RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE W DZIEDZINIE ZESPOLONEJ

Przez najbliższe dwa wykłady zajmować się będziemy równaniami różniczkowymi w dziedzinie zespolonej. Będą to równania pierwszego rzędu w $\mathbb{C}^n$ (jedna zmienna, wartości wektorowe) w szczególności liniowe, tzn **1.**

$$\partial_z v(z) = A(z) v(z)$$

oraz drugiego rzędu w $\mathbb{C}$ (jedno zmienne, wartości skalarne). Poszukiwać będziemy rozwiązań w szczególnej postaci, np holomorficznych lub mających bieguny określonego rzędu. W każdym razie będą to rozwiązanie w jakimś sensie rozwijalne w szereg. Metoda w każdym przypadku polega na znalezieniu formalnego rozwiązanie w postaci szeregu a następnie udowodnienie że szereg ten jest zbieżny.

PRZYKŁAD: $\partial_z v = v$ $\quad (n=1,\ A(z)=1)$ $\quad v(0)=1$

zakładamy, że v jest funkcją holomorficzną wobec tego szukamy jej w postaci $\sum_n v_n z^n$. Wiadomo, że szeregi potęgowe można różniczkować wyraz po wyrazie, wobec tego

$$\partial_z \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n n \cdot z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n n z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k+1} (k+1) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$$

Porównujemy wartości przy kolejnych potęgach

$$v_k = v_{k+1}(k+1) \implies v_{k+1} = \frac{1}{k+1} v_k$$ Wartości te zadane są więc

przez v_0, które zgodnie z warunkami początkowymi, jest 1.

$$v_{k+1} = \frac{1}{k+1} v_k = \frac{1}{k+1} \frac{1}{k} v_{k-1} = \dots \frac{1}{(k+1)!} v_0 = \frac{1}{(k+1)!}$$

$$v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^n = \exp(z)$$ szereg jest zbieżny w sposób oczywisty. ■

Zajmiemy się teraz przypadkiem ogólnym $\partial_z v(z) = A(z) v(z)$. Zakładać będziemy, że funkcje A (wszystkie wyrazy macierzowe są holomorficzne w pewnym obszarze Ω (otwarty, spójny, jednospójny)

TWIERDZENIE Niech Ω będzie jednospójnym zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ i niech $A: \Omega \ni z \longmapsto A(z) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ będzie holomorficzna, tzn każdy wyraz macierzowy jest holomorficzną funkcją na Ω. Wówczas dla każdego $w \in \mathbb{C}^n$ istnieje dokładnie jedna funkcja holomorficzna na Ω o wartościach w $\mathbb{C}^n$ będąca rozwiązaniem zagadnienia **2.**

$$v'(z) = A(z)v(z) \qquad v(z_0) = w \qquad z_0 \in \Omega$$

DOWÓD: Cały obszar Ω, funkcje A oraz v można przesunąć tak, żeby $z_0=0$ zrobimy to dla uproszczenia zapisu. A składa się z funkcji holomorficznych a^i_j, każdą z nich można rozłożyć w szereg $a^i_j(z) = \sum_k (a_k)^i_j z^k$. Współczynniki $(a_k)^i_j$ tworzą macierze, które będziemy oznaczać A_k

$A(z) = \sum_k A_k z^k$ Rozwiązanie przewidujemy w postaci $v(z) = \sum_k v_k z^k$ w pewnym kole $K(0,r) \subset \Omega$

Mamy $v'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{\in \mathbb{C}^n}{v_{k+1}} (k+1) z^k$. Wstawiamy do równania:

$$v_0 = w \qquad \sum_k v_{k+1}\cdot(k+1)\cdot z^k = \sum_k (A_k z^k)\cdot \sum_m v_m z^m = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{l}(A_{l-m}\cdot v_m)\right] z^l$$

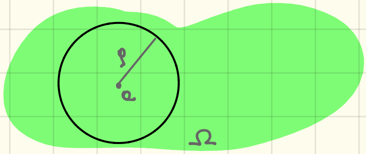
z porównania mamy $\displaystyle v_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k} A_{k-m} v_m$

Pokażemy, że ten szereg jest zbieżny w kole $K(0,r)$. W tym celu potrzebujemy nierówności Cauchy'ego (przypominamy twierdzenie na następnej stronie)

$$|f^n(a)| < \frac{n!}{r^n} \underset{z=a+re^{i\varphi}}{\sup} |f(z)| \qquad \text{tzn} \quad f(z) = \sum f_k r^k \qquad f_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$|f_k| \leqslant \underset{\text{const.}}{C} \frac{1}{r^k}$$

(6) NIERÓWNOŚĆ CAUCHY'EGO



$f \in A(\Omega)$, $K(a,\rho) \subset \Omega$

$$\boxed{|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{\rho^n} \sup_{z=a+\rho e^{i\varphi}} |f(z)|}$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial K(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

$$|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{i\varphi})}{(\rho e^{i\varphi})^{n+1}}\, i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{i\varphi})}{\rho^n}\, i e^{-i\varphi n}\, d\varphi\right| \le$$

$$\frac{n!}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}|f(a+\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{n!}{\rho^n}\sup_{z=a+\rho e^{i\varphi}}|f(z)| \quad ■$$

Oznacza to że $|(a_k)^i_j| \le \frac{C}{r^k}$ $\quad |A_k v_\ell| = |a^i_{kj} v^j_\ell| = \left(\sum_i |a^i_{kj} v^j|^2\right)^{1/2} \le$

$$\left(\sum_i \left|\frac{c^i_j}{r^k} v^j\right|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{r^k}\left(\sum |c^i_j v^j|^2\right)^{1/2} \le \frac{1}{r^k}\|C\|\|v\|$$

macierz c^i_j, norma operatorowa

jakaś stała

Ostatecznie $\|A_k\| \le \frac{C}{r^k}$ gdzie $\|B\| = \sup_{\|v\|=1}\|Bv\|$

Wróćmy do naszego rozwiązania formalnego:

$$v_0 = w \qquad v_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k} A_{k-m} v_m$$

Okazuje się że długość $\|v_k\|$ można oszacować przez wyrazy ciągu p_k gdzie $p_0 = \|w\|$ i $p_{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k}\frac{C}{r^{k-m}} p_k$

istotnie $\|v_0\| = \|w\| = p_0$

Załóżmy, że dla $k=0,1,\dots,\ell$ $\|v_k\| \leq p_k$

$$\|v_{\ell+1}\| = \Big\|\frac{1}{\ell+1}\sum_{m=0}^{\ell} A_{\ell-m} v_m\Big\| \leq \frac{1}{\ell+1}\sum_{m=0}^{\infty}\|A_{\ell-m} v_m\| \leq \frac{1}{\ell+1}\sum_{m=0}^{\infty}\|A_{\ell-m}\|\,\|v_m\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\ell+1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C}{r^{\ell-m}}\, p_m = p_{\ell+1}$$

Skoro mamy $\|v_k\| \leq p_k$ wystarczy pokazać, że $\sum p_k z^k$ zbieżny.

$$\frac{p_{m+1}}{p_m} = ? \qquad p_{m+1} = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\frac{C}{r^{m-k}}\, p_k$$

$$(m+1)p_{m+1} = \frac{C}{r^m}p_0 + \frac{C}{r^{m-1}}p_1 + \dots + \frac{C}{r}p_{m-1} + Cp_m \quad / r$$

$$m p_m = \frac{C}{r^{m-1}}p_0 + \frac{C}{r^{m-2}}p_1 + \dots + \frac{C}{r}p_{m-2} + Cp_{m-1}$$

$$r(m+1)p_{m+1} = \frac{C}{r^{m-1}}p_0 + \frac{C}{r^{m-2}}p_1 + \dots + Cp_{m-1} + Crp_m$$

$$r(m+1)p_{m+1} - mp_m = Crp_m$$

$$r(m+1)p_{m+1} = p_m(Cr+m) \qquad \frac{p_{m+1}}{p_m} = \frac{Cr+m}{r(m+1)} \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{r}$$

$\lim \sqrt[n]{p_n} = \lim \frac{p_{n+1}}{p_n}$ jeśli granica po prawej istnieje. Wobec tego w kole $K(0,r)$ zbieżny jest $\sum_k p_k z^k$ a co za tym idzie także $\sum v_k z^k$.

Podobnie rozumować możemy w dowolnym kole $K(z,r)\subset\Omega$, przedłużając funkcję v. Jednospójność Ω gwarantuje, że otrzymana funkcja jest jednoznaczna. ∎

Rozważmy teraz przykład pochodzący od liniowego równanie drugiego rzędu:

$$u'' + c(z)u' + d(z)u = 0 \qquad u(0)=\omega_0 \qquad u'(0)=\omega_1$$

Podobnie jak w przypadku rzeczywistym zamieniamy to równanie na układ równań rzędu 1:

$$v(z)=\begin{bmatrix}u(z)\\u'(z)\end{bmatrix}\quad A(z)=\begin{bmatrix}0 & 1\\-d & -c\end{bmatrix}\qquad v'(z)=A(z)\,v(z)\qquad v(0)=\begin{bmatrix}w_0\\w_1\end{bmatrix}=w$$

Stosujemy powyższe twierdzenie w/g którego istnieje jednoznaczne holomorficzne rozwiązanie w obszarze $\Omega\ni 0$ i takim, że d, c są holomorficzne w Ω.
Z tego rozwiązania interesuje nas pierwszy wiersz.

$$A(z)=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\sum d_k z^k & -\sum c_k z^k\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\-d_0 & -c_0\end{bmatrix}}_{A_0}+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\-d_1 & -c_1\end{bmatrix}}_{A_1}z+\dots+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0\\-d_k & -c_k\end{bmatrix}}_{A_k}z^k+\dots$$

$$v_{k+1}=\frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k}A_{k-m}v_k\qquad v(z)=\begin{bmatrix}u(z)\\u'(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum u_k z^k\\\sum_{k=1} u_k k z^{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_0+u_1z+u_2z^2+\dots\\u_1+2u_2z+3u_3z^2+\dots\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}u_0\\u_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1\\2u_2\end{bmatrix}z+\dots+\begin{bmatrix}u_k\\(k+1)u_{k+1}\end{bmatrix}z^k+\dots$$

$$\begin{bmatrix}u_{k+1}\\(k+2)u_{k+2}\end{bmatrix}=\frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k}A_{k-m}\begin{bmatrix}u_m\\(m+1)u_{m+1}\end{bmatrix}=\frac{1}{k+1}\left[A_k\begin{bmatrix}u_0\\u_1\end{bmatrix}+A_{k-1}\begin{bmatrix}u_1\\2u_2\end{bmatrix}+\dots+A_0\begin{bmatrix}u_k\\u_{k+1}(k+1)\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{k+1}\begin{bmatrix}(k+1)u_{k+1}\\-\left(d_ku_0+c_ku_1+d_{k-1}u_1+2c_{k-1}u_2+d_{k-2}u_2+3c_{k-2}u_3+\dots+d_0u_k+c_0(k+1)u_{k+1}\right)\end{bmatrix}$$

$$u_{k+2}=\frac{k+2}{k+1}\left\{-d_ku_0+(c_k+d_{k-1})u_1+(2c_{k-1}+d_{k-2})u_2+\dots+(kc_1+d_0)u_k+(k+1)c_0u_{k+1}\right\}=$$

$$=\frac{k+2}{k+1}\left\{-d_ku_0+\sum_{m=1}^{k}(\overset{m}{c}_{k+1-m}+d_{k-m})u_m+(k+1)c_0u_{k+1}\right\}$$

$$\underbrace{u_{k+1}=\frac{k+1}{k}\left\{-d_{k-1}u_0+\sum_{m=1}^{k-1}(m\,c_{k-m}+d_{k-m-1})u_m+kc_0u_k\right\}}$$

PUNKT REGULARNY W ∞

Rozważaliśmy równanie $v'(z) = A(z)v(z)$ w obszarze w $\mathbb{C}$ zawartym w obszarze holomorficzności A. Co dzieje się w ∞, tzn kiedy ∞ jest punktem regularnym równanie? Dokonajmy zamiany zmiennych $w = 1/z$

$$\frac{d}{dz} = \frac{dw}{dz}\frac{d}{dw} = -\frac{1}{z^2}\frac{d}{dw} = -w^2\frac{d}{dw}$$

$$-w^2\frac{d}{dw}v\left(\tfrac{1}{w}\right) = A\left(\tfrac{1}{w}\right)v\left(\tfrac{1}{w}\right)$$

$$\frac{d}{dw}v\left(\tfrac{1}{w}\right) = -\frac{1}{w^2}A\left(\tfrac{1}{w}\right)v\left(\tfrac{1}{w}\right)$$

∞ jest punktem regularnym równania wtedy i tylko wtedy gdy 0 jest punktem regularnym równanie po zamianie zmiennych. Oznacza to, że $\frac{1}{w^2}A\left(\frac{1}{w}\right)$ jest holomorficzne w otoczeniu 0. Dla A oznacza to, że jest holomorficzne dla $\mathbb{C}\setminus K(0,R)$ dla pewnego R i istnieje $\lim\limits_{z\to\infty} z^2A(z)$.

Istnieje wtedy dokładnie jedno analityczne w ∞ rozwiązanie zagadnienie $v'(z) = A(z)v(z)$, $\lim\limits_{z\to\infty} v(z) = \bar{v}$.

Odpowiednie wersje dla równań II rzędu:

$$\frac{d}{dz} = -w^2\frac{d}{dw} \qquad \frac{d^2}{dz^2} = -w^2\frac{d}{dw}\left(-w^2\frac{d}{dw}\right) = w^4\frac{d^2}{dw^2} + 2w^3\frac{d}{dw}$$

$$v''(z) + c(z)v'(z) + d(z)v(z) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\left(w^4\frac{d^2}{dw^2} + 2w^3\frac{d}{dw}\right)v\left(\tfrac{1}{w}\right) - c\left(\tfrac{1}{w}\right)w^2\frac{d}{dw}v\left(\tfrac{1}{w}\right) + d\left(\tfrac{1}{w}\right)v\left(\tfrac{1}{w}\right) = 0$$

$$w^4\left\{\frac{d^2}{dw^2} + \underbrace{\left(\frac{2}{w} - \frac{c(1/w)}{w^2}\right)}\frac{d}{dw}v\left(\tfrac{1}{w}\right) + \underbrace{\frac{1}{w^4}d\left(\tfrac{1}{w}\right)}v\left(\tfrac{1}{w}\right)\right\} = 0$$

analityczne wokół zera, tzn w szczególności istnieje

$$\lim_{z\to\infty}\left(2z - z^2c(z)\right) \quad \text{i} \quad \lim_{z\to\infty} z^4d(z)$$

Ciekawie zaczyna być, gdy rozpatrujemy równanie w otoczeniu punktu osobliwego