w $\mathbb{C}$ jako podciało za pomocą odwzorowania

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto (x,0) \in \mathbb{C}$$

poprzedni rachunek możemy kontynuować (pisząc x zamiast $(x,0)$ i y zamiast $(y,0)$)

$= x + iy$ Prawa dodawania i mnożenia są jak zwykle z uwzględnieniem faktu, że $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ tzn $i^2 = -1$.

Podstawowe oznaczenia:

sprzężenie

$$z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$$

część rzeczywista i urojona

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad \text{UWAGA } \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$$

moduł

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

ze wzoru widać że $|z|$ to euklidesowa odległość od zera w sensie $\mathbb{R}^2$, dostajemy więc zwykłą topologię i możliwość różniczkowanie w sensie rzeczywistym. Różniczkowanie w sensie zespolonym wymaga zdefiniowania oddzielnie.

Odwzorowania liniowe Ponieważ $\mathbb{C}$ jako zbiór jest $\mathbb{R}^2$, ponadto dodawanie jest „zwyczajne", tzn po współrzędnych i mnożenie przez liczby rzeczywiste też zwyczajne możemy o $\mathbb{C}$ myśleć czasami jako o rzeczywistej przestrzeni wektorowej. W szczególności rozważać odwzorowanie liniowe. $\mathbb{R}$-liniowe odwzorowanie na $\mathbb{R}^2$ to oczywiście macierze 2×2 o współrzędnych rzeczywistych: $M_2(\mathbb{R})$. Mnożenie przez liczbę zespoloną też jest odwzorowaniem $\mathbb{R}$-liniowym (i $\mathbb{C}$-liniowym oczywiście)
Jaka to macierz?

$$w = a+ib \qquad w\cdot z = (a+ib)(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx)$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ax-by \\ ay+bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

W ten sposób zdefiniowaliśmy odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni (a+ib) \xmapsto{\psi} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

odwzorowanie to zachowuje działania, jest injektywne. Odwzorowanie to przyda się przy definiowaniu różniczkowania w sensie zespolonym.

Zauważmy dalej, że $\det(\psi(a+ib)) = a^2+b^2 = |a+ib|^2$

$$\psi(a+ib) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{r} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{}} & -\frac{b}{\sqrt{}} \\ \frac{b}{\sqrt{}} & \frac{a}{\sqrt{}} \end{bmatrix}}_{\det = 1.} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix}}_{\text{macierz obrotu}}$$

Druga macierz jest macierzą obrotu o kąt φ taki, że $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, ten o kąt równy argumentowi liczby zespolonej $a+ib$.

Różniczkowanie w sensie zespolonym: Rozważać będziemy funkcje jednej zmiennej zespolonej

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Wartość funkcji f w punkcie $z = x+iy$ rozłożyć można na część rzeczywistą i urojoną, w standardowych oznaczeniach

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

Każda funkcja zmiennej zespolonej o wartościach w $\mathbb{C}$ związana jest więc z dwiema funkcjami u i v dwóch zmiennych rzeczywistych x, y. W tym sensie możemy pytać czy f jest różniczkowalna w punkcie $z = x+iy$ w sensie rzeczywistym jako odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Jeśli tak, to zgodnie z definicją istnieje odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe $f'(z)$ (czyli macierz 2×2) takie, że

$$f(x+\delta x + i(y+\delta y)) = f(z) + f'(z)\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + R(z; \delta x, \delta y)$$

gdzie R jest resztą.

DEFINICJA Mówimy, że f jest różniczkowalna w $z = x+iy$ w sensie zespolonym jeśli $f'(z)$ jest odwzorowaniem $\mathbb{C}$-liniowym, to znaczy należy do obrazu odwzorowanie Ψ.

Sprawdźmy co to oznacza dla części rzeczywistej i urojonej odwzorowania f. Jeśli f jest różniczkowalne w punkcie $z = x+iy$ w sensie rzeczywistym to istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ i pochodna ma postać

$$f'(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Warunek $\mathbb{C}$-liniowości oznacza, że

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}}$$

Warunki te znane są jako warunki Cauchy'ego-Riemanna

FAKT: Funkcja $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ jest różniczkowalna w sensie zespolonym w punkcie z jeśli jest w tym punkcie różniczkowalna w sensie rzeczywistym i pochodne cząstkowe części rzeczywistej i urojonej spełniają warunki Cauchy-Riemanna.

Obserwacja: W takim wypadku macierz pochodnej odpowiada mnożeniu przez pewną liczbę zespoloną, którą oznaczać będziemy $f'(z)$. Z warunków Cauchy-Riemanna wynika, że ta liczba to

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \dots$$

Wygląda więc na to, że różniczkowanie funkcji zespolonych w sensie zespolonym ma coś wspólnego z różniczkowaniem funkcji rzeczywistych jednej zmiennej: $f'(x)$ jest liczbą (rzeczywistą), $f'(z)$ jest liczbą (zespoloną). Może więc można zastosować „stary" wzór na pochodną: 5

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \qquad f'(z) \overset{?}{=} \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}$$

FAKT: Funkcja f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w punkcie z wtedy i tylko wtedy gdy istnieje granica

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}.$$

Granica ta jest równa $f'(z)$.

DOWÓD: $\Rightarrow$ Jeśli f różniczkowalna w sensie zespolonym to równość

$$f(z+\delta z) = f(z) + A \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + R(z, \delta z)$$ można zapisać

$$f(z+\delta z) = f(z) + f'(z) \cdot \delta z + R(z, \delta z)$$ gdzie $\delta z = \delta x + i\delta y$ i mnożenie wektora przez macierz zastępujemy mnożeniem liczb zespolonych. Przekształcamy więc

$$f(z+\delta z) - f(z) = f'(z)\,\delta z + R(z, \delta z) \qquad /: \delta z \ (\neq 0)$$

$$\frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} = f'(z) + \frac{R(z, \delta z)}{\delta z}$$

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} = f'(z) + \underbrace{\lim_{\delta z \to 0} \frac{R(z, \delta z)}{\delta z}}_{=0}$$ co wynika z faktu, że R jest resztą.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że istnieje $w = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}$. Oznacza to, że

dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\Delta > 0$ taka, że dla $|\delta z| < \Delta$

$$\left| w - \frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z}\right| < \varepsilon \qquad \left|\frac{1}{\delta z}\left(w\delta z - f(z+\delta z)+f(z)\right)\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|\delta z|}\left|f(z+\delta z)-f(z)-w\delta z\right| < \varepsilon$$

$$\underbrace{f(z+\delta z)-f(z)-w\delta z}_{R(z,\delta z)} \in K(0, \varepsilon\cdot\delta z)$$

$R(z,\delta z) \in K(0, \varepsilon\cdot\delta z) \Rightarrow \frac{R(z,\delta z)}{\delta z} \in K(0,\varepsilon)$ zatem R jest resztą. Możemy zapisać więc, w sensie rzeczywistym

$$f(z+\delta z) = f(z) + \begin{bmatrix} \operatorname{Re} w & -\operatorname{Im} w \\ \operatorname{Im} w & \operatorname{Re} w \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix} + R(z,\delta z)$$

f jest więc różniczkowalna w sensie rzeczywistym i pochodna odpowiada mnożeniu przez liczbę zespoloną w. Można więc napisać $w = f'(z)$. $\square$

Funkcje różniczkowalne w sensie zespolonym na obszarze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}$ (tzn. w każdym punkcie tego obszaru) nazywamy **holomorficznymi na Ω**. Zbiór funkcji holomorficznych na Ω oznaczać będziemy $\mathcal{A}(\Omega)$.

FAKT: Zachodzą „zwykłe" prawa różniczkowania dla różniczkowania w sensie zespolonym tzn.:

$$f,g \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow f+g \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ i } (f+g)'(z) = f'(z)+g'(z)$$

$$\Rightarrow f\cdot g \in \mathcal{A}(\Omega) \quad (f\cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$f \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ i } f \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ i } \left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}$$

$$f \in \mathcal{A}(\Omega), g \in \mathcal{A}(f(\Omega)) \Rightarrow g\circ f \in \mathcal{A}(\Omega) \text{ i } (g\circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

$f \in \mathcal{A}(\Omega)$ i f jest bijekcją Ω na $f(\Omega)$ to $f^{-1} \in \mathcal{A}(f(\Omega))$ i

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{gdzie } w = f(z)$$

7

SYMBOLE $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

O tych symbolach łatwiej mówić znając podstawy geometrii różniczkowej, w szczególności pojęcie wektora stycznego. Poradzimy sobie jednak bez tego.

Niech $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ będą zwykłymi symbolami różniczkowania cząstkowego. Dla funkcji $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są to różniczkowania czyli mówiąc najogólniej odwzorowania liniowe działające między algebrami i spełniające regułę Leibniza. Traktując funkcje $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jako pary funkcji $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i działając „po współrzędnych" to znaczy oddzielnie na część rzeczywistą i urojoną możemy rozszerzyć to różniczkowanie na funkcje $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Czy to nadal jest różniczkowanie?

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big([u(x,y)+i\,v(x,y)][U(x,y)+i\,V(x,y)]\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(u(x,y)U(x,y) - v(x,y)V(x,y) +$$

$$i\big(u(x,y)V(x,y) + U(x,y)v(x,y)\big)\Big) =$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}U + u\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}V - v\frac{\partial V}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x}V + u\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}v + U\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}U - \frac{\partial v}{\partial x}V + i\left(\frac{\partial u}{\partial x}V + \frac{\partial v}{\partial x}U\right)\right] + \left[u\frac{\partial U}{\partial x} - v\frac{\partial V}{\partial x} + i\left(u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)[U + iV] + [u + iv]\left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}\right] =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)\right](U+iV) + (u+iv)\left[\frac{\partial}{\partial x}(U+iV)\right]$$

Okazuje się że jest. Możemy więc działać $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ na funkcje zmiennej zespolonej jeśli tylko są w sensie rzeczywistym różniczkowalne. Możemy także tworzyć kombinacje liniowe tych różniczkowań z zespolonymi współczynnikami. Na szczególną uwagę zasługują

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$$ 8

Załóżmy, że $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna. Obliczmy $\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)f$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2f'(z)$$

Warunki C-R

Powyższy rachunek usprawiedliwia oznaczenie $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Do kompletu dodajemy $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ Rachunkiem można sprawdzić, że dla funkcji holomorficznych $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że

$$z = x+iy \to x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad y = \frac{1}{2}(z-\bar{z})$$

$$u(x,y) = u\left(\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \frac{1}{2}(z-\bar{z})\right) \text{ i podobnie } v$$

tzn. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ można wyrazić jako funkcję z i $\bar{z}$, to, nieco nieprecyzyjnie można powiedzieć, że funkcje holomorficzne to są te funkcje różniczkowalne w sensie rzeczywistym, które zależą tylko od z a nie zależą od $\bar{z}$.

Policzmy także $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta$ jeśli działamy na funkcje różniczkowalne przynajmniej dwukrotnie w sensie rzeczywistym.

Skoro dla $f \in A(\Omega)$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ to także $\Delta f = 0$. Operator jest rzeczywisty, działa więc oddzielnie na część rzeczywistą i urojoną: 9.

$\Delta f = \Delta u + i \Delta v$ zatem $\Delta f = 0$ oznacza $\Delta u = 0$ i $\Delta v = 0$.

Część urojona i część rzeczywista funkcji holomorficznych to funkcje harmoniczne.