Wykład 22

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

3 stycznia 2012

Typowa całka liczona przez residua. Posługując się metodami pochodzącymi z analizy zespolonej obliczymy całkę (w sensie Riemanna)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin(x) \mathsf{d}x}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Właściwą do całkowania funkcją zespoloną będzie funkcja

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 5z^2 + 4}.$$

Mianownik tej funkcji rozkładamy na czynniki:

$$z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4) = (z - i)(z + i)(z - 2i)(z + 2i).$$

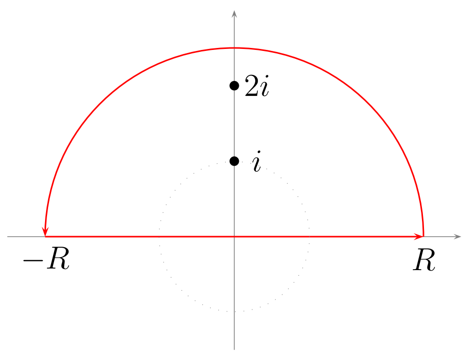
Funkcja f ma więc cztery bieguny pierwszego rzędu, po dwa w dolnej i górnej półpłaszczyźnie. Na osi rzeczywistej, dla $z = x$ mamy

$$f(x) = \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{x^3(\cos(x) + i\sin(x))}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{x^3 \cos(x)}{x^4 + 5x^2 + 4} + i\frac{x^3 \sin(x)}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Całkę I Otrzymamy więc z części urojonej całki z f po osi rzeczywistej. Obie całki (z sinusem i cosinusem) są zbieżne, oddzielnie na dodatniej i ujemnej półosi, dlatego można użyć przejścia granicznego

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3 \sin(x) \mathsf{d}x}{x^4 + 5x^2 + 4}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos(x) \mathsf{d}x}{x^4 + 5x^2 + 4} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^3 \cos(x) \mathsf{d}x}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Użycie metody residuów wymaga całkowania po zamknietym konturze. Domkniemy więc odcinek $[-R, R]$ półokręgiem o promieniu R w górnej półpłaszczyźnie, jak zwykle wystarczająco dużym, aby objął wszystkie osobliwości mające dodatnie części urojone:



Przyjrzyjmy się teraz całce z f po górnym półokręgu o promieniu R. Jak zwykle podstawiamy $z = Re^{i\phi}$, $\mathsf{d}z = Rie^{i\phi}\mathsf{d}\phi$ i szacujemy wartość bezwzględną całki

$$\left| \int_{(\Gamma_R,+)} \frac{z^3 e^{iz} \mathsf{d}x}{z^4 + 5z^2 + 4} \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{R^3 e^{3i\phi} e^{iR(\cos\phi + i\sin\phi)} Rie^{i\phi} \mathsf{d}\phi}{R^4 e^{4i\phi} + 5R^2 e^{2i\phi} + 4} \right| \leqslant$$

$$\int_0^{\pi} \frac{|R^4 e^{3i\phi} e^{iR\cos\phi} e^{-R\sin\phi} i e^{i\phi}| \mathsf{d}\phi}{|R^4 e^{4i\phi} + 5R^2 e^{2i\phi} + 4|} = \int_0^{\pi} \frac{R^4 e^{-R\sin\phi} \mathsf{d}\phi}{|R^4 e^{4i\phi} + 5R^2 e^{2i\phi} + 4|}$$

Oznaczmy przez $M(R)$ największą wartość funkcji $|f|$ na półokręgu, tzn

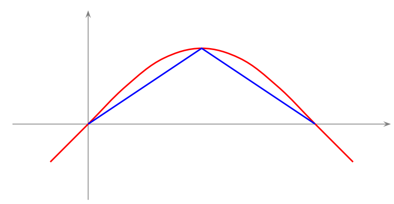
$$M(R) = \sup_{\phi\in[0,\pi]} \frac{R^3}{|R^4e^{4i\phi} + 5R^2e^{2i\phi} + 4|}$$

Ze względu na potęgi R w liczniku i mianowniku

$$\lim_{R\to\infty} M(R) = 0.$$

Trzeba więc zająć się całką

$$\int_0^\pi Re^{-R\sin\phi}\mathsf{d}\phi.$$



Na odcinku $[0, \frac{pi}{2}]$ funkcja $\phi \mapsto \sin\phi$ jest większa niż funkcja $\phi \mapsto \frac{2}{\pi}\phi$, możemy więc oszacować

$$\int_0^\pi Re^{-R\sin\phi}\mathsf{d}\phi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-R\sin\phi}\mathsf{d}\phi \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-R\frac{2}{\pi}\phi}\mathsf{d}\phi = \pi(1-e^{-R}) \leqslant \pi.$$

Ostatecznie

$$\left|\int_{(\Gamma_R,+)} \frac{z^3e^{iz}\mathsf{d}x}{z^4+5z^2+4}\right| \leqslant M(R)\pi \longrightarrow_{R\to\infty} 0.$$

Nasza całka I może więc być wyrażona wzorem

$$I = \Im\left(2\pi i Res_i f + 2\pi i Res_{2i} f\right).$$

Przy okazji można też policzyć podobną całkę z cosinusem zamiast sinusa biorąc część rzeczywistą zamiast urojonej. Liczymy teraz residua w punktach i oraz $2i$

$$Res_i f = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{i^3e^{i^2}}{(i+i)(i+2i)(i-2i)} = \frac{-ie^{-1}}{(2i)(3i)(-i)} = \frac{-1}{6e}$$

$$Res_{2i} f = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \frac{(2i)^3e^{2i^2}}{(2i+i)(2i-i)(2i+2i)} = \frac{-8ie^{-2}}{(3i)(i)(4i)} = \frac{-8ie^{-2}}{-12i} = \frac{2}{3e^2}$$

Wyznaczamy wartość całki:

$$I = \Im\left(2\pi i\frac{-1}{6e} + 2\pi i\frac{2}{3e^2}\right) = \pi\frac{4-e}{3e^2}$$

Całka z cosinusem zamiast sinusa ma wartość zero (co nie dziwi, bo funkcja jest wtedy antysymetryczna względem zera).

Wykonane przez nas rachunki można podsumować w następującej ogólnej metodzie całkowania funkcji typu

$$x \mapsto Q(x)e^{iax}$$

spełniających warunki

(1) $a \neq 0$
(2) Q nie ma osobliwości na osi rzeczywistej
(3) $\lim_{|z|\to\infty} Q(z) = 0$

Kontur całkowania dobieramy w zależności od znaku a. Jeśli $a > 0$, jak w powyższym przykładzie całkujemy po brzegu półkola położonego w górnej półpłaszczyźnie, jeśli $a < 0$ całkujemy po brzegu półkola położonego w dolnej półpłaszczyźnie. Całka po łuku znika ze względu na zachowanie funkcji Q. Fakt ten zazwyczaj wyraża się w postaci tzw. lematu Jordana:

Lemat 1. *Niech f będzie funkcją ciągłą określoną w górnej (dolnej) półpłaszczyźnie. Wówczas dla $a > 0$ ($a < 0$) zachodzi*

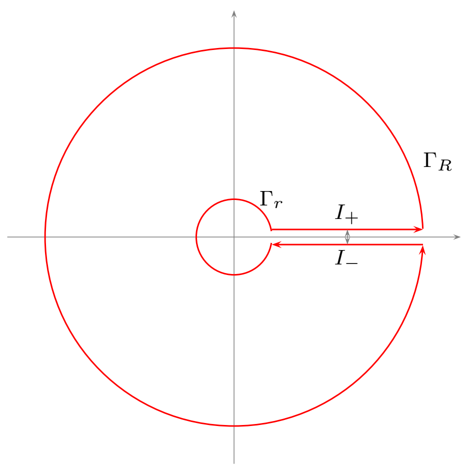
$$\lim_{R\to\infty} \int_{(\Gamma_R,+)} f(z)e^{iaz}\mathsf{d}z = 0.$$

Dowód wygląda podobnie jak w rozważanym przez nas konkretnym przypadku, nie będziemy go więc przytaczać. Ostatecznie interesującą całkę wyznaczamy licząc residua funkcji w górnej (dolnej) półpłaszczyźnie.

Całka po dziurce od klucza (albo, jak mówią niektórzy, po brzegu pacmana): W całkach typu

$$\int_0^\infty x^p Q(x)\mathsf{d}x, \qquad \int_0^\infty (\log x)\, Q(x)\mathsf{d}x, \qquad \int_0^\infty Q(x)\mathsf{d}x$$

gdzie Q jest funkcją wymierną spełniającą stosowne warunki, wykorzystuje się następujący kontur całkowania:



Policzymy wspólnie następujący przykład:

$$J = \int_0^\infty \frac{\sqrt[6]{x}\mathsf{d}x}{(x+1)(x+2)}.$$

Po dziurce od klucza całkujemy funkcję

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{6}}}{(z+1)(z+2)}.$$

Ułamkowe potęgi liczb zespolonych budzą zawsze pewne wątpliwości, doprecyzujmy więc, że

$$z^{\frac{1}{6}} = \exp(\frac{1}{6}\log(|z|) + \frac{1}{6}iArg(z))$$

gdzie Arg oznacza argument główny, czyli z przedziału $[0, 2\pi]$. Odcinek I_+ położony jest powyżej osi rzeczywistej w odległości ϵ. Dla $\epsilon \to 0$ całka

$$\int_{I_+} f(z)\mathsf{d}z$$

dąży do całki

$$\int_r^R \frac{\sqrt[6]{x}\mathsf{d}x}{(x+1)(x+2)},$$

bo

$$z^{\frac{1}{6}} = \exp(\frac{1}{6}\log(|z|) + \frac{1}{6}iArg(z)) \to \exp(\frac{1}{6}\log(x)) = x^{\frac{1}{6}}.$$

Całka po I_- (uwaga na orientację) przy małym ϵ dąży do całki

$$-\int_r^R \frac{\sqrt[6]{x}e^{i\frac{\pi}{3}}\mathsf{d}x}{(x+1)(x+2)},$$

bo po dolnej stronie osi rzeczywistej dodatniej argument z jest prawie 2π, zatem

$$z^{\frac{1}{6}} = \exp(\frac{1}{6}\log(|z|) + \frac{1}{6}iArg(z)) \to \exp(\frac{1}{6}\log(x) + \frac{1}{6}i(2\pi)) = x^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Dzięki własnościom funkcji f, o których za chwilę, całki po małym i dużym kółku znikają przy $r \to 0$ i $R \to \infty$. W tej sytuacji

$$J - Je^{i\frac{\pi}{3}} = 2\pi i(Res_{-1}f + Res_{-2}f). \tag{1}$$

Liczymy residua:

$$Res_{-1}f = \frac{\sqrt[6]{-1}}{(-1+2)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Res_{-2}f = \frac{\sqrt[6]{-2}}{(-2+1)} = -\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Podstawiamy do prawej strony wzoru (1)

$$2\pi i(Res_{-1}f + Res_{-2}f) = 2\pi i(e^{i\frac{\pi}{6}} - \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{6}}) = 2\pi i e^{i\frac{\pi}{6}}(1-\sqrt[6]{2})$$

i upraszczamy lewą stronę wzoru

$$J - Je^{i\frac{\pi}{3}} = Je^{i\frac{\pi}{6}}(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}}) = -Je^{i\frac{\pi}{6}}2i\sin\frac{\pi}{6} = -Je^{i\frac{\pi}{6}}i.$$

Z porównania

$$\begin{aligned}-Je^{i\frac{\pi}{6}}i &= 2\pi i e^{i\frac{\pi}{6}}(1-\sqrt[6]{2})\\ J &= -2\pi(1-\sqrt[6]{2})\\ J &= 2\pi(\sqrt[6]{2}-1) \simeq 0,76945...\end{aligned}$$

Wynik numeryczny obliczony przez Wolfram Alpha. Tym razem program potrafi jedynie numerycznie, a my analitycznie, dokładnie! Pozostało jeszcze przekonać się, że nie oszukiwaliśmy, tzn. przeanalizować co dzieje się na małym i dużym kółku. Na małym kółku $z = re^{i\varphi}$, $\mathsf{d}z = rie^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi$, tzn

$$\left|\int_{\Gamma_r} f(z)\mathsf{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{r^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\varphi}{6}}rie^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi}{(re^{i\varphi}+1)(re^{i\varphi}+2)}\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{r^{\frac{7}{6}}\mathsf{d}\varphi}{|(re^{i\varphi}+1)(re^{i\varphi}+2)|}$$

Największa wartość mianownika to $(1+r)(2+r)$, czyli

$$\left|\int_{\Gamma_r} f(z)\mathsf{d}z\right| \leqslant \frac{2\pi r^{\frac{7}{6}}}{(1+r)(2+r)} \longrightarrow_{r\to 0} 0$$

Na dużym okręgu jest podobnie. W rachunkach zastępujemy r przez R i przechodzimy z R do nieskończoności:

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\mathsf{d}z\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{R^{\frac{7}{6}}\mathsf{d}\varphi}{|(Re^{i\varphi}+1)(Re^{i\varphi}+2)|} \leqslant \frac{2\pi R^{\frac{7}{6}}}{(1+R)(2+R)} \longrightarrow_{R\to\infty} 0.$$

W powyższych rachunkach kluczowe było, że $\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0$ (dla całki po małym kółku) $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ (dla całki po dużym kółku) oraz to, że nie funkcja nie ma osobliwości na dodatniej osi rzeczywistej. Ważne także, że potęga x nie jest całkowita. Warunki jakie muszą spełniać funkcje w pozostałych dwóch typach całek oraz przykłady poznają Państwo na ćwiczeniach.

Całka po kości: (materiał nieobowiązkowy) Rzecz dotyczy obliczania następującej całki:

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q Q(x)\mathsf{d}x, \qquad p+q=k\in\mathbb{Z},$$

gdzie Q jest wymierną funkcją nie mającą biegunów na odcinku $[a,b]$, $p,q>-1$. Całkę tę możemy obliczyć korzystając z twierdzenia o residuach. Zapiszmy następujące przekształcenia:

$$(x-a)^p(b-x)^qQ(x) = \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^p (b-x)^k Q(x) = (h(x))^p\,(b-x)^kQ(x)$$

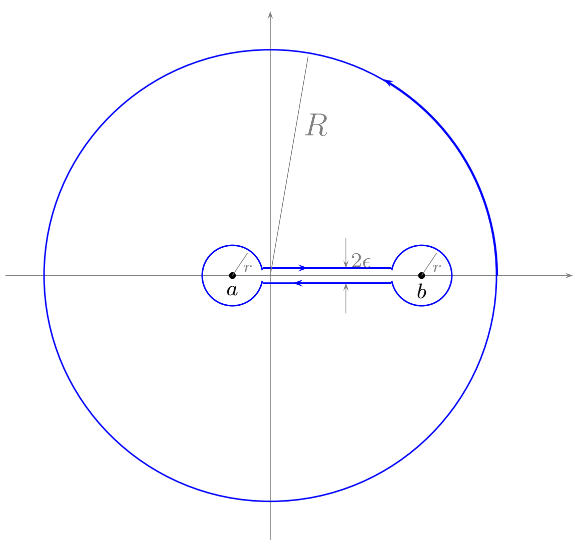
dla homografii

$$h(x) = \frac{x-a}{b-x}.$$

Wiadomo, że zastępowanie zmiennej rzeczywistej x zmienną zespoloną z w wyrażeniach zawierających pierwiastki wymaga namysłu, ponieważ wkraczamy zazwyczaj w funkcje wieloznaczne. Interpretacja napisu:

$$f(z) = (h(z))^p\,(b-x)^kQ(z)$$

nie jest więc na pierwszy rzut oka oczywista. Całkować będziemy po następującym konturze:



Zamiast zajmować się sytuacją ogólną rozwiążemy konkrety przykład: Obliczyć całkę

$$\int_1^2 (x+1)\sqrt[6]{\frac{x-1}{2-x}}\mathsf{d}x$$

Całkować będziemy funkcję $f(z) = (z+1)\sqrt[6]{\dfrac{z-1}{2-z}}$ ze stosownie zdefiniowanym pierwiastkiem. Oznaczmy $h(z) = \dfrac{z-1}{2-z}$. Jest to homografia, która zachowuje oś rzeczywistą, a wewnętrzną część konturu całkowania „kość” przekształca na kontur typu „dziurka od klucza”. Istotnie,

$$h(1)=0, \quad h(2)=\infty, \quad h([1,2[) = [0,\infty[$$

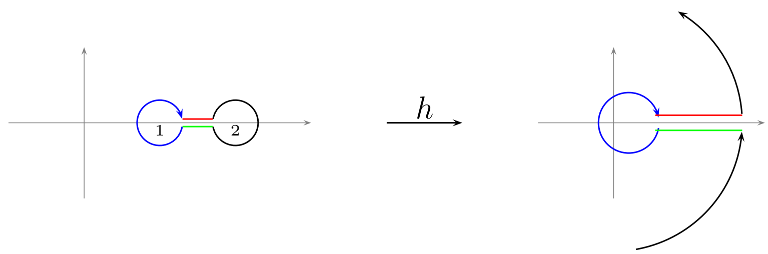
ponadto jeśli

$$C_r(a) = \{|z-a| = r\}$$

jest okręgiem o środku w a i promieniu r to dla $C_1(r)$ mamy

$$h(C_r(1)) = C_{\frac{r}{1-r^2}}\left(\frac{r}{1-r^2}\right).$$

Okrąg $C_r(2)$ o środku w $z=2$ i promieniu r przechodzi przy odwzorowaniu h na okrąg o środku w -1 i promieniu $\frac{1}{r}$. Ostatecznie na obrazku wygląda to tak:



Widzimy więc, że $h(\mathbb{C}\setminus[1,2]) = \mathbb{C}\setminus[1,\infty[$. Możemy więc ujednoznacznić funkcję $z \mapsto \sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}}$ pisząc

$$\sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}} = e^{\frac{1}{6}\log h(z)}$$

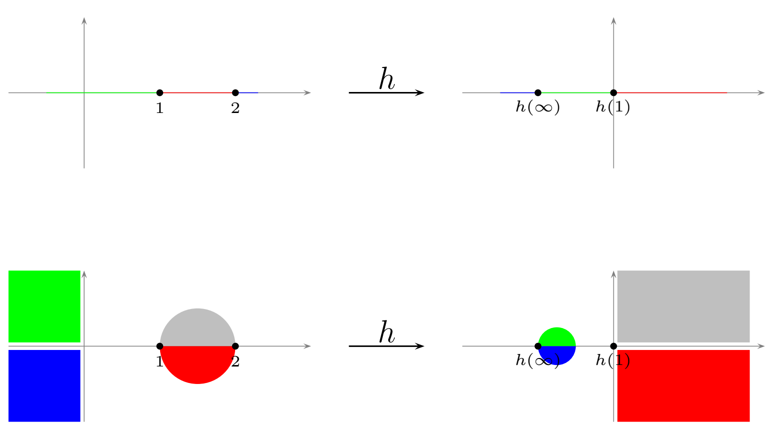
i wybierając jednoznaczną gałąź logarytmu $\mathbb{C}\setminus[0,\infty[$ gdzie $\log \rho e^{i\varphi} = \log\rho + i\varphi$ dla $\varphi \in]0,2\pi[$. Przy takiej definicji otrzymujemy dla funkcji $z \mapsto \sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}}$ wartości

$$0 \mapsto \sqrt[6]{h(0)} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = \tfrac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\pi/6}$$

$$3 \mapsto \sqrt[6]{h(3)} = (-2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}e^{i\pi/6}$$

$$i \mapsto \sqrt[6]{h(i)} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = \tfrac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[6]{5}}e^{i\pi/8}$$

Pomocny może być jeszcze jeden rysunek ilustrujący działanie h:



Zapiszmy teraz całki po poszczególnych fragmentach krzywej i oszacujmy ich wartość dla $r \longrightarrow 0$ i $\epsilon \longrightarrow 0$. Zacznijmy od całki po $C_r(1)$:

$$\left|\int_{C_r 1} f(z)\mathsf{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(1+re^{i\varphi})ire^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi\right| \leqslant \int_0^{2\pi}\left|f(1+re^{i\varphi})\right| r\mathsf{d}\varphi =$$
$$\int_0^{2\pi}\left|(1+(1+re^{i\varphi}))\sqrt[6]{h}(1+re^{i\varphi})\right| r\mathsf{d}\varphi \leqslant$$
$$2\pi(2+r)\sup_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[\frac{r^2}{1-r^2}+\frac{r}{1-r^2}e^{i\varphi}\right])\right| r =$$
$$2\pi(2+r)\sup_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[\frac{r}{1-r^2}(r+e^{i\varphi})\right])\right| r =$$
$$2\pi(2+r)\sup_{\varphi\in[0,2\pi]}\sqrt[6]{\frac{r}{1-r^2}}\left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[r+e^{i\varphi}\right])\right| r \leqslant$$
$$2\pi(2+r)\sqrt[6]{\frac{\color{red}{r}}{1-r^2}}\sqrt[6]{(r+1)}\color{red}{r} \longrightarrow 0$$

Bardzo podobny rachunek można zrobić dla $C_r(2)$

$$\left|\int_{C_r 2} f(z)\mathsf{d}z\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(2+re^{i\varphi})ire^{i\varphi}\mathsf{d}\varphi\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|f(2+re^{i\varphi})\right| r\mathsf{d}\varphi =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|(2+(1+re^{i\varphi}))\sqrt[6]{h}(2+re^{i\varphi})\right| r\mathsf{d}\varphi \leqslant 2\pi(3+r)\sup_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[-1+\frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right])\right| r =$$
$$2\pi(3+r)\sup_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\exp(\frac{1}{6}\log\left[\frac{1}{r}(-r+e^{-i\varphi})\right])\right| r =$$
$$2\pi(3+r)\color{red}{\frac{1}{\sqrt[6]{r}}}\sqrt[6]{(r+1)}\color{red}{r} \longrightarrow 0$$

Na czerwono zostały zaznaczone czynniki odpowiadające za znikanie całek. Widać więc skąd bierze się założenie dotyczące ułamkowych potęg $p, q > -1$. Ze względu na zamianę zmiennych funkcja podcałkowa mnoży się przez r. Aby całka po małym okręgu znikała ostateczna potęga promienia musi być dodatnia. Całka po „górnej części odcinka $[1,2]$" w granicy dąży do całki I, którą mamy policzyć, zaś całka po „dolnej części" do $-Ie^{2\pi i/6}$ ze względu na zmianę argumentu logarytmu. Ostatecznie całka po kości to

$$I(1-e^{2\pi i/6})$$

co można przekształcić nieco uzyskując

$$I(1-e^{2\pi i/6}) = Ie^{\pi i/6}(e^{-\pi i/6}-e^{\pi i/6}) = -Ie^{\pi i/6}2i\sin(\pi/6) = -iIe^{\pi i/6}.$$

We wnętrzu konturu całkowania nie ma osobliwości funkcji f zatem całka po całym (dwuczęściowym) konturze jest zero:

$$-iIe^{\pi i/6} + \int_{C_R(0)} f(z)\mathsf{d}z = 0$$

Mamy więc:

(2) $$I = \frac{1}{ie^{\pi i/6}}\int_{C_R(0)} f(z)\mathsf{d}z.$$

Całkę po dużym okręgu policzymy wykorzystując pojęcie residuum w ∞. Jeśli $C_R(0)$ jest zorientowany kanonicznie względem 0, to

$$\int_{C_R(0)} f(z)\mathsf{d}z = -2\pi i Res_\infty f = 2\pi i a_1, \tag{3}$$

gdzie a_1 jest współczynnikiem przy pierwszej potędze rozwinięcia funkcji $g(z) = f(\frac{1}{z})$ wokół zera. Funkcja $z \mapsto \sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}}$ jest holomorficzna w otoczeniu ∞, gdyż ∞ jest punktem regularnym homografii h. Zapiszmy rozwinięcie wokół zera funkcji $z \mapsto \sqrt[6]{h(\frac{1}{z})}$:

$$\sqrt[6]{h\left(\frac{1}{z}\right)} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$$

wówczas

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)\sqrt[6]{h\left(\frac{1}{z}\right)} = \left(1+\frac{1}{z}\right)(b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3\cdots) = b_0\frac{1}{z}+(b_0+b_1)+(b_1+b_2)z+(b_2+b_3)z^3+\cdots$$

Szukanym wyrazem a_1 jest więc $b_1 + b_2$. Funkcja $z \mapsto \sqrt[6]{h\left(\frac{1}{z}\right)}$ jest holomorficzna wokół zera i przyjmuje w zerze (zgodnie z przyjętymi konwencjami) wartość $e^{i\pi/6}$. Oznaczmy teraz

$$k(z) = h\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1-z}{2z-1}$$

wtedy

$$k(0) = -1 = e^{i\pi} \qquad k'(0) = \frac{-1}{(2z-1)^2} =_{|z=0} -1 \qquad k''(0) = \frac{4}{(2z-1)^3} =_{|z=0} -4$$

Rozwijamy teraz w szereg $\exp(\frac{1}{6}\log k(z))$ wokół zera. Mamy

$$b_1 = \left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\right]'_{|z=0}$$

$$b_2 = 2\left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\right]''_{|z=0}$$

Obliczamy pierwszą pochodną:

$$\left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\right]' = \exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{1}{6}\frac{k'(z)}{k(z)} =_{|z=0} \frac{1}{6}e^{i\pi/6}$$

i drugą

$$\left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\right]'' = \left[\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{1}{6}\frac{k'(z)}{k(z)}\right]' =$$

$$\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{1}{36}\left(\frac{k'(z)}{k(z)}\right)^2 + \exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{1}{6}\frac{k''(z)k(z)-k'(z)k'(z)}{k^2(z)} =$$

$$\frac{1}{6}\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{\frac{1}{6}k'(z)k'(z)+k''(z)k(z)-k'(z)k'(z)}{k^2(z)} =$$

$$\frac{1}{6}\exp\left(\frac{1}{6}\log k(z)\right)\frac{-\frac{5}{6}k'(z)k'(z)+k''(z)k(z)}{k^2(z)} =_{|z=0}$$

$$\frac{1}{6}e^{i\pi/6}\frac{-\frac{5}{6}+4}{1} = \frac{1}{36}e^{i\pi/6}(-5+24) = e^{i\pi/6}\frac{19}{36}.$$

Zatem
$$b_1 = \frac{1}{6}e^{i\pi/6}, \qquad b_2 = \frac{1}{2}e^{i\pi/6}\frac{19}{36} = e^{i\pi/6}\frac{19}{72}.$$
Otrzymane wyniki podstawiamy do (2) z wykorzystaniem (3):
$$I = \frac{1}{ie^{\pi i/6}}2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{i\pi/6} + e^{i\pi/6}\frac{19}{72}\right) = \pi\frac{31}{36}.$$