WYKŁAD 9 i 10

FUNKCJA GAMMA

Funkcja Γ Eulera zalicza się do bardzo klasycznej analizy. Pojawia się w wielu, pozornie niezwiązanych ze sobą zagadnieniach. Słuchacze wykładu Analiza II R Piotra Sołtana całkiem sporo na jej temat słyszeli, choć oczywiście w kontekście analizy rzeczywistej.

1

Rozważmy całkę z parametrem (z punktu widzenia rzeczywistego z dwoma parametrami:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt \qquad t^{z-1} = \exp([z-1]\log t)$$

Okazuje się, że całka ta jest niemal jednostajnie zbieżna na zbiorze $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$

Istotnie, weźmy $z = x + iy$ dla $0 < \alpha \leqslant x \leqslant \beta < \infty$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt = \underbrace{\int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt}_{I_2}$$

$$|t^{z-1} e^{-t}| = |e^{(x+iy-1)\log t} e^{-t}| = e^{(x-1)\log t} e^{-t} = t^{x-1} e^{-t} \leqslant t^{x-1} \underset{t \in]0,1]}{\leqslant} t^{\alpha-1}$$

Dla $\alpha > 0$ funkcja $g(t) = t^{\alpha-1}$ jest całkowalna na $]0,1]$ zatem I_1 jest jednostajnie zbieżna

Dla całki I_2 potrzebujemy inne oszacowanie: dla $t > 0$ $\quad e^t > \frac{t^n}{n!} \quad \frac{n!}{t^n} > e^{-t}$

$$e^{-t} t^{x-1} < \frac{n!}{t^n} t^{x-1} = \frac{n!}{t^{n-x+1}}$$

← f. całkowalna dla $n > \beta \geqslant x$

(wykładnik w mianowniku jest większy niż 1)

Całka I_2 jest więc jednostajnie zbieżna.

$\Gamma(z)$ jest więc dobrze określona i ciągła na $\{z : \operatorname{Re} z > 0\} = \Omega$

$$u(x,y) = t^{(x+iy-1)} e^{-t} = \exp((x+iy)\log t)\, e^{-t}$$

Okazuje się, że funkcja ta jest też holomorficzna w tym obszarze. Istotnie weźmy dowolny zamknięty kontur C zawarty w Ω. Funkcja $z \longmapsto t^{z-1} e^{-t}$ jest holomorficzne w tym obszarze dla dowolnego $t \in]0,\infty[$ więc

$$f(z,t) = t^{z-1}e^{-t} \qquad \oint_C f(\zeta,t)\,d\zeta$$

$$\oint_C \Gamma(\zeta)\,d\zeta = \oint_C\left(\int_0^\infty f(\zeta,t)\,dt\right)d\zeta \underset{\substack{\uparrow\\ \text{jednostajna zbieżność}}}{=} \int_0^\infty\left(\oint_C f(\zeta,t)\,d\zeta\right)dt = 0.$$

FAKT: Zachodzą następujące wzory:

(1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, (2) $\Gamma(n+1) = n!$, (3) $\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z)$

DOWÓD:

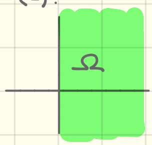
(1) Wynika z całkowania przez części: $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{(z+1)-1}e^{-t}\,dt =$ $\quad u = t^z,\ u' = zt^{z-1}$

$v' = e^{-t}$, $v = -e^{-t}$

$$-t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = z\Gamma(z)$$

(3) Wielokrotne użycie (1)

(2) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ i (3) daje (2).

Na razie Γ określone jest w obszarze  zdefiniujmy obszar Ω_n jako

$\Omega_m = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -m\}$ wtedy jeśli $z \in \Omega_n$ to $z+n \in \Omega$. Położymy

$$\Gamma_m(z) : \Omega_n \setminus \{-1,-2,\ldots,-m+1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\Gamma_m(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}$$

zauważmy, że jeśli $m > n$ to $\Omega_n \subset \Omega_m$ i na Ω_n mamy

$$\Gamma_m(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\cdots(z+n)\cdots(z+m-1)} = \frac{\cancel{(z+m-1)}\cdots\cancel{(z+n)}\,\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots\cancel{(z+n)}\cdots\cancel{(z+m-1)}} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \Gamma_n(z)$$

Γ_m jest więc rozszerzeniem Γ_n na większy obszar. W szczególności $\Gamma_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(z)$ na Ω. Ostatecznie Γ_n jest rozszerzeniem Γ. Na $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ kładziemy

$$\Gamma(z) = \Gamma_n(z) \text{ dla } n : \operatorname{Re}(z) > -n.$$

FAKT: $$\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$

Powyższy fakt jest uzasadnieniem wprowadzenia funkcji Beta: $B(u,v)=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$

DOWÓD: $$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty s^{2z-2}e^{-s^2}\,2s\,ds = 2\int_0^\infty s^{2z-1}e^{-s^2}\,ds$$

$t=s^2 \quad dt=2s\,ds$

$$\Gamma(u)\Gamma(v)=4\int_0^\infty dt\int_0^\infty ds\; t^{2u-1}e^{-t^2}s^{2v-1}e^{-s^2} = 4\int_0^\infty dt\int_0^\infty ds\; e^{-(t^2+s^2)}t^{2u-1}s^{2v-1} =$$

$s=r\cos\varphi,\ t=r\sin\varphi$

$$4\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^\infty r\,dr\, e^{-r^2} r^{2u+2v-2}\cos\varphi^{2u-1}\sin\varphi^{2v-1} =$$

$$4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(u+v)-1}\,dr\int_0^{\pi/2}\cos\varphi^{2u-1}\sin\varphi^{2v-1}\,d\varphi = 2\Gamma(u+v)\int_0^{\pi/2}\cos\varphi^{2u-1}\sin\varphi^{2v-1}\,d\varphi =$$

$$\Gamma(u+v)\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$

$t=\cos^2\varphi \quad \sin^2\varphi=1-t$

$dt=2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi$

$\blacksquare$

FAKT: Zachodzi wzór: $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

DOWÓD:

Definiujemy funkcję $f(w)=w^{z-1}(w-1)^{-z}$, gdzie $w^{z-1}=\exp((z-1)\log w)$

$w\in\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,0]$

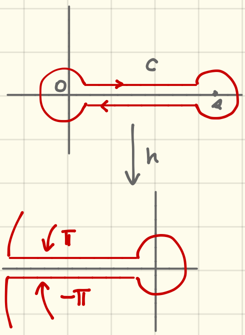
$(w-1)^{-z}=\exp(-z\log(w-1))$

$w\in\mathbb{C}\setminus\,]-\infty,1]$

Ale $f(w)=\left(\frac{w}{w-1}\right)^z\frac{1}{w}$ co pokazuje, że f można dookreślić na $]-\infty,0[$ i ostatecznie $w\in\mathbb{C}\setminus[0,1]$

$h(w)=\frac{w}{w-1}$: $\quad h([0,1])=[0,-\infty[\quad h([1,\infty[)=[1,\infty[\quad h(]-\infty,0])=[0,1[$

Funkcję $f(w)$ całkujemy po kości:



$$\int_C f(w)\,dw = \left(e^{i\pi z} - e^{i\pi z}\right)\int_0^1 t^{z-1}(t-1)^{-z}\,dt$$

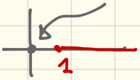
$\parallel$ (Residuum w ∞

$$-2\pi i \operatorname{Res}_\infty f = -(-1)2\pi i = 2\pi i$$

$$f(w) = \left(\frac{w}{w-1}\right)^z \frac{1}{w}$$

$n(\infty) = 1$ ↑ decyduje o residuum

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \left(\frac{1/u}{\frac{1}{u}-1}\right)^z u = \left(\frac{1}{1-u}\right)^z u = \sum a_n u^n$$



$a_0 = 0$

$$a_1 = z\left(\frac{1}{1-u}\right)^{z-1}\frac{1}{(1-u)^2}u + \left(\frac{1}{1-u}\right)^z\Bigg|_{u=0} = 1$$

$$2\pi i = \underbrace{\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)}_{i2\sin\pi z}\int_0^1 t^{\overbrace{z-1}^{u-1}}\, t^{\overbrace{-z}^{v-1}}\,dt = B(z, 1-z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(z+1-z)} =$$

$$= \Gamma(z)\Gamma(1-z)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \blacksquare$$

WNIOSEK: $\Gamma(1/2)\Gamma(1-1/2) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$

$\parallel$

$\Gamma^2(1/2)$ $\qquad$ $\Gamma(x) > 0$ dla $x>0$ więc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

WNIOSEK

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-s^2}\underbrace{s^{2\cdot\frac{1}{2}-1}}_{1}\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds$$

$\parallel$

$\sqrt{\pi}$

zamieniając zmienne dostaniemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-as^2}\,ds = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a>0$$

WZÓR LEGENDRE'A O PODWAJANIU:

$$2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$

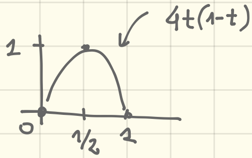
DOWÓD:

$$B(z,z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\,dt=2\int_0^{1/2} t^{z-1}(1-t)^{z-1}\,dt=$$

$s=4t(1-t)$ $\qquad s-4t+4t^2=0$ $\qquad t=\dfrac{4-\sqrt{16-4\cdot 4s}}{8}=\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-s}\right)$

$$dt=\frac{1}{2}\left(\vdash\frac{1}{2\sqrt{1-s}}\right)ds=\frac{1}{4}\,\frac{ds}{\sqrt{1-s}}$$

$$=2\cdot\int_0^1 s^{z-1}\cdot\frac{1}{4}(1-s)^{-1/2}\,2^{-2z+2}\,ds=2^{-2z+1}\int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{\frac{1}{2}}\,ds=2^{-2z+1}B\left(z,\tfrac{1}{2}\right)$$



$$\frac{\Gamma(z)^{\cancel{2}}}{\Gamma(2z)}=\frac{\cancel{\Gamma(z)}\,\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\cdot 2^{-2z+1}\Rightarrow\Gamma(z)\Gamma\left(z+1/2\right)=\Gamma(2z)\,2^{-2z+1}$$

$$\boxed{\Gamma(2z)=2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right)}$$

∎

Funkcja Γ może także być określona wzorem podanym przez Gaussa:

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \qquad n^z=e^{z\log n}$$

← TWIERDZENIE

FAKT: Powyższa granica istnieje dla $z\neq 0,-1,-2,\dots$

DOWÓD:

Oznaczmy $f_n=\dfrac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ $\quad \Gamma(z)\overset{?}{=}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ mamy do czynienia z ciągiem funkcyjnym.

$$f_n(z)=\frac{n^z}{z(1+z)(1+\frac{z}{2})\cdots(1+\frac{z}{n})}$$

$$\frac{1}{f_n}=e^{-z\log n}\cdot z\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\cdot e^{z/k}=e^{-z\log n}\,e^{z(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}\,z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

$$=e^{z\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right)}_{\gamma_n}}\,z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

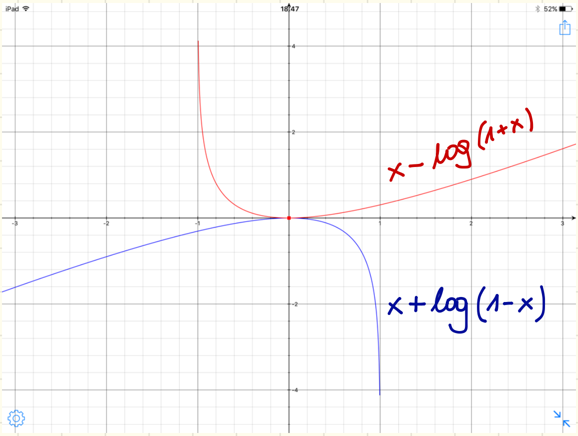
(1) ciąg γ_n jest zbieżny do tzw. stałej Eulera $\gamma=0{,}577215\dots$ (Euler używał symbolu C) Istotnie:

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\cancel{1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}+\dots+\cancel{\tfrac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}-\log(n+1)-\left(\cancel{1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}+\dots+\cancel{\tfrac{1}{n}}-\log n\right)=\frac{1}{n+1}+\log\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$y_n=\gamma_n-\frac{1}{n} \qquad y_n<\gamma_n$$

$$y_{n+1}-y_n=\cancel{1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}+\dots+\frac{1}{n}-\log(n+1)-\left(\cancel{1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}+\dots+\cancel{\tfrac{1}{n-1}}-\log n\right)=\frac{1}{n}-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\underbrace{\frac{1}{n+1}+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{<0} \qquad y_{n+1}=\underbrace{\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>0}$$



(2) $z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$ w granicy $n\to\infty$ i otrzymujemy iloczyn nieskończony. Zagadnienie zbieżności takiego iloczynu wymaga nieco pracy.

Iloczyny nieskończone

$I=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}c_k$ wygodniej jest zapisywać $c_k=1+a_k$

$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ Jeśli granica istnieje to mówimy że iloczyn jest zbieżny. Wprowadzamy także pojęcie bezwzględnej zbieżności

problem z $a_k=-1$

$I_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ $\quad \log(I_n)=\log\left(\prod\cdots\right)=\sum_{k=1}^{n}\log(1+a_k)$

Mówimy, że iloczyn jest zbieżny bezwzględnie jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+a_k)$ jest zbieżny bezwzględnie, tzn $\sum_{k=1}^{\infty}|\log(1+a_k)|<\infty$

Okazuje się że jest to równoważne stwierdzeniu że $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$

DOWÓD: (1) niech $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ oraz

Poza skończoną liczbą indeksów $|a_n| < \frac{1}{2}$. Weźmy teraz funkcję $t \longmapsto \left|\frac{\log(1+t)}{t}\right|$. Jest ona określona na $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ (logarytm jest niejednoznaczny, ale moduł logarytmu jest jednoznaczny). Funkcja ta jest ciągła i dodatnia. Na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy, zatem $|t| \leq \frac{1}{2}$ mamy $0 < C_1 \leq C_2$ takie, że

$$C_1 \leq \left|\frac{\log(1+t)}{t}\right| \leq C_2 \Rightarrow |\log(1+a_n)| \leq C_2 |a_n|$$

zatem kryterium porównawcze daje wynik

(2) W drugą stronę korzystamy z drugiej części nierówności: Jeśli $\sum_{k=1}^{\infty} |\log(1+a_k)| < \infty$ to $\log(1+a_k) \longrightarrow 0$ i $|a \longrightarrow 0$

$$C_1 |a_n| \leq \log|1+a_n|$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{C_1} \log|1+a_n|$$

i znowu stosujemy kryterium porównawcze.

$$z \prod_{k=1}^{m} \underbrace{\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}}_{1+a_k} \qquad 1+a_k = \left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}$$

$$|a_k| = \left|\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} - 1\right|$$

$$\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \quad u \qquad \exp\left(u + \left(-u - \frac{u^2}{2} - \cdots\right)\right) = \exp\left(-\sum_{l=2}^{\infty} \frac{u^l}{l}\right)$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\exp(\mathrm{Log}(1-u)) = \exp\Big(\underbrace{-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \cdots}_{g(u)}\Big) \qquad |u| < 1$$

$$|a_k| = |\exp(g(u)) - 1| \leq \left|\sum_{1}^{\infty} \frac{g(u)^m}{m!}\right| \leq \sum_{1}^{\infty} \frac{|g(u)|^m}{m!} \leq |g(u)| \sum_{0}^{\infty} \frac{g(u)^m}{(m+1)!}$$

$$\leq |g(u)| \sum_{0}^{\infty} \frac{g(u)^m}{m!} = |g(u)| \exp(|g(u)|)$$

$$|g(u)| = \left|\sum_{2}^{\infty} \frac{u^l}{l}\right| = |u|^2 \left|\sum_{0}^{\infty} \frac{u^l}{l+2}\right| \leq |u|^2 \sum_{0}^{\infty} |u|^l = |u|^2 \frac{1}{1-|u|}$$

$$|a_k| \leqslant |g(u)| \exp(|g(u)|)$$

$$|g(u)| \leqslant |u|^2 \frac{1}{1-|u|} < 2 \leqslant 2|u|^2 < 1$$

$|u| < \frac{1}{2}$

$$|g(u)| \underbrace{\exp(|g(u)|)}_{<3} \leqslant 6|u|^2$$

$|a_k(z)| \leqslant 6\left|\frac{z}{k}\right|^2$ Weźmy teraz $z \in K(C\ ;)$ $|z| < R$

$|a_k(z)| \leqslant \frac{6R^2}{k^2} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6R^2}{k^2}$ jest zbieżny

$\sum |a_k(z)| < \infty$ (jednostajnie na $K(0,r)$, $r<R$) R dowolne $\rightarrow$ niemal jednostajnie na $\mathbb{C}$

Ostatecznie iloczyn jest niemal jednostajnie zbieżny na $\mathbb{C}$. Granica $n \rightarrow \infty$ $z \mapsto \frac{1}{f_n(z)}$ iest więc pewną funkcją zerującą się w $\{0,-1,-2,\dots\}$. ■

Wiemy, że granica po prawej stronie twierdzenia istnieje. Pozostaje do wykazania że jest ona równa funkcji Γ.

W tym celu przypomnijmy definicję funkcji B

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$$

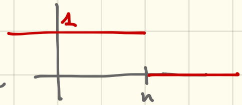
weźmy $v = n+1$ i $u=2$ otrzymujemy

$$B(n+1,2) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2)}{\Gamma(n+1+2)} = \frac{n!\,\cancel{\Gamma(2)}}{2(2+1)\cdots(2+n)\cancel{\Gamma(2)}} = \frac{n!}{2(2+1)\cdots(2+n)}$$

$$\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \int_0^1 (1-t)^n t^{z-1}\,dt = \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \left(\frac{u}{n}\right)^{z-1} \frac{du}{n} = \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1} n^{-z}\,du$$

$t = \frac{u}{n}$

$dt = du/n$



funkcje schodkowe

$$\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \int_0^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1}\,du = \int_0^\infty \underbrace{\theta(n-u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1}}\,du$$

$$\left|\theta(n-u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1}\right| \leq e^{-u} u^{\mathrm{Re}\,z-1} = g(z) \leftarrow \text{całkowalna}$$

majoranta dla $\mathrm{Re}\,z > 0$

tw. o zbieżności majoryzowalnej

$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u} \quad \text{dla } u<n$$

patrz wykład z analizy – dowodząc zbieżności tego ciągu pokazuje się że jest on od pewnego miejsca monotoniczny, konkretnie rosnący.

Mamy więc $\lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \theta(n-u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^n u^{z-1}\,du =$

$= \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} = \Gamma(z)$ dla $z: \mathrm{Re}(z) > 0$. Reszta oczywista.