METODA PUNKTU SIODŁOWEGO

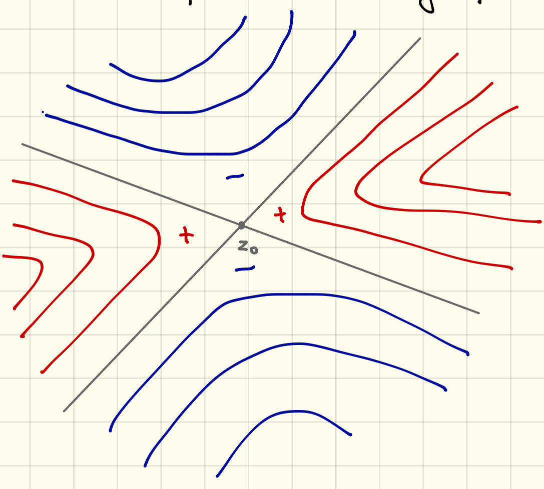
Metoda punktu siodłowego dotyczy oszacowania wartości całki

$$\int_\gamma \varphi(z)\, e^{\lambda f(z)}\, dz$$

gdzie φ, f są holomorficzne w pewnym obszarze Ω zawierającym krzywą γ i dla dużych wartości λ. Metoda ma zastosowanie oczywiście nie zawsze tylko w pewnych okolicznościach. Zauważmy przede wszystkim, że wobec holomorficzności funkcji podcałkowej przebieg krzywej γ możemy zmieniać zachowując punkty początkowy z_1 i końcowy z_2. W pewnych sytuacjach okazuje się że tę krzywą można wybrać w taki sposób, że dominujący wkład do całki mają wartości w pobliżu jednego punktu. Chodzi mianowicie o punkt siodłowy funkcji $u(x,y)$ będącej częścią rzeczywistą f. Dalej stosować będziemy zwykłe oznaczenie, tzn

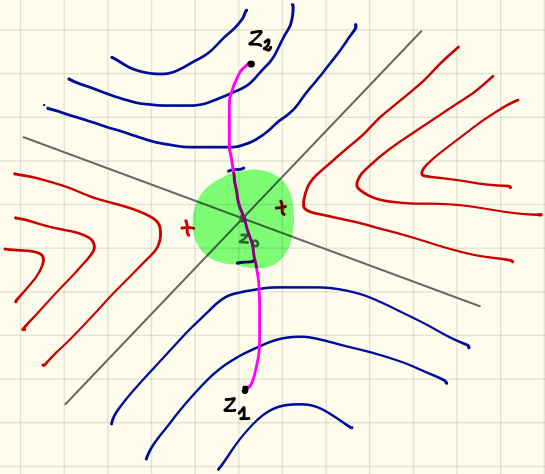
$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ Funkcja u jest funkcją harmoniczną, zatem w obszarze Ω nie może mieć maksimum. Jedyne punkty krytyczne we wnętrzu Ω to muszą być punkty siodłowe. Załóżmy teraz, że

u ma we wnętrzu Ω dokładnie jeden punkt siodłowy $z_0 = x_0 + iy_0$.
W otoczeniu punktu siodłowego poziomice u wyglądają jakoś tak:



Poziomice wartości $u(x_0, y_0)$ dzielą obszar Ω na cztery sektory w dwóch z nich funkcja u jest większa $(+)$ a w dwóch mniejsza $(-)$ niż w z_0.

Krzywa po której będziemy całkować musi przechodzić przez z_0 w ten sposób, aby z_0 był maksimum u na tej krzywej.



Oznacza to, że krzywa musi przechodzić przez niebieskie sektory.

Ponadto wartość u musi być na „ogonach" mniejsza niż w z_0, co nakłada ograniczenie na położenie punktów początkowego i końcowego. Dokładniej rzecz biorąc z_1 i z_2 muszą leżeć w różnych niebieskich sektorach.

Ważne jest także, żeby krzywa przecinała z_0 pod odpowiednim kątem. Tak żeby u malało możliwie szybko i jednocześnie ϑ było stałe, żeby f nie podlegała silnym oscylacjom w otoczeniu z_0.

W dalszym ciągu załóżmy, że $f(z) = f(z_0) + \underbrace{\tfrac{1}{2} f''(z_0)}_{c_0}(z-z_0)^2 + \dots$ i $f''(z_0) \neq 0$

$z - z_0 = r e^{i\varphi} \qquad c_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y) = u(x_0,y_0) + i\vartheta(x_0,y_0) + r^2 r_0 e^{i(2\varphi+\varphi_0)} + \Theta(r^3) =$$

$$= u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + r^2 r_0\left[\cos(2\varphi+\varphi_0) + i\sin(2\varphi+\varphi_0)\right] + \Theta(r^3)$$

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = r^2 r_0 \cos(2\varphi+\varphi_0) + \Theta(r^3)$$
$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = r^2 r_0 \sin(2\varphi+\varphi_0) + \Theta(r^3)$$

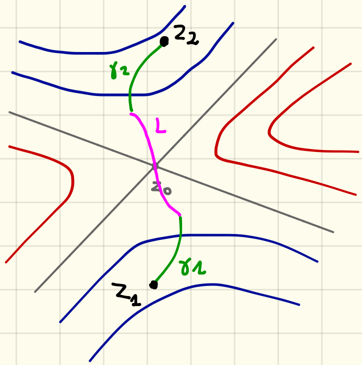
φ przebiega odcinek $[0,2\pi]$ zatem $2\varphi+\varphi_0$ przebiega odcinek długości 4π

Różnica $u(x,y)-u(x_0,y_0)$ zmienia więc znak 4 razy co odpowiada naszemu rysunkowi. Jeśli $f''(z_0)=0$ i rząd rozwinięcia jest wyższy rysunek musi być inny. My zajmujemy się $f''(z_0)\neq 0$. $v=\text{const}$ oznacza z dokładnością do wyrazów wyższego rzędu, że $\sin(2\varphi+\varphi_0)=0$ tzn

$2\varphi+\varphi_0 = k\pi \qquad \varphi = \frac{1}{2}(k\pi - \varphi_0) \qquad k=0,1,2,3$

Jednocześnie wybieramy φ: $\cos(2\varphi+\varphi_0)=-1$ bo interesuje nas kierunek najszybszego spadku u zatem k należy wziąć 1 bądź 3

$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\pi-\varphi_0)$ $\quad\varphi_2=\frac{1}{2}(3\pi-\varphi_0)$ kąty te różnią się o π i odpowiadają przeciwnym kierunkom całkowania.



Całkować będziemy po krzywej γ składającej się z części γ_1, γ_2 i L. L jest to kawałek krzywej na której v jest stała i równa $v(x_0,y_0)$, γ_1 i γ_2 łączą punkty z_1 i z_2 z końcami L. Załóżmy także, że na L istnieje otoczenie z_0 długości 2δ takie, że poza tym otoczeniem $u(x_0,y_0)-u(x,y) \geq h > 0$

Dla części γ_1, γ_2 mamy oszacowanie

$$\int_{\gamma_i} \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda f(z_0)} \underbrace{\int_{\gamma_i} \varphi(z) e^{\lambda(f(z)-f(z_0))} dz} = e^{\lambda f(z_0)} \mathcal{O}\left(e^{-\lambda h}\right)$$

$$\left|\int_{\gamma_i} \varphi(z) e^{\lambda[f(z)-f(z_0)]} dz\right| \leq \int |\varphi(z)| e^{\lambda(u(z)-u(z_0))} dz \leq$$

$$\lambda(u(z_0)-u(z)) = (\lambda-\lambda_0)[u(z_0)-u(z)] + \lambda_0[u(z_0)-u(z)] \geq (\lambda-\lambda_0)h + \lambda_0 u(z_0) - \lambda_0 u(z)$$

$$\lambda(u(z)-u(z_0)) \leq \lambda_0 u(z) - \lambda_0 u(z_0) - h(\lambda-\lambda_0)$$

$$\leq \int |\varphi(z)| e^{\lambda_0 u(z) - \lambda_0 u(z_0) - h(\lambda-\lambda_0)} dz = e^{-\lambda_0 u(z_0)} e^{h\lambda_0} e^{-h\lambda} \underbrace{\int |\varphi(z)| e^{\lambda_0 u(z)} dz}_{M} =$$

$$\underbrace{M e^{\lambda_0 u(z_0)} e^{h\lambda_0}}_{\text{const}} e^{-h\lambda} = \mathcal{O}\left(e^{-h\lambda}\right)$$

Pozostaje oszacowanie całki po L na której $\vartheta(x,y)$ jest stała

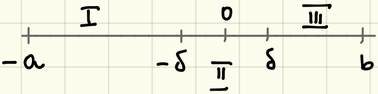
$$\int_L \varphi(z)\, e^{\lambda(u(x,y)+i\underbrace{\vartheta(x,y)}_{\vartheta(x_0,y_0)})}\, dz = e^{i\vartheta(x_0,y_0)} \int_L \varphi(z)\, e^{\lambda u(x,y)}\, dz =$$

parametryzujemy L długością kładąc $s=0$ w z_0

$$= e^{i\vartheta(x_0,y_0)} \underbrace{\int_{-a}^{b} \varphi(z(s))\, e^{\lambda u(x(s),y(s))} \frac{dz}{ds}\, ds}$$

całka postaci $\int_{-a}^{b} \underbrace{\phi(s)}_{\varphi(z(s))\cdot\frac{dz}{ds}}\, e^{\lambda F(s)}\, ds$ gdzie F jest rzeczywista, ma maksimum w $s=0$ ...

Takimi całkami musimy się teraz zająć. Jest łatwiej bo całkujemy po kawałku osi rzeczywistej spodziewamy się, że największy wkład do całki będzie od otoczenia $[-\delta,\delta]$ punktu 0.



Na odcinkach $\underline{I}$ i $\underline{III}$ całka szacuje się identycznie jak na γ_1 i γ_2, tzn

$$\int_{-a}^{-\delta} \phi(s)\, e^{\lambda F(s)}\, ds = e^{\lambda F(0)}\, O\left(e^{-\lambda h}\right) = e^{\lambda u(x_0,y_0)}\, O\left(e^{-\lambda h}\right)$$

Ważne rzeczy dzieją się na odcinku $[-\delta,\delta]$. Będziemy posługiwać się przybliżeniem

$$\phi(s) = \phi(0) + \phi'(0)\cdot s + O(s^2)$$

$$F(s) = F(0) + \frac{F''(0)}{2} s^2 + \mu(s) \qquad \mu(s) = c\, s^3 + O(s^4)$$

$$F''(0) < 0$$

W dalszym ciągu potrzebować będziemy pewnych lematów:

LEMAT 1.

Dla $p>0$ i $A \longrightarrow \infty$ zachodzi oszacowanie

$$\int_0^A t^{p-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(p) + O\left(e^{-A/2}\right)$$

tzn $\left|\Gamma(p) - \int_0^A t^{p-1}e^{-t}\,dt\right| \leq C\cdot e^{-A/2}$ dla wystarczająco dużych A.

DOWÓD

$$\Gamma(p) - \int_0^A t^{p-1}e^{-t}\,dt = \int_A^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt \overset{t=y+A}{=} \int_0^\infty (y+A)^{p-1}e^{-y-A}\,dy = e^{-A}\int_0^\infty (y+A)^{p-1}e^{-y}\,dy$$

$$= e^{-A}\left[\int_0^A \dots + \int_A^\infty \dots\right] \underset{p>1}{\leq} e^{-A}\left[\int_0^A (2A)^{p-1}e^{-y}\,dy + \int_A^\infty (2y)^{p-1}e^{-y}\,dy\right] =$$

$$\leq e^{-A}2^{p-1}\left[A^{p-1}\underbrace{\left(1-e^{-A}\right)}_{<1} + \underbrace{\int_0^\infty y^{p-1}e^{-y}\,dy}_{\Gamma(p)}\right] \leq e^{-A}2^{p-1}\underbrace{\left[A^{p-1}+\Gamma(p)\right]}_{\text{wielomian od } A}$$

dla wystarczająco dużego A $\left(A^{p-1}+\Gamma(p)\right) < e^{A/2}$

$$\leq 2^{p-1}e^{-A/2}$$

Dla $0<p\leq 1$ mamy

$$\int_A^\infty t^{p-1}e^{-t}\,dt \leq \int_A^\infty e^{-t}\,dt = e^{-A} < e^{-A/2} \qquad \blacksquare$$

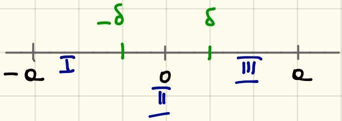
LEMAT 2

Niech $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + \mathcal{O}(t^2)$ dla $|t|<\delta$. Niech także dla pewnego $\lambda_0>0$ zbieżna będzie całka $\int_{-a}^{a} |\varphi(t)| e^{-\lambda_0 t^2} dt$

Wówczas dla $\lambda>\lambda_0$ zachodzi

$$\int_{-a}^{a}\varphi(t)e^{-\lambda t^2}dt = c_0\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{-3/2}\right)$$

DOWÓD:



Całkę po odcinku $[-a,a]$ dzielimy na trzy części I, II, III. I i III są podobne, II inne. Weźmy III:

$$\left|\int_\delta^a \varphi(t)e^{-\lambda t}dt\right| = \left|\int_\delta^a \varphi(t)e^{-(\lambda-\lambda_0)t^2}e^{-\lambda_0 t^2}dt\right| \le e^{-(\lambda-\lambda_0)\delta^2}\underbrace{\int_\delta^a|\varphi(t)|e^{-\lambda_0t^2}dt}_{\le M} \le$$

$$\le Me^{\lambda_0\delta^2}e^{-\lambda\delta^2} = \mathcal{O}\left(e^{-\lambda\delta^2}\right)$$

Podobnie damy radę z I. Inaczej traktujemy II:

$$\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(t)e^{-\lambda t}dt = \int_{-\delta}^{\delta}[c_0+c_1t+\mathcal{O}(t^2)]e^{-\lambda t^2}dt = \int_{-\delta}^{\delta}c_0e^{-\lambda t^2}dt + \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}c_1te^{-\lambda t^2}dt}_{=0} + \int_{-\delta}^{\delta}\mathcal{O}(t^2)e^{-\lambda t^2}dt$$

$$\int_{-\delta}^{\delta}c_0e^{-\lambda t^2} = 2c_0\int_0^\delta e^{-\lambda t^2}dt =$$

$u=\lambda t^2 \to t=\sqrt{\frac{u}{\lambda}}$

$du = 2\lambda t\,dt$

$dt = {du}/{2\lambda t} = \frac{du\sqrt{\lambda}}{2\lambda\sqrt{u}} = \frac{du}{2\sqrt{u\lambda}}$

$$= \cancel{2}c_0\int_0^{\lambda\delta^2}\frac{du}{\cancel{2}\sqrt{u\lambda}}e^{-u} = \frac{c_0}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\lambda\delta^2}u^{-1/2}e^{-u}du = \frac{c_0}{\sqrt{\lambda}}\left(\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\tfrac12\right)} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\lambda\delta^2}{2}}\right)\right) = c_0\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\lambda\delta^2}{2}}\right)$$

verte

$$\int_{-\delta}^{\delta} \theta(t^2)\, e^{-\lambda t^2}\, dt < C \int_0^{\delta} t^2 e^{-\lambda t^2}\, dt \overset{(*)}{=} C \int_0^{\lambda\delta^2} \frac{u}{\lambda} \cdot e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{u}} = \frac{c}{2\lambda^{3/2}} \int_0^{\lambda\delta^2} u^{1/2} e^{-u}\, du =$$

$u = \lambda t^2$

$t^2 = u/\lambda \qquad du = \lambda 2t\,dt = 2\lambda\sqrt{\frac{u}{\lambda}}\, du$

$$\frac{du}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{u}} = dt$$

$$\frac{c}{2\lambda^{3/2}}\left(\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) + O\left(e^{-\frac{\lambda\delta^2}{2}}\right)\right) = \underbrace{= O\left(\lambda^{-3/2}\right)}$$

7

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi(t)\, e^{-\lambda t^2}\, dt = c_0\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \vartheta\left(\cancel{e^{-\lambda\delta^2/2}}\, \lambda^{-1/2}\right) + \underbrace{O\left(\lambda^{-3/2}\right)} = c_0\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \vartheta\left(\lambda^{-3/2}\right)$$

∎

Wzór z lematu 2 można by niemal zastosować do naszej całki z tą różnicą że w wykładniku exp mamy nie tylko wyraz kwadratowy ale jeszcze wyższe poprawki, które powodują że nie można całkować po odcinku $[-\delta,\delta]$, tylko odcinek ten trzeba skrócić w zależności od λ: $[-\delta(\lambda),\delta(\lambda)]$, gdzie $\delta(\lambda)$ musi być funkcją o następujących własnościach

$$\delta(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0, \qquad \lambda\delta^2(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} \infty, \qquad \lambda\delta^3(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0$$

(*) ↖ okaże się czemu

np $\delta(\lambda) = \lambda^{-2/5}$ jest O.K. $\lambda\delta^2(\lambda) = \lambda^{1/5}$ $\lambda\delta^3(\lambda) = \lambda^{-1/5}$

LEMAT 3

$$\int_{-\delta(\lambda)}^{\delta(\lambda)} \varphi(t)\, e^{-\lambda t^2 + \mu(t)}\, dt = c_0\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \theta\left(\lambda^{-2/3}\right) \quad \text{dla}$$

$\varphi(t) = c_0 + c_1 t + O(t^2)$

$\mu(t) = c t^3 + O(t^4)$

i $\delta(\lambda)$ jak wyżej.

DOWÓD.

Pod całką mamy $\underbrace{\varphi(t)\, e^{\lambda\mu(t)}}_{\text{„nowe } \varphi \text{"}} e^{-\lambda t^2}$

$$\left(c_0+c_1t+O(t^2)\right)\exp\Big(\underbrace{\lambda(ct^3}+o(t^4)\Big)=$$

λt^3 musi być małe nawet dla dużych λ
stąd warunek na δ

$$=\left(c_0+c_1t+O(t^2)\right)\left[1+\lambda ct^3+\lambda O(t^4)+\frac{1}{2}\lambda^2c^2t^6\right]=$$

$$=c_0+c_1\cancel{t}+O(t^2)+\lambda c_0 \cancel{c}t^3+O(\lambda t^4)+O(\lambda^2t^6)$$

$$c_0\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \qquad O(\lambda^{-3/2})$$

$$\lambda O(\lambda^{-5/2}) = O(\lambda^{-3/2})$$

$$\lambda^2\,\theta(\lambda^{-7/2})=O(\lambda^{-3/2})$$

$$\int_{-\delta}^{\delta}\theta(t^4)e^{-\lambda t^2}dt< C\int_0^{\delta}t^4e^{-\lambda t^2}dt=C\int_0^{\lambda\delta^2}\frac{u^2}{\lambda^2}\cdot e^{-u}\frac{du}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{u}}=\frac{c}{2\lambda^{5/2}}\int_0^{\lambda\delta^2}u^{3/2}e^{-u}du=$$

$$\frac{c}{2\lambda^{5/2}}\left(\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)+\theta\left(e^{-\frac{\lambda\delta^2}{2}}\right)\right)=$$

$$=\underline{O(\lambda^{-5/2})} \qquad \blacksquare$$

Do naszej całki $\int_{-\delta}^{\delta}\Phi(s)e^{\lambda F(s)}ds$ można zastosować lemat 3 jeśli podzieli się odcinek $[-\delta,\delta]$ znowu na trzy części

$$-\delta \quad -\delta(\lambda) \quad 0 \quad \delta(\lambda) \quad \delta$$

Wtedy na $[-\delta(\lambda),\delta(\lambda)]$ mamy wskazane oszacowanie zaś na $[-\delta,-\delta(\lambda)]$ i $[\delta(\lambda),\delta]$ trzeba przyjrzeć się oddzielnie. Zasadniczo szacujemy jak na γ_1,γ_2 tyle, że nie mamy $F(0)-F(s)>h$

$$F(s)=F(0)+\frac{F''(0)}{2}s^2+cs^3+O(s^4)$$

$$F(0)-F(s)=-\frac{F''(0)}{2}s^2-cs^3+O(s^4)>\left(-\frac{F''(0)}{4}\right)s^2\geqslant\left(-\frac{F''(0)}{4}\right)\delta^2(\lambda)$$

wtedy $\displaystyle\int_{-\delta}^{-\delta(\lambda)}\phi(s)e^{\lambda F(s)}=e^{\lambda F(0)}O\left(e^{-c\lambda\delta^2(\lambda)}\right)$ zanik jest więc nadal eksponencjalny.

Ostatecznie więc główny wkład do całki jest od $[-\delta(\lambda),\delta(\lambda)]$, reszta ma zanik rzędu $O(\lambda^{-3/2})$ a pozostałe układy mają zanik eksponencjalny, więc można je pominąć

$$\int_{-a}^{b} \Phi(s) e^{\lambda F(s)} = e^{\lambda F(0)} \left[\Phi(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |F''(0)|}} + O(\lambda^{-3/2}) \right]$$

te rzeczy zapisać w terminach wyjściowego φ, f

$$\boxed{F(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, y_0)}$$

$$F''(s) = \frac{d^2}{ds^2} u(x(s), y(s)) = \frac{d^2}{ds^2} f(z(s)) = \frac{d}{ds}\left(\frac{df}{dz}\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d^2 f}{dz^2}\frac{dz}{ds} + \underbrace{\frac{df}{dz}}_{=0}\frac{d^2 z}{ds^2}\Bigg|_{s=0}$$

bo $\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = 0$

$$F''(0) = f''(z_0) \cdot \frac{dz}{ds}$$

$$z - z_0 \approx s e^{i\varphi_{1,2}} \to \frac{dz}{ds}\Big|_{s=0} e^{i\varphi_k} \qquad k = 1, 2$$

$$\boxed{|F''(0)| = |f''(z_0)|}$$

$$\Phi(0) = \varphi(z_0) \frac{dz}{ds} = \varphi(z_0) e^{i\varphi_k}$$

Ostatecznie:

$$\boxed{\int_\gamma \varphi(z) e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda f(z_0)} \left[\varphi(z_0) e^{i\varphi_k} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(z_0)|}} + O(\lambda^{-3/2}) \right]}$$