PUNKT „∞"

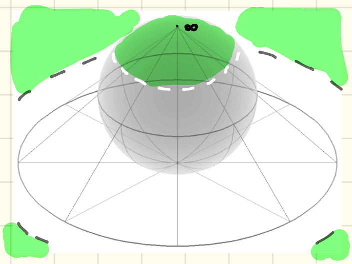
1

Przy okazji homografi była już mowa o tym, że punkt w ∞ można w pewnych warunkach traktować jak „zwykłą liczbę zespoloną". Postaramy się to nieco sformalizować, głównie do celów rachunkowych. Całkować jest często łatwiej używając pojęcia residuum w nieskończoności.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ **Otoczeniem ∞** nazywamy każdy zbiór otwarty w $\mathbb{C}$ zawierający zewnętrze pewnego koła o środku w $z_0 = 0$

$$\mathcal{O} \supset \{z : |z| > R\} \text{ dla pewnego } \mathbb{R}.$$

Mówimy, że funkcja f jest holomorficzna w ∞ jeśli funkcja $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ jest holomorficzna w $z_0 = 0$.



Punkt ∞ nazywamy izolowanym punktem osobliwym f jeśli ∞ nie należy do dziedziny f i jeśli f jest holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(0,R)$ dla pewnego $R>0$

Podobnie jak rozwijaliśmy funkcje w pierścieniu $\mathcal{R}(z_0, 0, R)$ w nakłutym otoczeniu izolowanego „zwykłego" punktu osobliwego, tak samo możemy rozwijać w szereg w pierścieniu $\mathcal{R}(0, R, \infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{K}(0,R)$

Otrzymany szereg Laurenta będzie miał postać jak zwykle, tzn

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Podobnie jak dla $z_0 \in \mathbb{C}$ w ∞ rozróżniamy trzy przypadki 2

(1) Istnieje $\lim_{z \to \infty} f(z) \neq \infty$: Funkcja ma w ∞ osobliwość pozorną

Można ją dokreślić w ∞ kładąc $f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z)$ i otrzymując funkcję holomorficzną w otoczeniu ∞.
Rozwinięcie funkcji w szereg Laurenta w $R(0, R, \infty)$ ma w tym przypadku postać

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \qquad f(\infty) = a_0$$

Funkcja $z \xrightarrow{g} e^{1/z}$ ma ∞ osobliwość usuwalną $g(\infty) = 0$

(2) Istnieje różna od ∞ i 0 granica $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^k}$.

Wtedy mówimy że funkcja ma w ∞ biegun rzędu k. Rozwinięcie Laurenta ma wtedy postać

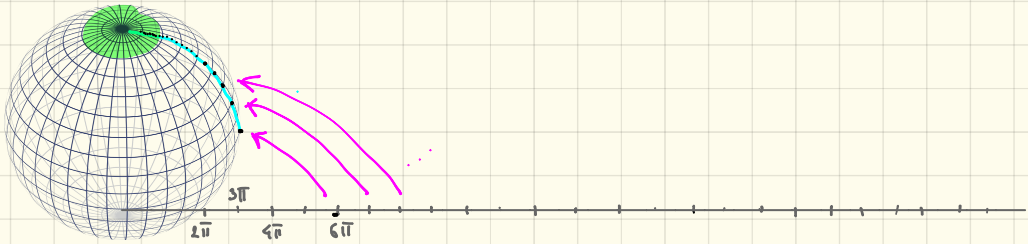
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{k} a_n z^n \qquad a_k \neq 0$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{a_n}{z^n} + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k$$

Przykładów takich funkcji należy szukać wśród wielomianów i funkcji wymiernych. Wielomian stopnia k ma biegun rzędu k w nieskończoności. Podobnie każda funkcja wymierna, której stopień licznika jest wyższy o k niż stopień mianownika.

(3) Jeśli granica f w ∞ nie istnieje, f ma w ∞ osobliwość istotną. W takim przypadku nieskończenie wiele wyrazów z dodatnimi potęgami w rozwinięciu w szereg Laurenta ma niezerowe współczynniki. Funkcja $z \mapsto e^{z^2}$ ma w ∞ istotny punkt osobliwy.

Oczywiście bywają też funkcje, które w ∞ mają punkt osobliwy nieizolowany, np funkcja $z \mapsto \frac{1}{\sin z}$. Funkcja sin ma nieskończenie wiele zer w każdym otoczeniu ∞, wobec tego funkcja $z \to \frac{1}{\sin z}$ ma nieskończenie wiele biegunów w każdym otoczeniu ∞.



DEFINICJA Niech $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Mówimy, że f jest meromorficzna w Ω jeśli f jest holomorficzna w $\Omega \setminus \{z_1, \dots z_n\}$ oraz w $z_1 \dots z_n$ ma usuwalne punkty osobliwe bądź bieguny.

Istnieją także funkcje meromorficzne na $\overline{\mathbb{C}}$. Dotyczy ich następujące twierdzenie

TWIERDZENIE: Każda funkcja meromorficzna na $\mathbb{C}$ jest wymierna.

DOWÓD: Sfera Riemanna jest zbiorem zwartym, punkty osobliwe funkcji meromorficznej są izolowane, zatem musi ich być skończona liczba. Gdyby było ich więcej, co najmniej przeliczalnie, moglibyśmy wybrać spośród nich ciąg a z tego ciągu podciąg zbieżny. Mamy więc $\{z_1, z_2, \dots z_k, \infty\}$ zbiór punktów osobliwych funkcji f. Osobliwość w ∞ może być usuwalna, ale dopisujemy ją tu, bo rzadko ∞ należy do dziedziny f w sposób naturalny.

f rozwijamy w szereg wokół każdej z osobliwości i bierzemy części osobliwe rozwinięcia:

dla $i \in \overline{1, l}$
$$g_i = \sum_{n=1}^{k_i} a_n^i (z - z_i)^{-n_i}$$

w ∞
$$g_\infty = \sum_{n=1}^{k_\infty} a_i^\infty z^n$$

Bierzemy teraz
$$h(z) = f(z) - g_\infty(z) - \sum_i g_i(z)$$

h ma w z_i oraz w ∞ osobliwości usuwalne.

Możemy ją dookreślić we wszystkich tych punktach otrzymując funkcję holomorficzną i ograniczoną w $\mathbb{C}$, a więc na mocy tw. Liouville'a funkcję stałą. Oznaczmy tę stałą h_0

Wtedy $h_0 = f(z) - g_\infty(z) - \sum_i g_i(z)$

$$f(z) = \underbrace{\overset{\text{const.}}{h_0} + \underbrace{g_\infty(z)}_{\text{wielomian}} + \underbrace{\sum_i g_i(z)}_{\text{f. wymierna}}}_{\text{f. wymierne!}}$$

∎

Do tej pory rozszerzaliśmy dziedzinę funkcji dokładając punkt ∞. Można dołożyć ∞ także do wartości. W tej nowej koncepcji jedynie istotne lub nieizolowane osobliwości są prawdziwymi osobliwościami.

Definicja funkcji analitycznej na obszarze $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ o wartościach w $\overline{\mathbb{C}}$ mogłaby wyglądać np tak: 5

DEFINICJA: f jest analityczna w $z_0 \in \Omega$ jeśli

(i) $z_0 \neq \infty$, $f(z_0) \neq \infty$ $\longrightarrow$ f analityczna w otoczeniu z_0 w zwykłym sensie

(ii) $z_0 \neq \infty$ $f(z_0) = \infty$ $\longrightarrow$ $1/f(z)$ analityczna w otoczeniu z_0 w zwykłym sensie

(iii) $z_0 = \infty$ $f(z_0) \neq \infty$ $\longrightarrow$ $f(\frac{1}{z})$ analityczna w otoczeniu 0 w zwykłym sensie

(iv) $z_0 = \infty$, $f(z_0) = \infty$ $\longrightarrow$ $\dfrac{1}{f(1/z)}$ analityczna w otoczeniu 0 w zwykłym sensie.

Według powyższej definicji f. meromorficzną na Ω można rozszerzyć do analitycznej o wartościach w $\overline{\mathbb{C}}$ kładąc ∞ w biegunach. Dla funkcji $\overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ obowiązuje twierdzenie

TWIERDZENIE: (1) Funkcja analityczna z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\mathbb{C}$ jest stała

(2) Każda funkcja analityczna z $\overline{\mathbb{C}}$ w $\overline{\mathbb{C}}$ jest wymierna

(3) Każda bijekcja analityczna $\overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ jest homografią.

Cała powyższa zabawa przyda nam się do całkowania:

DEFINICJA: Niech ∞ będzie izolowanym punktem osobliwym funkcji f

$$\operatorname{Res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial(\mathbb{C} \setminus K(0,R))} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(0,R)} f(z)\,dz$$

dla wystarczająco dużego R tak, aby w $\mathbb{C} \setminus K(0,R)$ nie było innych punktów osobliwych f poza ∞.

Jaki to ma związek z rozwinięciem w szereg Laurenta? Niech

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{dla } z\in R(0,R,\infty)$$

$$\operatorname{Res}_\infty f=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\partial K(0,R)} f(z)dz=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\partial K(0,1/R)} f\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right)dw=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{\partial K(0,\frac{1}{R})}\frac{f(1/w)}{w^2}dw$$

$w=\frac{1}{z}$

$dw=-\frac{1}{z^2}dz$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n \qquad f\left(\frac{1}{w}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n w^{-n} \qquad \frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n w^{-n-2}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{-(k+2)}w^k$$

$k=-n-2$

$k+2=-n \qquad n=-(k+2)$

Różowa całka to $\operatorname{Res}_0 g$ dla $g(w)=\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right)$ czyli współczynnik dla $k=-1$

$$k=-1 \longrightarrow -(k+2)=-(-1+2)=-1.$$

$$\operatorname{Res}_\infty f=-a_{-1}$$

W niektórych podręcznikach pisze się $\operatorname{Res}_\infty f=-a_1$ mając na myśli rozwinięcie funkcji $z\longmapsto f(1/z)$ wokół zera.