# IZOLOWANE PUNKTY OSOBLIWE

Jeśli funkcja $f$ jest holomorficzna w pierścieniu $R(z_0, 0, R)$ a w $z_0$ jest nieokreślona to mówimy, że $z_0$ jest izolowanym punktem osobliwym funkcji $f$. Zgodnie z tw. Laurent'a funkcja rozwija się w pierścieniu w szereg

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

Mogą zdarzyć się następujące trzy sytuacje

(1) Wszystkie współczynniki przy ujemnych potęgach $(z-z_0)$ są równe zero. Wtedy osobliwość nazywamy pozorną lub usuwalną. Można dookreślić funkcję $f$ w punkcie $z_0$ kładąc $f(z_0) = b_0$. Otrzymana funkcja zadana jest zbieżnym szeregiem w dodatnich potęgach $(z-z_0)$ w $K(z_0, R)$ jest więc holomorficzna w $K(z_0, R)$

(2) Jedynie skończona liczba wyrazów przy ujemnych potęgach jest niezerowa. W tej sytuacji punkt osobliwy nazywamy biegunem funkcji $f$. Jeśli $k$ jest najmniejszą potęgą z niezerowym współczynnikiem biegun nazywamy rzędu $-k$. Wtedy oczywiście szereg przyjmuje postać

$$\sum_{n=k}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

(3) Istnieje nieskończenie wiele niezerowych współczynników przy ujemnych potęgach $(z-z_0)$. W takiej sytuacji osobliwość nazywamy osobliwością istotną.

## PRZYKŁADY:

$f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ma usuwalną osobliwość w $z_0 = 0$. Istotnie: $\sin z = z - \frac{1}{6} z^3 + \dots$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 + \dots$$

$\frac{1}{z\sin z}$ ma w $z_0=0$ biegun rzędu 2 : $\lim\limits_{z\to 0} z^2\left(\frac{1}{z\sin z}\right)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$ 2

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5\ldots}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1-\left[\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^4+\ldots\right]}\right]=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3!}z^2-\frac{1}{5!}z^4+\ldots\right)^n=$$

$$\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{3!}z^2+\left(-\frac{1}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right)z^4+\ldots\right)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{6}z^2+\frac{7}{360}z^4+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}z+\frac{7}{360}z^3+\ldots$$

$$\frac{1}{z\sin z}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6}+\frac{7}{360}z^2+\ldots$$

$e^{1/z}$ ma osobliwość istotną w $z=0$

$$e^{1/z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,z^k}=\sum_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{(-k)!}\right)z^k$$

$\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ ma w $z=0$ nieizolowany punkt osobliwy. Istotnie dla $z_k=\frac{1}{k\pi}$ dla $k\in\mathbb{Z}$ $\sin(1/z)=0$ zatem $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ ma w $z_k$ punkty osobliwe. W dowolnym otoczeniu osobliwości $z=0$ jest nieskończenie wiele punktów osobliwych $z_k$.

## RESIDUUM

Bardzo istotną rolę odgrywa w rozwinięciu Laurent'a współczynnik przy potędze $-1$. Współczynnik ten nazywa się residuum funkcji $f$ w punkcie osobliwym $z_0$

$$\mathrm{Res}_{z_0} f=a_{-1} \qquad f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_n z^n \quad w\ \mathcal{P}(z_0,0,R)$$

Szereg Laurenta jest niemal jednostajnie i bezwzględnie zbieżny, wobec tego w całce $\oint\limits_{\partial K(z_0,\rho)}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\right)dz$ dla $0<\rho<R$ można zamienić kolejność sumy

i całki otrzymując $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int_{\partial K(z_0,\rho)} (z-z_0)^n dz$. Niemal wszystkie całki w tej sumie są równe zero – z wyjątkiem całki z $n=-1$. Całki z $(z-z_0)^n$ dla $n \geq 0$ są równe zero ponieważ są to całki z f. holomorficznych w $K(z_0,\rho)$. Całki dla $n<-1$ są to całki z pochodnych po krzywej zamkniętej:

$$(z-z_0)^{-k} = -\frac{d}{dt}(z-z_0)^{-(k+1)} \cdot \frac{1}{k+1}$$

Wkład od $n=-1$ to $2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f$. Fakt ten uzasadnia wyróżnienie współczynnika $a_{-1}$ specjalną nazwą i wysiłek włożony w wyznaczenie tego współczynnika.

Wyznaczanie residuum w biegunie: Niech $z_0$ będzie biegunem rzędu $k$. Tzn

$$f(z) = \frac{b_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{b_{-1}}{z-z_0} + b_0 + b_1(z-z_0) + \dots$$

$g(z) = (z-z_0)^k f(z)$ jest funkcją holomorficzną w otoczeniu $z_0$ i interesujący nas współczynnik to współczynnik $k-1$ w rozwinięciu Taylora

$$\boxed{b_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d}{dz}\left((z-z_0)^k f(z)\right)}$$

Bieguny, osobliwości usuwalne i osobliwości istotne rozpoznajemy „na oko" kiedy mamy do dyspozycji explicite rozwinięcie Laurent'a. Zamiast tego można używać poniższych faktów. Mają one także dodatkowy walor poznawczy:

FAKT (1) Twierdzenie Riemanna (o rozszerzeniu). Niech $f$ będzie holomorficzna na $\Omega \setminus \{z_0\}$ $(z_0 \in \Omega)$ Punkt $z_0$ jest osobliwością usuwalną wtedy i tylko wtedy gdy istnieje otoczenie $z_0$ na którym $f$ jest ograniczone otoczenie $z_0$

4

DOWÓD: $\Rightarrow$ oczywiste, $\Leftarrow$ Załóżmy, że $f$ jest ograniczona na $V\setminus\{z_0\}$

Wtedy oczywiście $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$. Zdefiniujmy funkcję

$$g(z)=\begin{cases}(z-z_0)^2 f(z) & z\neq z_0\\ 0 & z=z_0\end{cases}$$

$g$ jest holomorficzna w $V\setminus\{z_0\}$

Pokażemy, że istnieje pochodna w $z_0$:

$$\frac{g(z)-g(z_0)}{(z-z_0)}=\frac{g(z)-0}{(z-z_0)}=(z-z_0)f(z)\xrightarrow{z\to z_0}0$$

$g$ jest więc holomorficzna w $V$. Można zatem napisać rozwinięcie $g$ w szereg Taylora w pewnym kole $K(z_0,r)\subset V$.

$$g(z)=g_0+g_1(z-z_0)+g_2(z-z_0)^2+g_3(z-z_0)^3+\cdots \qquad \begin{array}{l} g(z_0)=0\to g_0=0\\ g'(z_0)=0\to g_1=0\end{array}$$

$$g(z)=g_2(z-z_0)^2+\cdots=(z-z_0)^2\left[g_2+g_3(z-z_0)+\cdots\right]$$

dla $z\neq z_0$ mamy $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}=g_2+g_3(z-z_0)+g_4(z-z_0)^2+\cdots$ szereg jest zbieżny w $K(z_0,r)$, zatem kładąc $f(z_0)=g_2$ dostajemy funkcję holomorficzną. ■

FAKT (2) Punkt $z_0$ jest biegunem funkcji $f$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$

DOWÓD: $\Rightarrow$ oczywiste $\Leftarrow$ Niech $f$ holomorficzne w $\mathcal{R}(z_0,0,r)$ i niech $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$. Istnieje otoczenie punktu $z_0$ takie, że $f$ nie ma w tym otoczeniu zer (bo duży moduł). Na tym otoczeniu $\frac{1}{f}$ jest holomorficzna poza $z_0$ i ponadto $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f}=0$. Na mocy poprzedniego faktu ($\frac{1}{f}$ ograniczona) osobliwość $1/f$ w $z_0$ jest usuwalna i ponadto wartość w $z_0$ jest 0. Oznacza to, że istnieje $k\in\mathbb{N}$ takie, że $\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^k g(z)$ gdzie $g(z)$ jest holomorficzna i $g(z_0)\neq 0$.

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\,\frac{1}{g(z)} \quad \text{i} \quad 1/g(z) \text{ holomorficzna. Wobec tego}$$

$f$ ma biegun rzędu $k$ w $z_0$. ■

FAKT (3) Punkt $z_0$ jest punktem istotnie osobliwym wtedy i tylko wtedy gdy nie istnieje granica $\lim_{z \to z_0} f(z)$. a nawet więcej: 5

TWIERDZENIE (Weierstrass - Casorati) Niech $z_0$ będzie izolowanym punktem istotnie osobliwym funkcji $f$. Wtedy dla każdego $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ istnieje ciąg $z_n \to z_0$ taki że $f(z_n) \to c$.

Inne sformułowanie: $f \in A(\Omega \setminus \{z_0\})$ i $z_0$ jest punktem istotnie osobliwym $z_0 \in \Omega$. Wtedy dla każdego otoczenia $U$ punktu $z_0$, $U \subset \Omega$ $f(U \setminus \{z\})$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.

DOWÓD (w pierwszej formie) a.a. Załóżmy, że $w \in \mathbb{C}$ jest taką liczbą a $U \ni z_0$ takim otoczeniem $f$, że $w$ jest oddzielone od wartości $f$ na $U$. tzn tam gdzie $f$ określone (poza $z_0$) na $U$ mamy

$$|f(z) - w| > \varepsilon \quad \text{dla pewnego} \quad \varepsilon > 0$$

$\left| \frac{1}{f(z) - w} \right| < \frac{1}{\varepsilon}$ Funkcja $\frac{1}{f(z)-w}$ jest więc ograniczona na $U$

Osobliwość w $z_0$ (tw. Riemanna) jest więc usuwalna, funkcję tę da się rozszerzyć do holomorficznej $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$ $\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = g_0$

$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$ $\quad f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$ $\longrightarrow$ jeśli $g_0 \neq 0$ to $f(z_0) \to \frac{1}{g_0} + w$

zatem $z_0$ nie jest istotną osobliwością $f$, tylko usuwalną. SPRZECZNOŚĆ

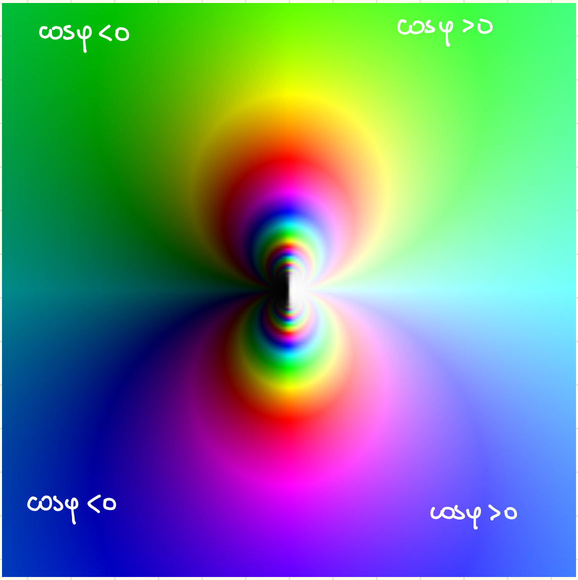
Jeśli $g_0 = 0$ to $g$ ma w $z_0$ zero rzędu $k$ $(\in \mathbb{N})$ a $f$ ma w $z_0$ biegun rzędu $k$

SPRZECZNOŚĆ! ■

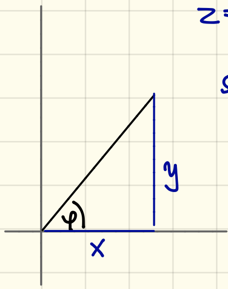
Prawdziwe jest jeszcze mocniejsze twierdzenie

TWIERDZENIE (duże Picarda) Jeśli $f$ jest holomorficzna na $\Omega\setminus\{z_0\}$ i w $z_0$ ma osobliwość istotną wówczas w każdym otoczeniu punktu $z_0$ przyjmuje każdą wartość zespoloną, z co najwyżej jednym wyjątkiem, nieskończenie wiele razy.

N.P. $z \longmapsto e^{1/z}$ przyjmuje w otoczeniu $z_0=0$ wszystkie wartości poza $z_0=0$.




$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = e^{\frac{\cos\varphi}{r}}\, e^{-i\frac{\sin\varphi}{r}}$$




$$z = x+iy$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{y}{r^2}$$

$$\alpha = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad x^2+y^2-\frac{y}{\alpha}=0$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2\alpha}\right)^2 = \frac{1}{4\alpha^2}$$

kolor zależy od argumentu $\alpha$ liczby $e^{1/z}$

argument stały i równy $\alpha$ jest na okręgach

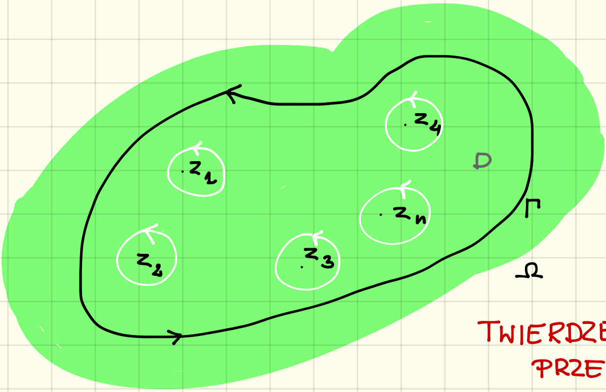
jasność zależy od $|e^{1/z}|$

JESZCZE KILKA FOTEK:



Charles Émile Picard

# RESIDUUM SŁUŻY DO CAŁKOWANIA:




## TWIERDZENIE O CAŁKOWANIU PRZEZ RESIDUA

Niech $\Omega$ będzie zbiorem otwartym, $f \in A(\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\})$. Niech $\Gamma$ będzie brzegiem zwartego obszaru $D$ zawartego w $\Omega$. Zakładamy że $\Gamma \cap \{z_1, \dots, z_n\} = \emptyset$. Wtedy zachodzi wzór

$$\oint_\Gamma f\, dz = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{z_j} f$$

sumowanie po $j: z_j \in D$

**DOWÓD:** Weźmy $r_j$: $K(z_j, r_j) \subset D$, $K(z_j, r_j) \cap \Gamma = \emptyset$, $K(z_j, r_j) \cap K(z_i, r_i) = \emptyset$

Oznaczmy $V = D \setminus \bigcup_j K(z_j, r_j)$

$j: z_j \in D$

Wtedy $V \subset \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ i $f$ holomorficzna w $V$. Zgodnie z tw. Cauchy'ego

$$\int_{\partial V} f(z)dz = 0 = \oint_\Gamma f(z)dz + \sum_i \oint_{|z-z_i| = r_i} f(z)dz$$

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_j \oint_{|z-z_j| = r_j} f(z)dz = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}_{z_j} f$$

Twierdzenie powyższe można wykorzystać do obliczania wartości pewnych całek, nie tylko zespolonych. Często można z jego użyciem wyliczyć także pewne całki oznaczone z rzeczywistych funkcji.

Typowe całki, które dają się liczyć tą metodą to

(a) $\int_0^{2\pi} W(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$

f. wymierne

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ P, Q wielomiany, Q nie ma pierwiastków rzeczywistych
$\deg P + 2 \leqslant \deg Q$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \exp(iax)\, dx$ P, Q wielomiany, Q nie ma pierwiastków rzeczywistych, $\deg P + 1 \leqslant \deg Q$

(d) $\int_0^{\infty} x^p W(x)\, dx$ $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, W nie ma biegunów w $\mathbb{R}_+$

$\lim_{z \to 0} z^a Q(z) = 0$

$\lim_{|z| \to \infty} z^a Q(z) = 0$

(e) $\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ Q nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}_+$, $\deg P(x) + 2 \leqslant \deg Q(x)$

(f) $\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \log x\, dx$ Q nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}_+$, $\deg P(x) + 2 \leqslant \deg Q(x)$
Q jest rzeczywiste dla $x \in \mathbb{R}$.

(g) $\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q W(x)$ $p+q \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, W nie ma biegunów w $[a,b]$

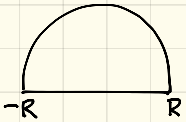
Powyższe całki doliczamy całkując odpowiednie funkcje po odpowiednich konturach. W (a) korzystamy ze wzorów $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) \underset{z = e^{i\varphi}}{=} \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ $\quad W(\cos\varphi, \sin\varphi) = \tilde{W}(z)$ $\quad z = e^{i\varphi}$

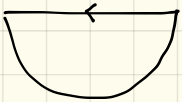
$W(\sin\varphi,\cos\varphi)\,d\varphi = \tilde{W}(z)\frac{1}{iz}\,dz$ całkujemy po $\partial K(0,1)$

$z=e^{i\varphi}$

W (b) i (c) całkujemy po brzegu półkola

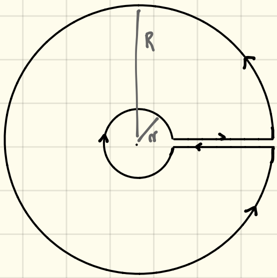



lub



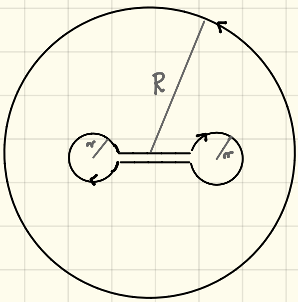
przechodząc do granicy $R\to\infty$ i argumentując, że w granicy całka po łuku znika. W przypadku (c) potrzebny jest fakt zwany Lemat Jordana.

W (d), (e), (f) całkujemy po tzw. dziurce od klucza, tzn po konturze o kształcie:




Przechodzimy potem z R do $\infty$ i r do 0.

W (f) całkujemy po „kości", $R\to\infty$, $r\to 0$



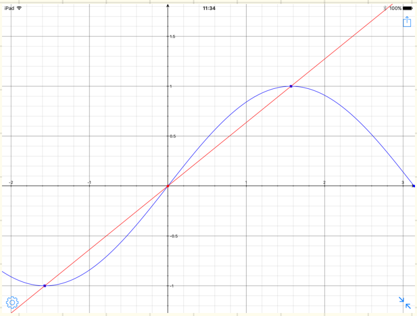

Szczegóły rachunkowe będą na ćwiczeniach. My przyjrzymy się jedynie Lematowi Jordana i jeszcze jednemu przydatnemu faktowi.

**LEMAT JORDANA** Niech $f$ będzie funkcją ciągłą określoną w górnej/dolnej półpłaszczyźnie. Jeżeli $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, to

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz = 0$$

$C_R$ jest górnym/dolnym półokręgiem o promieniu $R$ dla $a>0$/$a<0$.

**DOWÓD:** Potrzebne oszacowanie:



$\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$ dla $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ wynika ze znaku drugiej pochodnej (wypukłość funkcji) w omawianym przedziale.

$a>0$

$$\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\,dz \underset{z=Re^{i\varphi}}{=} \int_0^\pi e^{iaR(\cos\varphi+i\sin\varphi)} \cdot f(Re^{i\varphi})\, iRe^{i\varphi}\,d\varphi = \int_0^\pi e^{\cancel{iaR\cos\varphi}} e^{-aR\sin\varphi}\, \cancel{i}R\cancel{e^{i\varphi}} \cdot f(Re^{i\varphi})\,d\varphi$$

$$\left|\int_{C_R} e^{iaz} f(z)\right| < \int_0^\pi e^{-aR\sin\varphi} R\,|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi \leqslant \sup_{\varphi\in[0,\pi]}|f(Re^{i\varphi})| \int_0^\pi e^{-aR\sin\varphi} R\,d\varphi =$$

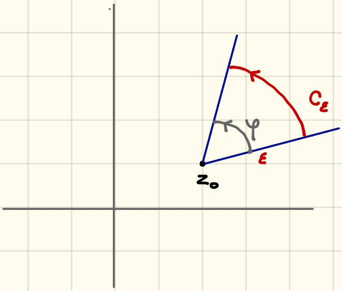
$$\sup_{\varphi\in[0,\pi]}|f(Re^{i\varphi})|\, 2\cdot\int_0^{\pi/2} R\, e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi \leqslant \sup_{\ldots}\ldots\, 2\int_0^{\pi/2} e^{-aR\frac{2\varphi}{\pi}} R\,d\varphi = \sup_{\ldots}\ldots\, \cancel{2}\cancel{R}\left[e^{aR\frac{2\varphi}{\pi}}\cdot\right.$$

$$\left.\left(-\frac{\pi}{a\cancel{R}\cdot\cancel{2}}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \sup_{\ldots}\ldots\,\left(1-e^{-aR}\right)\frac{\pi}{a} \leqslant \sup_{\varphi\in[0,\pi/2]}|f(Re^{i\varphi})|\,\frac{\pi}{a} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

dowód dla $a<0$ podobny, z użyciem dolnej półpłaszczyzny ∎

# JESZCZE JEDEN PRZYDATNY LEMAT






Niech $z_0$ będzie biegunem pierwszego rzędu funkcji $f$. Wtedy

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = i\varphi \operatorname{Res}_{z_0} f$$

DOWÓD: Jeśli funkcja ma biegun pierwszego rzędu, to $z \longmapsto (z-z_0)f(z)$ jest holomorficzna w otoczeniu $z_0$, w szczególności ciągła. Podstawmy w całce $z = z_0+\varepsilon e^{i\alpha}$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(z_0+\varepsilon e^{i\alpha})\,\varepsilon i e^{i\alpha}\,d\alpha$$

z ciągłości $(z-z_0)f(z)$ w otoczeniu $z_0$ wynika, że całka jest zbieżna jednostajnie ze względu na parametr $\varepsilon$, zatem

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(z_0+\varepsilon e^{i\alpha})\,\varepsilon e^{i\alpha}\,d\alpha = i\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\underbrace{\varepsilon e^{i\alpha}}_{z-z_0}\ \underbrace{f(z_0+\varepsilon e^{i\alpha})}_{f(z)}\Big)\,d\alpha = i\operatorname{Res}_{z_0} f\ \underbrace{(\alpha_1-\alpha_0)}_{\varphi} =$$

$= i\varphi \operatorname{Res}_{z_0} f$. Skorzystaliśmy ze wzoru na residuum w biegunie pierwszego rzędu

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \quad \blacksquare$$