WYKŁAD 2 12 X

W trakcie poprzedniego wykładu wprowadziliśmy pojęcie różniczkowalności w sensie zespolonym (w punkcie) i funkcji holomorficznej (na obszarze). Pominęliśmy milczeniem kwestie ciągłości pochodnych, możliwości wielokrotnego różniczkowania i.t.d. Do kwestii tych wrócimy wkrótce.
Na razie zajmiemy się problemem całkowania funkcji zespolonych, niekoniecznie holomorficznych wzdłuż krzywych w $\mathbb{C}$.

Po czym będziemy całkować? Całkować będziemy wzdłuż niesparametryzowanych, zorientowanych krzywych kawałkami gładkich. Wszystkie trzy określenia wymagają objaśnienia:

(1) Sparametryzowaną krzywą gładką $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$ odcinek otw. nazywamy odwzorowanie gładkie w sensie rzeczywistym i mające wszędzie niezerową pochodną

(2) Odwzorowanie $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy sparametryzowaną krzywą kawałkami gładką jeśli γ jest ciągłe i ponadto, jeśli istnieje ciąg punktów odcinka I: $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ taki, że $\gamma|_{]t_{i-1}, t_i[}$ jest gładkie i mające niezerową pochodną.

(3) W zbiorze gładkich krzywych w $\mathbb{C}$ wprowadzamy relację równoważności, która mówi, że $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ jest równoważna $\eta : J \longrightarrow \mathbb{C}$ jeśli istnieje gładkie odwzorowanie $\tau : I \longrightarrow J$ takie, że $\eta(\tau(t)) = \gamma(t)$ oraz $\tau'(t) > 0$ dla $t \in I$. Klasę równoważności krzywych gładkich sparametryzowanych względem powyższej relacji nazywać będziemy krzywą gładką zorientowaną. Z powyższej definicji wynika, że to co istotne w krzywej zorientowanej to jest jej obraz jako odpowiednio regularny podzbiór $\mathbb{C}$ plus kierunek parametryzacji. Dopuszczenie reparametryzacji z ujemną pochodną prowadziłoby do pojęcia niezorientowanej krzywej, tzn. wtedy istotny jest tylko krzywa jako stosownie regularny podzbiór $\mathbb{C}$

(4) Krzywe kawałkami gładkie rozpatrywać można także w wersji niesparametryzowanej zorientowanej lub nie. Odpowiednia relacja równoważności mówi, że krzywe są równoważne jeśli $\gamma: I \to \mathbb{C}$, $\eta: J \to \mathbb{R}$, $\tau: I \to J$ jest ciągłą bijekcją, gładką na odpowiednich kawałkach i mającą na tych kawałkach dodatnią pochodną i $\eta(\tau(t)) = \gamma(t)$. Dla wersji niezorientowanej należy dopuścić pochodną dodatnią lub ujemną.

Do całkowania nadają się krzywe kawałkami gładkie zorientowane lub niezorientowane. Definicje całki wzdłuż krzywej w obu tych przypadkach powinne być nieco inne. Dalej będziemy się zajmować całkowaniem funkcji po krzywych zorientowanych.

Co będziemy całkować? Całkować będziemy funkcje argumentu zespolonego, o wartościach zespolonych wystarczająco regularne, aby po złożeniu z krzywą nadawały się do całkowania w sensie Riemanna, tzn., żeby część rzeczywista i urojona po złożeniu z krzywą nadawały się do całkowania. Bez wątpienia nadają się funkcje ciągłe, przynajmniej na obrazie krzywej. Nieciągłości też dopuszczalne jak w całce Riemanna.

Zanim zapiszemy definicję całki z funkcji zespolonej zróbmy przykład posługując się intuicją matematyczną.

Przykład: Obliczyć całkę z funkcji $f(z) = z^2$ po ćwiartce okręgu jednostkowego zorientowanego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

$\gamma(t) = e^{it}$ $\quad t \in [0, \pi/2]$

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^{\pi/2} e^{2it}\, i e^{it} dt = i \int_0^{\pi/2} e^{3it} dt = i \cdot \frac{1}{3i} e^{3it}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left[e^{3i\pi/2} - e^0\right] = \frac{1}{3}(-i-1) =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$$

$f(\gamma(t)) = e^{2it}$ $\quad dz = d(e^{it}) = e^{it} i\, dt$

Ten sam rachunek zrobimy jeszcze inaczej $z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{2ixy}_{iv}$

← cokolwiek to znaczy...

$dz = d(x+iy) = dx + i\,dy$

Parametryzujemy krzywą zgodnie z orientacją $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$

$dz = d(\cos t) + i\,d(\sin t) = -\sin t\,dt + i\cos t\,dt$

$z^2 = (\cos t)^2 - (\sin t)^2 + i\,2\sin t\cos t = \cos 2t - i\sin 2t$

$z^2 dz = (\cos 2t + i\sin 2t)(-\sin t + i\cos t)dt = \{(-\cos 2t\sin t - \sin 2t\cos t) + i(-\sin 2t\sin t + \cos 2t\cos t)\}dt = (-\sin 3t + i\cos 3t)\,dt$

$$\int_\gamma z^2 dz = \int_0^\pi (-\sin 3t + i\cos 3t)\,dt = \left(\frac{1}{3}\cos 3t + i\cdot\frac{1}{3}\sin 3t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}(\cos 0 + i\sin 0) = \frac{1}{3}(-i-1)$$ (na szczęście wyszło to samo)

Ogólniej $f(z)dz = [u(x,y) + iv(x,y)](dx + i\,dy) = (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i(u(x,y)dy + v(x,y)dx)$. Wszystko więc wskazuje na to, że nauczyć się musimy całkować wzdłuż krzywych wyrażenia postaci

$$a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

DEFINICJA: Całkę z $a(x,y)dx + b(x,y)dy$ wzdłuż zorientowanej krzywej $\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ nazywamy

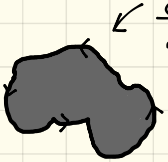
$$\int_{t_0}^{t_1} [a(x(t),y(t))\,x'(t) + b(x(t),y(t))\,y'(t)]\,dt$$

Zauważmy, że definicja nie zależy od wyboru parametryzacji krzywej (twierdzenie o zamianie zmiennych).

Uwaga: Obiekty typu $a(x,y)dx + b(x,y)dy$ nazywają się formami różnicałkowymi i definiowane są w ramach Geometrii Różniczkowej.

DYGRESJA Rozważamy płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, punkt (x_0, y_0) i funkcję f określoną w otoczeniu (x_0, y_0). W definicji pochodnej funkcji f pojawiają się przyrosty $\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$ które są wektorami zaczepionymi w (x_0, y_0). Przestrzeń przyrostów jest oczywiście izomorficzna z $\mathbb{R}^2$. Pochodna funkcji f w punkcie (x_0, y_0) jest odwzorowaniem liniowym z przestrzeni przyrostów do $\mathbb{R}$, zatem, z punktu widzenia algebry, jest elementem $(\mathbb{R}^2)^*$. Przestrzeń przyrostów i do niej dualna są obie skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi, można rozważać bazę. Przyrosty $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tzn wzdłuż współrzędnych oznaczamy $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$ odpowiednio. Elementy bazy dualnej oznaczamy dx i dy odpowiednio. Łatwo sprawdzić, że dx jest pochodną funkcji $(x,y) \mapsto x$ zaś dy pochodną funkcji $(x,y) \mapsto y$. W notacji nie widać w którym punkcie różniczkujemy i zaczepiamy przyrosty. Dla $\mathbb{R}^2$ jednak odpowiednie przestrzenie w różnych punktach są izomorficzne. Dowolny kowektor z $(\mathbb{R}^2)^*$ można zapisać jako $a\,dx + b\,dy$. Można też rozważyć kompleksyfikację, dopuszczając $a, b \in \mathbb{C}$. Forma różniczkowa to odwzorowanie, które każdemu punktowi (x,y) przypisuje kowektor zaczepiony w tym punkcie: $a(x,y)dx + b(x,y)dy$. Forma o wartościach zespolonych – a, b mają wartości zespolone. Z algebraicznego punktu widzenia $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ oraz $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ to baza w skompleksyfikowanej przestrzeni przyrostów. Formy $dz = dx + i\,dy$ i $d\bar{z} = dx - i\,dy$ stanowią dualną do niej bazę skompleksyfikowanej przestrzeni dualnej. Ostatecznie więc po krzywych zorientowanych w $\mathbb{C}$ całkujemy formy na $\mathbb{C}$ o wartościach zespolonych, zazwyczaj proporcjonalne do dz.

W dalszym ciągu obszarem w $\mathbb{C}$ nazywać będziemy ograniczony, spójny, otwarty zbiór z regularnym brzegiem, tzn brzeg jest krzywą kawałkami gładką. Brzeg obszaru ma kanoniczną orientację. Kierunek jest zgodny z orientacją jeśli wędrując zgodnie z nim wzdłuż krzywej mamy obszar po lewej stronie.

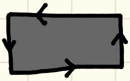


TWIERDZENIE Niech f będzie holomorficzna na obszarze Ω i ciągła na $\bar{\Omega}$. Wówczas

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$$

UWAGA Jeśli krzywa po której całkujemy jest zamknięta często podkreślamy orientację względem której całkujemy pisząc

$\ointctrclockwise$ dla kanonicznej i $\ointclockwise$ dla odwrotnej orientacji.

DOWÓD: Dowód wystarczy wykonać dla prostokąta  i zauważyć że obszar Ω można „wypełnić" prostokątami. Rozumowanie obejmuje oczywiście odpowiednie przejście graniczne.

Rozważmy więc prostokąt $\bar{\Omega} = [a,b] \times [c,d]$

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_a^b f(x,c)\,dx + \int_c^d f(b,y)\,i\,dy + \int_b^a f(x,d)\,dx + \int_d^c f(a,y)\,i\,dy =$$

$$\int_a^b \{f(x,c) - f(x,d)\}\,dx + i\int_c^d \{f(b,y) - f(a,y)\}\,dy =$$

$$\int_a^b \left(\int_d^c \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dy\right)dx + i\int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\bar{\Omega}} \left(-\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) + i\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)dx\,dy =$$

$$= i\int_{\bar{\Omega}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)\,dx\,dy = i\int_{\bar{\Omega}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z)}_{0}\,dx\,dy = 0$$

WNIOSEK (1) WZÓR CAUCHY'EGO

Niech Ω będzie obszarem w którym f jest holomorficzna i ciągła na $\bar{\Omega}$. Wówczas dla $a \in \Omega$ zachodzi

$$2\pi i\, f(a) = \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Augustin-Louis Cauchy

1789 - 1857

DOWÓD: Funkcja $f(z)/z-a$ nie jest holomorficzna na Ω, natomiast jest holomorficzna na $\Omega \setminus \overline{K}(a,r) =: S$. Z twierdzenia wynika więc, że

$$\int_{\partial S} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0.$$

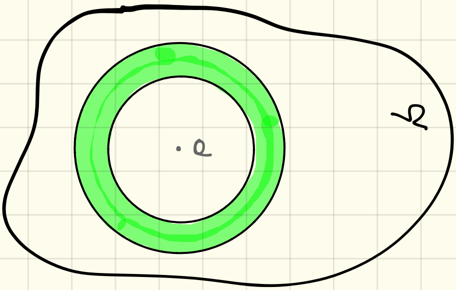
∂S składa się z dwóch części: $\partial\Omega$ zorientowany kanonicznie i $\partial \overline{K}(a,r)$ zorientowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wobec tego

$$0 = \oint_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \oint_{\partial \overline{K}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \Rightarrow \oint \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Przyjrzyjmy się całce po okręgu $z = a + re^{i\varphi}$ $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\oint \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\varphi})}{\cancel{r}\cancel{e^{i\varphi}}}\,\cancel{r}\,i\,\cancel{e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\varphi})\,d\varphi$$

Zauważmy, że ostatnia całka nie może zależeć od r, ponieważ $f(z)/_{z-a}$ jest holomorficzna w każdym pierścieniu „mieszczącym" się w zbiorze Ω i mającym środek w a:



Ostatnia całka jest całką z parametrem w sensie zależności od r. Całka jest na skończonym odcinku $[0,2\pi]$ więc o ciągłości względem parametru decyduje ciągłość funkcji podcałkowej. Funkcja

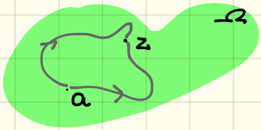
$(r,\varphi) \longmapsto f(a+re^{i\varphi})$ jest ciągła,

Wobec tego $F(r) = \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\varphi})\,d\varphi$

także jest ciągła (i stała) zatem $\lim_{r\to 0} F(r) = \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f(a+re^{i\varphi})\,d\varphi = \int_0^{2\pi} f(a)\,d\varphi = 2\pi f(a)$

Ostatecznie $$\oint_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, f(a).$$ ■

WNIOSKI (cd)

(2) 

Jeśli $f \in A(\Omega)$, $a, z \in \Omega$ (jednospójny) i γ jest krzywą zorientowaną o początku w a i końcu w z to $\int_\gamma f(z)dz$ nie zależy od drogi γ, a tylko od początku i końca krzywej γ. Można zatem zdefiniować nową funkcję $F(z) = \int_a^z f(z)\,dz$. Zadanie: Wykazać, że F jest holomorficzna i $F'(z) = f(z)$.

TWIERDZENIE MORERY

(3) Jeśli $f \in A(\Omega)$ i znamy wartości f na $\partial\Omega$ to znamy na całym Ω. To pokazuje, że funkcje holomorficzne są dość sztywne!

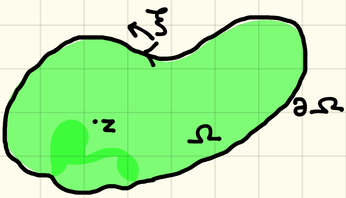
(4) Przypomnijmy twierdzenie o różniczkowalności „zwartej" całki z parametrem:

Niech $I = [a,b]$, $J =]c,d[$, $f: I \times J \ni (x,\alpha) \longmapsto f(x,\alpha) \in \mathbb{R}$ ciągła, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ istnieje i jest ciągła. Wtedy

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx \quad \text{jest różniczkowalna} \quad \text{i} \quad F'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\,dx$$

Z twierdzenia tego wynika, że każda funkcja holomorficzna jest klasy C^∞, tzn jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy w sensie zespolonym. Mamy ponadto wzór

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,dz$$



Obszar Ω można wybrać dowolnie, byle $f \in A(\Omega)$ i $z \in \Omega$

Istotnie. Weźmy, zgodnie ze wzorem Cauchy'ego $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$
$f(z)$ jest określone jako całka z parametrem, a właściwie dwoma x, y

8

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \underbrace{\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-(x+iy)}\gamma'(t)dt}$$

γ omija punkt $x+iy$, wobec tego funkcja podcałkowa jest różniczkowalna. Pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-x-iy}\right)=\frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-x-iy)^2}\gamma'(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ \dots\ \right)=i\,\frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-x-iy)^2}\gamma'(t)$$

zatem $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-x-iy)^2}\gamma'(t)\,dt$ $\quad\frac{\partial f}{\partial y}=i\,\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(\gamma(t))}{(\quad)^2}\gamma'(t)\,dt$

oznacza to, że $\underset{\underset{f'(z)}{\parallel}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2}\left(\int_a^b\dots-i^2\int_a^b\dots\right)=$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\dots=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}dz.$$

Korzystając z tych samych twierdzeń można stwierdzić że $f'(z)$ jest holomorficzna.

Dalsze różniczkowanie przeprowadzane j.w. pokazuje istnienie kolejnych pochodnych i ich holomorficzność. Generuje to też czynnik $n!$ w liczniku (bo $(1/x^n)'=-n\frac{1}{x^{n+1}}$).

(5) TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ: $f\in\mathcal{A}(\Omega)$, $a\in\Omega$, $K(a,r)\subset\Omega$ wtedy

$$f(a)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{K(a,r)}f(x+iy)\,dx\,dy$$

całka Riemanna po kole

DOWÓD:

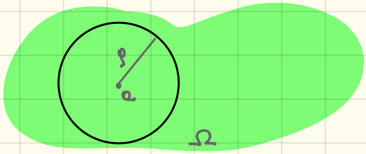
$$\int_{K(a,r)} f(x+iy) = \int_{K(a,r)} f(a+\rho e^{i\varphi})\,\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^r \rho\, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\, f(a+\rho e^{i\varphi})}_{2\pi\, f(a)} = \int_0^r 2\pi\, f(a)\,\rho\, d\rho$$

$$= 2\pi\, f(a)\frac{1}{2}r^2 = \pi r^2 f(a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi r^2}\int_{K(a,r)} f\, dx dy = f(a) \quad \blacksquare$$

(1809)

(6) NIERÓWNOŚĆ CAUCHY'EGO



$f \in A(\Omega)$, $K(a,\rho) \subset \Omega$

$$|f^{n}(a)| \leq \frac{n!}{\rho^n} \sup_{z=a+\rho e^{i\varphi}} |f(z)|$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial K(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

$$|f^{n}(a)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(a+\rho e^{i\varphi})}{(\rho e^{i\varphi})^{n+1}}\, i\rho e^{i\varphi} d\varphi\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(a+\rho e^{i\varphi})}{\rho^n}\, i\, e^{-i\varphi n} d\varphi\right| \leq$$

$$\frac{n!}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi = \frac{n!}{\rho^n} \sup_{z=a+\rho e^{i\varphi}} |f(z)| \quad \blacksquare$$

(7) TWIERDZENIE LIOUVILLE'A: Funkcja holomorficzna na całym $\mathbb{C}$ i ograniczona jest stała

DOWÓD: Jeśli f ograniczona to z definicji istnieje $M>0$ takie, że

$$|f(z)| < M$$

Niech teraz $z \in \mathbb{C}$ dowolne. Dla dowolnego r obowiązuje nierówność

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{r} \sup_{\xi = z + re^{i\varphi}} |f(\xi)| \leqslant \frac{1}{r} \cdot M$$ 10

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$ oznacza to $f'(z) = 0$ dla dowolnego z. Wobec tego z jest stałe.

(8) THIERDZENIE (Gaussa) Każdy wielomian stopnia $\geqslant 1$ ma na $\mathbb{C}$ miejsce zerowe

DOWÓD: a.a. Załóżmy, że wielomian w stopnia $n \geqslant 1$ nie ma miejsca zerowego. w jest funkcją holomorficzną. $f(z) = \frac{1}{w(z)}$ także jest funkcją holomorficzną.

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\frac{w(z)}{z} = a_n + \underbrace{a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}$$

dla dużych z te liczby są małe co do modułu

zatem dla $z : |z| > R$ $\quad \frac{|w(z)|}{|z^n|} > \frac{1}{2}|a_n| \quad |w(z)| > \frac{1}{2}|a_n||z^n|$

$$|f(z)| < \frac{2}{|a_n||z|^n} \xrightarrow{|z| \to \infty} 0$$ f jest ograniczona, a więc stała.

Wobec tego $w = const$ co jest sprzeczne z założeniem $\deg w \geqslant 1$

■

GIACINTO MORERA 1857 – 1909

TWIERDZENIE: Jeżeli f ciągła i $\int_a^z f(\xi)d\xi$ nie zależy od drogi dla dowolnych $a, z \in \Omega$ to

$$F(z) = \int_a^z f(\xi)d\xi$$ jest holomorficzna i $F'(z) = f(z)$

11.

DOWÓD:

$$F(z+\delta z) - F(z) = \int_z^{z+\delta z} f(\xi)d\xi \underset{\xi = z + t\delta z}{=} \int_0^1 f(z+t\delta z)\delta z\, dt$$

$$\frac{1}{\delta z}\left(F(z+\delta z) - F(z)\right) = \int_0^1 f(z+t\delta z)dt$$

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{F(z+\delta z) - F(z)}{\delta z} = \lim_{\delta z \to 0} \int_0^1 f(z+t\delta z)\, dt = f(z)$$

ciągłość całki z parametrem

F jest więc holomorficzna i $F'(z) = f(z)$. f jest więc pochodną funkcji holomorficznej – sama też jest więc holomorficzna.