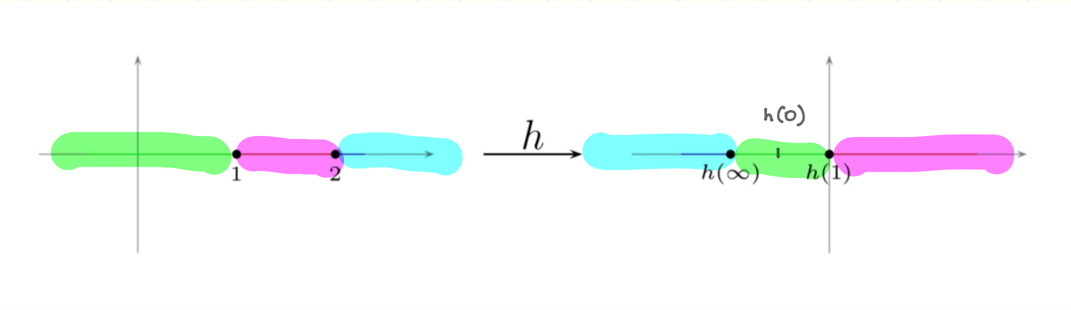
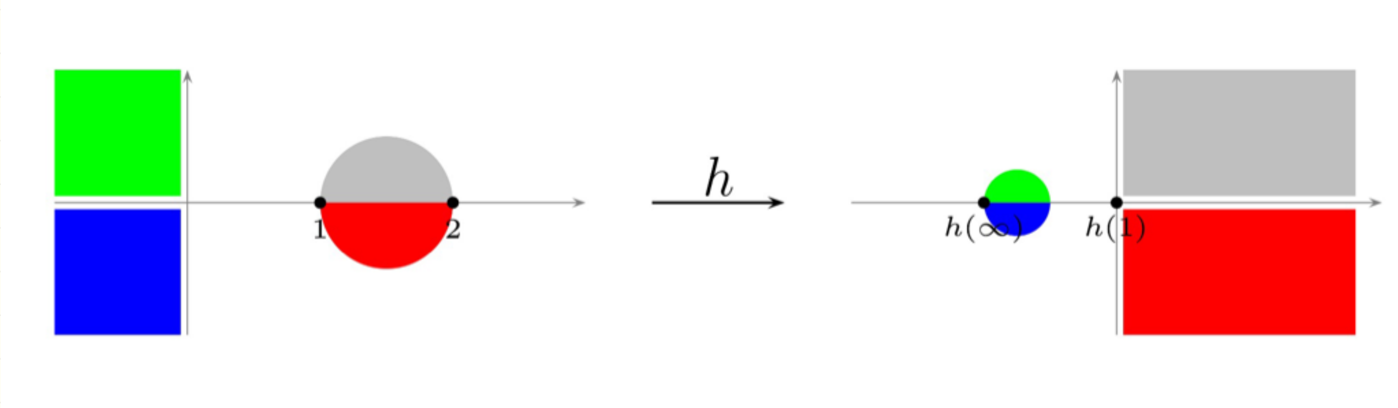
ZADANIE: Obliczyć całkę $\int_1^2 (x+1)\sqrt[6]{\frac{x-1}{2-x}}\,dx$

całkować będziemy funkcję $f(z)=(1+z)\left(\frac{z-1}{2-z}\right)^{1/6}$ ze stosownie zdefiniowanym pierwiastkiem stopnia 6

$h(z)=\frac{z-1}{2-z}$ homografia jest, jak wiadomo, bijekcją $\bar{\mathbb{C}}$ w siebie. Nasze h zachowuje oś rzeczywistą: $h(1)=0$ $h(2)=\infty$ $h(\infty)=-1$ $h(0)=-\frac{1}{2}$

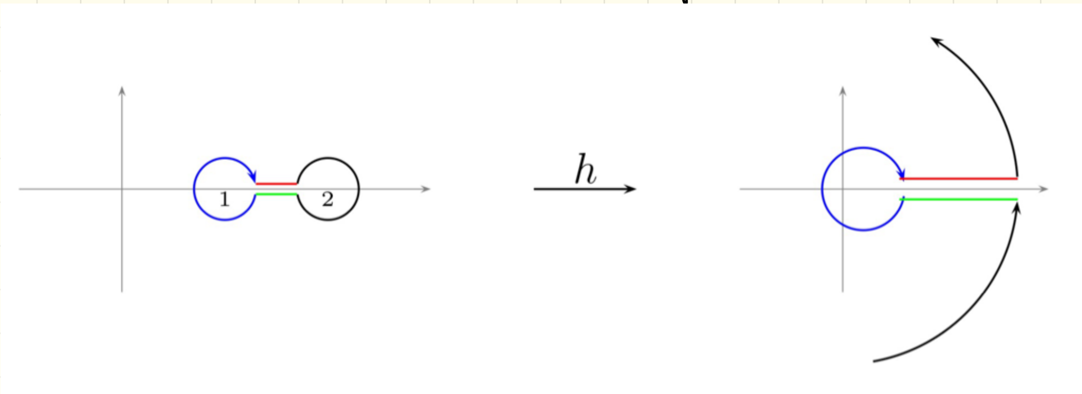
$h([1,2[)=[0,\infty[$





Ponadto obrazem $\partial K(1, r)$ (dla $r \ll 1$) jest $\partial K\left(\frac{r^2}{1-r^2}, \frac{r}{1-r^2}\right)$

obrazem $\partial K(2, r)$ (dla $r \ll 1$) jest $\partial K(-1, 1/r)$



3

Pierwiastek stopnia 6 $\sqrt[6]{h(z)} = \exp\left(\frac{1}{6}\log(h(z))\right)$ można dookreślić biorąc główną gałąź logarytmu wtedy np:

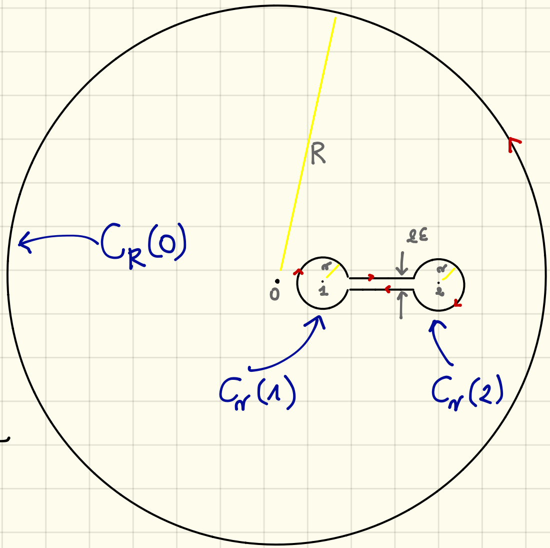
$$\sqrt[6]{h(0)} = \sqrt[6]{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\, e^{i\pi/6}$$

$$h(1+i) = \frac{1+i-1}{2-1-i} = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{1}{2}(i-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i\,3\pi/4}$$

$$\sqrt[6]{h(3)} = \sqrt[6]{-2} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/6}$$

$$\sqrt[6]{h(1+i)} = 2^{-1/12}\, e^{i\pi/8}$$

Konturem właściwym do całkowania jest:

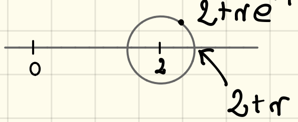


Oszacujemy całki po $C_r(1)$, $C_r(2)$ dla $r \to 0$, całki po górnej i dolnej części odcinka $[1,2]$ przy $\varepsilon \to 0$ i policzymy całkę po C_R używając residuum w nieskończoności.

Wewnątrz konturu funkcja jest holomorficzna więc całka po całym konturze $= 0$.

$$\left|\oint_{C_r(1)} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(1+re^{i\varphi})\, ire^{i\varphi}\,d\varphi\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|f(1+re^{i\varphi})\right| r\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left|(1+1+re^{i\varphi}) \sqrt[6]{h(1+re^{i\varphi})}\right| r\,d\varphi \leq (2+r)\, r \int_0^{2\pi} \left|\sqrt[6]{\frac{r^2}{1-r^2} + \frac{r}{1-r^2}\, e^{i\alpha(\varphi)}}\right| d\varphi$$



$$\leq 2\pi r\,(2+r) \sup_{\alpha\in[0,2\pi]} \left|\exp\left(\frac{1}{6} \log \frac{r}{1-r^2}\{r+e^{i\alpha}\}\right)\right|$$

$$= 2\pi r(2+r)\sqrt[6]{\frac{r}{1-r^2}} \sup_{\alpha\in[0,2\pi]} \left|\exp \frac{1}{6} \underbrace{\log(r+e^{i\alpha})}_{\log|r+e^{i\alpha}| + i\beta(\alpha)}\right| \leq \underset{\downarrow\, 0}{2\pi r}\,\underset{\downarrow\, 2}{(2+r)}\,\underset{\downarrow\, 1}{(r+1)^{1/6}}\,\underset{\downarrow\, 0}{\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^{1/6}}$$

$\leq r+1$

$$\xrightarrow{r\to 0} 0.$$

$$\left| \oint_{C_r(2)} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} f(2+re^{i\varphi})\, ire^{i\varphi} d\varphi \right| \leq r \int_0^{2\pi} \left| f(2+re^{i\varphi}) \right| d\varphi =$$

$$= r \int_0^{2\pi} \left| 1+2+re^{i\varphi} \right| \left| \sqrt[6]{h(2+re^{i\varphi})} \right| d\varphi \leq r(3+r)2\pi \sup_{\varphi \in [0,2\pi]} \left| \exp \frac{1}{6} \log \left(-1+\frac{1}{r} e^{-i\varphi}\right) \right| =$$

$$2\pi r (3+r) \sup \left| \underbrace{\exp \frac{1}{6} \log \frac{1}{r}}_{\frac{1}{\sqrt[6]{r}}} \left\{ -r + e^{-i\varphi} \right\} \right| = 2\pi\, r^{5/6} (3+r) \sup \underbrace{\left| \exp \frac{1}{6} \left(-r + e^{-i\varphi}\right) \right|}_{\leq (r+1)^{1/6}}$$

$$\leq 2\pi\, \underset{\downarrow \atop 0}{r^{5/6}}\, \underset{\downarrow \atop 3}{(3+r)}\, \underset{\downarrow \atop 1}{(r+1)^{1/6}} \xrightarrow{r \to 0} 0$$

$$\int_{[1,2]\uparrow} f(z)\,dz = \int_{1+\delta}^{2-\varrho} (1+x+i\varepsilon)\sqrt[6]{h(x+i\varepsilon)}\,dx \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to 0}]{} \int_1^2 f(x)\,dx = I$$

$$h(x+i\varepsilon) = \frac{x+i\varepsilon-1}{2-x-i\varepsilon} = \frac{[(x-1)+i\varepsilon][(2-x)+i\varepsilon]}{(2-x)^2+\varepsilon^2} = \frac{(x-1)(2-x)-\varepsilon^2+i\varepsilon(x-1+2-x)}{\dots} =$$

$$= \frac{(x-1)(2-x)}{\dots} + \frac{i\varepsilon}{\dots} \leftarrow$$

dla $\varepsilon>0$ nad osią

dla $\varepsilon<0$ pod osią

$$\int_{[1,2]\downarrow} f(z)\,dz \longrightarrow -I\exp(2\pi i/6) = -I\exp(i\pi/3)$$

orientacja

pod osią

Ostatecznie całka po wewnętrznej części konturu w granicy

$$\substack{r\to 0\\ \varepsilon\to 0} \qquad I\left(1-e^{i\pi/3}\right)$$

Całkę po $C_R(0)$ obliczymy korzystając z pojęcia residuum w ∞.

$$\oint_{C_R(0)} f(z)dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}_\infty f$$

holomorficzne w otoczeniu ∞, bo ∞ jest punktem regularnym funkcji h $h(\infty) = -1$

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \sqrt[6]{h\left(\frac{1}{z}\right)}$$

Rozwijać będziemy wokół zera

W otoczeniu (-1) $z \longmapsto z^{1/6}$ jest holomorficzne.

$$\sqrt[6]{h\left(\tfrac{1}{z}\right)} = \sqrt[6]{\frac{1/z - 1}{2 - 1/z}} = \sqrt[6]{\frac{1-z}{2z-1}} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

$k(z)$

$$l(z) = \frac{1-z}{2z-1}$$

$$l'(z) = \frac{-1}{(2z-1)^2}$$

$$l''(z) = \frac{4}{(2z-1)^3}$$

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) = \frac{b_0}{z} + (b_0 + b_1) + \overbrace{(b_1 + b_2)}^{a_1} z + \dots$$

$$b_0 = (-1)^{1/6} = e^{i\pi/6} \qquad b_1 = k'(0) \qquad b_2 = \frac{1}{2} k''(0)$$

$$k'(0) = \exp\left(\frac{1}{6} \cdot \log\left(\frac{1-z}{2z-1}\right)\right)'\Bigg|_{z=0} = \exp\left(\frac{1}{6} \log l(z)\right) \frac{1}{6} \frac{l'(z)}{l(z)}\Bigg|_{z=0} = e^{i\pi/6} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot (-1) = \frac{1}{6} e^{i\pi/6}$$

7

$$\exp\left(\frac{1}{6}\log \ell(z)\right)\frac{1}{6}\frac{\ell'(z)}{\ell(z)} = k'(z)$$

$$k''(z) = \exp\left(\frac{1}{6}\log \ell(z)\right)\cdot\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\ell'(z)}{\ell(z)}\right)^2\frac{1}{6} + \frac{\ell''(z)\ell(z)-\ell'(z)^2}{(\ell(z))^2}\right\} =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{6}\log \ell(z)\right)\cdot\frac{1}{6}\left[\frac{\ell'(z)^2(-5/6)+\ell''(z)\ell(z)}{[\ell(z)]^2}\right]\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{6}e^{i\pi/6}\frac{-5/6+4}{1} = \frac{e^{i\pi/6}}{36}19$$

$$a_1 = b_1+b_2 = \frac{1}{6}e^{i\pi/6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{19}{36}e^{i\pi/6} = \frac{12+19}{72}e^{i\pi/6} = \frac{31}{72}e^{i\pi/6}$$

$$0 = \int_{C_R(0)} f(z)dz + I\left(1-e^{i\pi/3}\right) \qquad I\left(1-e^{i\pi/3}\right) = -2\pi i\, a_1 = -2\pi i\, a_1$$

$$I e^{i\pi/6}\underbrace{\left(e^{-i\pi/6}-e^{i\pi/6}\right)}_{\substack{-2i\sin\pi/6 \\ = -i}} = -2\pi i\, a_1 \qquad I = \frac{1}{-\cancel{i}\cancel{e^{i\pi/6}}}\cancel{2}\pi\cancel{i}\frac{31}{\cancel{72}_{36}}\cancel{e^{i\pi/6}}(-1) = \frac{31}{36}\pi$$

FAKT: Jeśli f jest $\overbrace{\text{meromorficzne w } \Omega}^{\in \mathcal{M}(\Omega)}$ i f ma w $x_0 \in \Omega$ zero rzędu k to f' ma w x_0 0 rzędu $(k-1)$. Jeśli f ma w x_0 biegun rzędu k to f' ma w x_0 biegun rzędu $(k+1)$.

DOWÓD: Oczywisty.

WNIOSEK: Jeśli $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ i f ma w x_0 zero rzędu k, to f'/f ma w x_0 biegun pierwszego rzędu z $\operatorname{Res}_{x_0} f'/f = k$ Jeśli f ma w x_0 biegun rzędu k to f'/f ma w a biegun rzędu 1 z residuum $-k$.

ISTOTNIE:

zero: $f(z) = (z-x_0)^k g(z) \quad g(x_0) \neq 0 \quad g \in \mathcal{M}(\Omega)$ w otoczeniu x_0

$$f'(z) = k(z-x_0)^{k-1} g(z) + (z-z_0)^k g'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{(z-x)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

holomorficzne w otoczeniu x_0

biegun: $f(z) = (z-x_0)^{-k} g(z)$

$$f'(z) = (-k)(z-x_0)^{-k-1} g(z) + (z-x_0)^{-k} g'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k}{(z-x_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

■

TWIERDZENIE: Wzór na liczbę zer i biegunów

Ω - obszar spójny, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ $D \subset \Omega$ zwarty i taki, że ∂D nie zawiera zer ani biegunów funkcji f wtedy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_z - N_p$$

gdzie N_z jest sumą krotności zer a N_p sumą krotności biegunów funkcji f

DOWÓD: Oczywiste z tw o residuach.

Zauważmy, że dla funkcji meromorficznych na $\overline{\mathbb{C}}$ (wymiernych) mamy

$Q(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ deg Q → suma krotności biegunów w $\mathbb{C}$
deg P → suma krotności zer w $\mathbb{C}$

deg P − deg Q ⟶ jeśli >0 rząd bieguna w ∞
jeśli <0 rząd zera w ∞

Suma krotności zer i biegunów na $\overline{\mathbb{C}}$ jest więc zero.