Wzory Hankela

1. $\boxed{\displaystyle\int_{[-\infty,0+,-\infty]} t^{z-1}e^t dt = 2i\Gamma(z)\sin\pi z, \qquad z\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}}$ (H.1) $\boxed{\displaystyle\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{[-\infty,0+,-\infty]} t^{-z}e^t dt, \qquad z\in\mathbf{C}}$ (H.2)
przy czym $\int_{[-\infty,0+,-\infty]} := \int_{L_r}$, gdzie L_r jest konturem złożonym z przebieganej *w te i wewte* półosi $[-\infty,-r[$ oraz okręgu $[-\pi,\pi]\ni\varphi\mapsto re^{i\varphi}$ przebieganego przeciwnie do wskazówek zegara; obie całki nie zależą od $r>0$. Gałąź potęgi t na $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$ określamy warunkiem $\arg t\in\,]-\pi,\pi[$; ponadto $\dfrac{1}{\Gamma(z)} := 0$ dla $z\in\{0,-1,-2,-3,\ldots\}$.

Obie strony (H.1) są funkcjami holomorficznymi z, można więc założyć, że $\operatorname{Re} z>0$. Otóż $\int_{L_r} t^{z-1}e^t dt = I_r^- + I_r^+ + I_{C_r}$, gdzie:

dla I_r^-: $\quad t=-x,\ x\in[r,\infty[,\ t^{z-1}=e^{-i\pi(z-1)}x^{z-1}$, więc $I_r^- = e^{-i\pi(z-1)}\int_\infty^r x^{z-1}e^{-x}(-dx) \xrightarrow{r\to 0} e^{-i\pi(z-1)}\Gamma(z)$;

dla I_r^+: $\quad t=-x,\ x\in[r,\infty[,\ t^{z-1}=e^{i\pi(z-1)}x^{z-1}$, więc $I_r^+ = e^{i\pi(z-1)}\int_r^\infty x^{z-1}e^{-x}(-dx) \xrightarrow{r\to 0} -e^{i\pi(z-1)}\Gamma(z)$;

dla I_{C_r}: $\quad t=re^{i\varphi},\ \varphi\in[-\pi,\pi],\ t^{z-1}dt = r^{z-1}e^{i\varphi(z-1)}ire^{i\varphi}d\varphi$, więc $I_{C_r} = \underbrace{ir^z}_{\to 0}\ \searrow \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi z + re^{i\varphi}}d\varphi}_{\to\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\varphi z}d\varphi = \frac{2}{z}\sin\varphi z} \xrightarrow{r\to 0} 0.$

Stąd $\int_{L_r} t^{z-1}e^t dt = \lim_{r\to 0}\int_{L_r}\ldots = -2i\Gamma(z)\sin\pi(z-1)$, co dowodzi (H.1). Ze wzoru tego z kolei łatwo już wynika wzór (H.2):
$$\int_{L_r} t^{-z}e^t dt = 2i\Gamma(1-z)\sin\pi(1-z) = 2i\Gamma(1-z)\sin\pi z = \frac{2\pi i}{\Gamma(z)}.$$

2. Gdy $z\in\mathbf{Z}$, wtedy funkcje podcałkowe wzorów Hankela są holomorficzne nie tylko na $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$, ale i na $\mathbf{C}^*$, więc całki po L_r są równe całkom po okręgu C_r (znoszą się wkłady od całek po pólprostej). Co więcej, całki te łatwo obliczyć z twierdzenia o residuach: $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} t^{-n-1}e^t dt = \operatorname*{res}_{t=0}\left[t^{-n-1}\Big(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots\Big)\right] = \begin{cases}\frac{1}{n!}, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$.

Separacja zmiennych w równaniu $\Delta u = -c^2u$ we współrzędnych walcowych

3. $\Delta u = u''_{\varrho\varrho} + \dfrac{1}{\varrho}u'_\varrho + \dfrac{1}{\varrho^2}u''_{\varphi\varphi} + u''_{zz}$ we współrzędnych walcowych $(\varrho,\varphi,z=x_3)$; jeśli do równania $\Delta u = -c^2u$ podstawimy $u(\varrho,\varphi,z) = R(\varrho)F(\varphi)Z(z)$ («rozdzielenie zmiennych»), to dostaniemy
$$0 = \frac{\Delta u + c^2u}{u} = \left\{\frac{1}{R}\Big(R'' + \frac{1}{\varrho}R' + c^2R\Big) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{F''}{F}\right\} + \frac{Z''}{Z} =: S_1(\varrho,\varphi) + S_2(z).$$
Zatem $S_1(\varrho,\varphi) = -\mu$, $S_2(z)=\mu$ dla pewnej stałej $\mu\in\mathbf{C}$. To z kolei daje $0 = \dfrac{\varrho^2}{R}\Big[R'' + \dfrac{1}{\varrho}R' + (c^2+\mu)R\Big] + \dfrac{F''}{F}$, więc $\dfrac{\varrho^2}{R}\Big[\ldots\Big] = m^2$, $\dfrac{F''}{F} = -m^2$ dla pewnego $m\in\mathbf{Z}$. Tak więc (gdy $c^2+\mu\neq 0$) spełnione jest równanie Bessela $\boxed{\varrho^2R'' + \varrho R' + \big((c^2+\mu)\varrho^2 - m^2\big)R = 0}$. Rozwiązaniami są np. $R(\varrho) = C\,J_{\pm m}\big(\varrho\sqrt{c^2+\mu}\big)$. Zatem $\boxed{u = C\,J_{\pm m}\big(\varrho\sqrt{c^2+\mu}\big)e^{\pm im\varphi\pm z\sqrt{\mu}}}$. Z kolei dla $c^2+\mu=0$ (r. jednorodne): $R = \begin{cases} C_1\varrho^m + C_2\varrho^{-m} & \text{gdy } m\in\mathbf{Z}^*\\ C_1 + C_2\log\varrho & \text{gdy } m=0\end{cases}$.

Separacja zmiennych w równaniu $\Delta u = -c^2u$ we współrzędnych sferycznych

4. $\Delta u = u''_{rr} + \frac{2}{r}u'_r + \frac{1}{r^2}\big(u''_{\theta\theta} + u'_\theta\operatorname{ctg}\theta\big) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}u''_{\varphi\varphi}$ we współrzędnych sferycznych $\big(r=\|\boldsymbol{x}\|, \theta = \arccos\frac{x_3}{r}, \varphi\big)$. Jeśli więc do równania $\Delta u = -c^2u$, $c\in\mathbf{C}$, podstawimy $u(r,\theta,\varphi) = R(r)T(\theta)F(\varphi)$ ("rozdzielenie zmiennych"), to otrzymamy
$$0 = \frac{r^2}{u}(\Delta u + c^2u) = \left\{\frac{r^2R'' + 2rR'}{R} + c^2r^2\right\} + \left\{\frac{T'' + T'\operatorname{ctg}\theta}{T} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{F''}{F}\right\} =: S_1(r) + S_2(\theta,\varphi).$$
Zatem $S_1(r) = -S_2(\theta,\varphi) = \mu\in\mathbf{C}$ jest stałą; mamy więc $\boxed{r^2R'' + 2rR' + (c^2r^2-\mu)R = 0}$ (1) oraz
$$\delta\left(\tfrac{T''+T'\operatorname{ctg}\theta}{T} + \mu\right)\sin^2\theta = -\tfrac{F''}{F} = m^2,\ m\in\mathbf{Z}, \qquad \text{czyli} \qquad \boxed{T'' + T'\operatorname{ctg}\theta + \Big(\mu - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Big)T = 0.} \ (2)$$
Jeśli podstawimy $r=e^t$, to $R'_r = r^{-1}R'_t$, $R''_{rr} = r^{-2}(R''_{tt} - R'_t)$, więc (1) daje $R''_{tt} + R'_t + (c^2e^{2t}-\mu)R = 0$; zatem dla $c=0$ rozwiązaniem ogólnym (1) jest $R = C_1r^{k_1} + C_2r^{k_2}$, gdzie k_1,k_2 są pierwiastkami równania $k^2+k=\mu$. Natomiast dla $c\neq 0$ równanie (1) sprowadza się do równania Bessela po podstawieniu $R(r) = r^{-\frac12}\tilde{R}(r)$; wtedy $\begin{cases} R' = r^{-\frac12}\tilde{R}' - \frac12 r^{-\frac32}\tilde{R}\\ R'' = r^{-\frac12}\tilde{R}'' - r^{-\frac32}\tilde{R}' + \frac34 r^{-\frac52}\tilde{R}\end{cases}$ więc dostajemy $\boxed{r^2\tilde{R}'' + r\tilde{R}' + (c^2-\mu-\frac14)\tilde{R} = 0}$ (1'). Z kolei równanie (2) po podstawieniu $t=\cos\theta$, $\begin{cases} T'_\theta = -T'_t\sin\theta\\ T''_{\theta\theta} = T''_{tt}\sin^2\theta - T'_t\cos\theta\end{cases}$ sprowadza się do *(uogólnionego) równania Legendre'a* $\boxed{(1-t^2)T''_{tt} - 2tT'_t + \Big(\mu - \dfrac{m^2}{1-t^2}\Big) = 0}$ (2'). Ma ono osobliwości w punktach $t=\pm 1$, więc funkcja $\boldsymbol{x}\mapsto T\left(\dfrac{x_3}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)$ może mieć osobliwości na osi $0x_3$. Okazuje się, że rozwiązania bez osobliwości istnieją tylko dla $\mu = l(l+1)$, gdzie $l\in\mathbf{Z}_+$; rozwiązaniem ogólnym jest wtedy $T = c_1P_l^m(t) + c_2Q_l^m(t) = \sin^m\theta\big(c_1P_l^{(m)}(\cos\theta) + c_2Q_l^{(m)}(\cos\theta)\big)$, gdzie $P_l(t) = \dfrac{1}{2^l l!}\dfrac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l$ (*wielomiany Legendre'a*), $P_l^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^m}{dt^m}P_l(t)$ (*stowarzyszone funkcje Legendre'a*

1. rodzaju), natomiast $Q_l(t)$ i $Q_l^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} Q_l(t)$ (*funkcje Legendre'a 2. rodzaju*, wyrażają się przez funkcje wymierne i logarytm) mają osobliwości logarytmiczne dla $t = \pm 1$, więc dla gładkości T muszą być odrzucone. Równanie Bessela (1') ma teraz postać $\boxed{r^2 \tilde{R}'' + r\tilde{R}' + \left(c^2 - (l+\frac{1}{2})^2\right)\tilde{R} = 0}$ (1") więc rozwiązaniami są np. $R(r) = Cr^{-\frac{1}{2}}\tilde{R}(r) = Cr^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(cr)$, $\boxed{u = Cr^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(cr) \sin^m\theta \; P_l^{(m)}(\cos\theta) \; \cos m(\varphi - \varphi_0)}$. [Wh.81,98]

Funkcje Bessela $J_n(z)$ dla $n \in \mathbf{Z}$.

5. Niech $J_n(z)$ ($z \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{Z}$) będą współczynnikami szeregu Laurenta funkcji $t \mapsto e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$ w pierścieniu $0 < |t| < \infty$:

$$\boxed{\exp\left(\tfrac{z}{2}\left(t - \tfrac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n, \qquad z \in \mathbf{C},\ t \in \mathbf{C}^*} \;(1).$$

6. (a) $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$, (b) $J_n(-z) = J_{-n}(z)$, (c) $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$,
(d) $J_n(z_1 + z_2) = \sum\limits_{n_1+n_2=n} J_{n_1}(z_1) J_{n_2}(z_2)$, (e) $J_n(z) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{z+2r}$ dla $n \in \mathbf{Z}_+,\ z \in \mathbf{C}$.

Niech $F(z,t) := \exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)$; (a) wynika z tożsamości $F(-z,t) = F(z,-t)$, (b) — z $F(-z,t) = F(z,t^{-1}$, zaś (c) — z (a) i (b). Stosując iloczyn Cauchy'ego szeregów $F(z_1,t) = \sum J_{n_1}(z_1)t^{n_1}$, $F(z_2,t) = \sum J_{n_2}(z_2)t^{n_2}$ i tożsamość $F(z_1,t)F(z_2,t) = F(z_1+z_2,t)$ dostajemy (d). Dowód (e): Iloczyn Cauchy'ego szeregów $\exp\left(\frac{zt}{2}\right) = \sum_{q\geqslant 0} \frac{t^q}{q!}\left(\frac{z}{2}\right)^q$, $\exp\left(\frac{-zt^{-1}}{2}\right) = \sum_{r\geqslant 0} \frac{(-1)^r t^{-r}}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^r$ ma przy t^n (dla $n \in \mathbf{Z}_+$) współczynnik $J_n(z) = \sum\limits_{q-r=n,\ q,r\geqslant 0} \frac{(-1)^r}{r!q!}\left(\frac{z}{2}\right)^{q+r}$, skąd teza.

- **Ćwiczenie**. $\boxed{1 = \left(J_0(z)\right)^2 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(J_n(z)\right)^2}$. <u>Dowód</u>. $1 = J_0(0) = J_0\left(z + (-z)\right) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) J_{-n}(-z) = \ldots$.

7. Funkcja $J_n(z)$ spełnia równanie Bessela: $\boxed{z^2 J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2 - n^2)J_n(z) = 0}$.

$z\frac{\partial}{\partial z}F = z\frac{t-t^{-1}}{2}F$, $z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}F = z^2\left(\frac{t-t^{-1}}{2}\right)^2 F$, $t\frac{\partial}{\partial t}F = z\frac{t+t^{-1}}{2}F$, $\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 F = z^2\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right)^2 F + z\frac{t-t^{-1}}{2}F$, więc funkcja $F = \exp\left(\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)$ spełnia tożsamość $\left[z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z\frac{\partial}{\partial z} + z^2 - \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right] F = 0$. Stąd teza, gdyż $\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \sum_n a_n t^n = \sum_n n^k a_n t^n$.

8. Stosując wzór całkowy na współczynniki szeregu Laurenta mamy $\boxed{J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C u^{-n-1}\exp\left(\frac{z}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)du}$; stąd, po podstawieniu $u = \frac{2t}{z}$, otrzymujemy $\boxed{J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n \oint_C t^{-n-1}\exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right)dt, \quad z \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{Z}}$. Stąd $J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum\limits_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}\oint_C t^{-n-r-1}e^t dt$ (gdyż $\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) = \sum\limits_r \frac{(-1)^r t^{-r}}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$ i zbieżność na C jest jednostajna), więc wobec $\operatorname*{res}_{t=0}\left(t^{-n-r-1}e^t\right) = \begin{cases} \frac{1}{(n+r)!}, & n+r \geqslant 0 \\ 0, & n+r < 0 \end{cases}$ dostaliśmy inny dowód powyższego wzoru (e).

9. (a) $\boxed{J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\varphi - n\varphi)}d\varphi}$ (b) $\boxed{J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z\sin\varphi - n\varphi)d\varphi}$
(c) $\boxed{J_n(z) = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\cos\varphi + n\varphi)}d\varphi}$ (d) $\boxed{J_n(z) = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi}$ dla $z \in \mathbf{C},\ n \in \mathbf{Z}$.

Parametryzacja $t = \frac{z}{2}e^{i\varphi}$ konturu C w całce 8. daje $t - \frac{z^2}{4t} = z\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = iz\sin\varphi$, $t^{-n-1}dt = i\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}e^{-in\varphi}d\varphi$, skąd mamy (a). Wzór (b) wynika z (a) i nieparzystości $\varphi \mapsto \sin(z\sin\varphi - n\varphi)$. Podstawienie $\varphi \leftarrow \frac{\pi}{2} - \varphi$ w (a) daje wzór (c) (okresowość pozwala zastąpić $[-\pi,\pi]$ innym przedziałem długości 2π). Wstawiając $e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ w (c) i opuszczając nieparzysty składnik dostajemy (d).

10. **Ćwiczenie**. Pokazać, że dla $n \in \mathbf{Z}$ funkcja Bessela $J_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ przyjmuje wartości tylko z przedziału $[-1,1]$.

11. **Ćwiczenie**. Pokazać, że całka $\int_{-1}^{1} t^n e^{itz}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ da się wyrazić przez funkcje Bessela $J_0(z), J_1(z), \ldots, J_n(z)$.

$J_m(z) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\varphi}\cos m\varphi\, d\varphi = \left| t = \cos\varphi \right| = J_m(z) = \frac{(-i)^m}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{izt}T_m(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, gdzie $T_m(t)$ są wielomianami Czebyszewa. Otóż $\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)^n = 2^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^{2k-n} + z^{n-2k}}{2} = 2^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_{2k-n}\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)$, co daje tożsamość $t^n = 2^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_{2k-n}(t)$.

Funkcje Bessela dla dowolnego $n \in \mathbf{C}$

12. Dla $n \in \mathbf{C}$ określmy $\boxed{J_n(z) := \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{[-\infty,0+,-\infty]} t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt}$, gdzie dla określenia gałęzi t^{-n-1} na $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$ przyjmujemy, że $\arg t \in]-\pi,\pi[$; tak więc na konturze $\arg t$ rośnie od $-\pi$ do $+\pi$. Wtedy $z^{-n}J_n(z)$ jest jednoznaczną funkcją holomorficzną, zaś $w = J_n(z)$ jest rozwiązaniem równania Bessela 7. Istotnie, proste rachunki pokazują, że $\Phi(z,t) := z^n t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)$ spełnia równanie $\left[z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+z\frac{\partial}{\partial z}+(z^2-n^2)-z^2\frac{\partial}{\partial t}\right]\Phi(z,t)=0$; scałkujmy tę równość po konturze L_r, zauważając, że $\int_{L_r}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(z,t)dt = \Big(\text{przyrost } \Phi(z,t) \text{ na } L_r\Big) = 0$ oraz że wykładnicze zbieganie do zera $\frac{\partial^k}{\partial z^k}\Phi(z,t)$ przy $t\to-\infty$ pozwala różniczkować względem z pod całką. [Wh.143]

13. $$\boxed{J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}, \qquad z\in\mathbf{C}^*,\ n\in\mathbf{C}},$$ (por. 6.(e))

przy czym dla $n\in\{-1,-2,\ldots\}$ składniki o indeksach $r<-n$ znikają: $\dfrac{1}{\Gamma(n+r+1)}=0.$ [Wh.144]

$t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right) = t^{-n-1}e^t\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{2r}}{r!\,(4t)^r} = \sum_{r=0}^{\infty}t^{-n-r-1}e^t\frac{(-1)^r}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$, więc całkując to po konturze $[-\infty,0^+,-\infty]$ i korzystając z drugiego wzoru Hankela dostajemy tezę.

Wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela

14. Funkcje Bessela $J_n(z)$ spełniają następujące wzory rekurencyjne ($n\in\mathbf{C}$, $z\in\mathbf{C}^*$):

$$\boxed{J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_n(z)}\ \text{(A)}, \qquad \boxed{J_{n+1}(z)=\frac{n}{z}J_n(z)-J_n'(z)}\ \text{(B)}.$$

1. sposób (stosowny tylko dla $n\in\mathbf{Z}$): Korzystając z funkcji tworzącej $F(z,t)=\exp\Big(\frac{z}{2}(t-t^{-1})\Big)=\sum_n J_n(z)t^n$ mamy:

$$\sum_n\left(J_{n-1}+J_{n+1}-\frac{2n}{z}J_n\right)t^n=\left[t+\frac{1}{t}-\frac{2t}{z}\frac{\partial}{\partial t}\right]F=0, \qquad \sum_n\left(J_{n+1}-\frac{n}{z}J_n+J_n'\right)t^n=\left[\frac{1}{t}-\frac{t}{z}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right]F=0.$$

2. sposób. Funkcje podcałkowe $\Phi(z,t)=z^nt^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)$ definicji 12. spełniają $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_n=\left[-nt^{-n-1}+t^{-n}+\frac{1}{4}z^2t^{-n-2}\right]\exp =$
$= -n\Phi_n+z\Phi_{n-1}+\frac{z}{4}\Phi_{n+1}$ (zaś $\int_{L_r}\frac{\partial}{\partial t}...dt=0$), $\quad\left(\frac{n}{z}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_n=\left(nz^{n-1}t^{-n-1}-nz^{n-1}t^{-n-1}+z^nt^{-n-1}\frac{z}{2t}\right)\exp=\frac{1}{2}\Phi_{n+1}.$

3. sposób. Korzystamy z rozwinięcia w szereg: $\frac{z}{2}(J_{n-1}+J_{n+1})=\sum_{r\geqslant0}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}+\sum_{s\geqslant0}\frac{(-1)^s}{s!\Gamma(n+s+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2+2s}=$
$\sum_{r\geqslant0}\frac{(-1)^r}{r!}\left[\frac{1}{\Gamma(n+r)}-\frac{r}{\Gamma(n+r+1)}\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}=\sum_{r\geqslant0}\frac{n(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}=nJ_n(z)$, bo $\Big[...\Big]=\frac{(n+r)-r}{\Gamma(n+r+1)}=\frac{n}{\Gamma(n+r+1)}$.
$\frac{n}{z}J_n-J_n'=\sum_{r\geqslant0}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)}\left[\frac{n}{z}-(n+2r)\frac{1}{z}\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r}=\sum_{r\geqslant1}\frac{(-1)^r r}{r!\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r-1}=\sum_{s\geqslant0}\frac{(-1)^s}{s!\Gamma(n+s+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s+1}=J_{n+1}.$

15. **Wnioski**. $\frac{1}{2}$(A)-(B) oraz (A)-(B) dają $\boxed{J_n'(z)=\frac{1}{2}\big(J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)\big)}$ (C), $\boxed{J_{n-1}(z)=\frac{n}{z}J_n(z)+J_n'(z)}$ (D).

Oznaczmy $\boxed{\hat{J}_n(z):=z^{-n}J_n(z)}$, wtedy z (B) przez indukcję wynika $\boxed{\hat{J}_{n+r}(z)=\left(-\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^r\hat{J}_n(z)}$; tak samo z (D) dla $\boxed{\check{J}_n(z):=z^nJ_n(z)}$ dostajemy $\boxed{\check{J}_{n-r}(z)=\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^r\check{J}_n(z)}$; są to wzory wyrażające $J_{n\pm1}$, $J_{n\pm2},\ldots$ przez J_n.

16. **Ćwiczenie**. Spełnione są równania $\boxed{z\hat{J}''(z)+(1+2n)\hat{J}'(z)+z\hat{J}(z)=0,\quad z\check{J}''(z)+(1-2n)\check{J}'(z)+z\check{J}(z)=0}$.

* Niech $n\in\mathbf{Z}_+$. Wykazać, że pomiędzy każdymi dwoma zerami funkcji $J_n:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ leży dokładnie jedno zero funkcji J_{n+1}, oraz że funkcje J_n i J_{n+1} nie mają wspólnych zer.

Z tw. Rolle'a wiemy, że między kolejnymi zerami funkcji $\hat{J}_n(x)=x^{-n}J_n(x)$ leży zero $\frac{d}{dx}\hat{J}_n(x)=-x\hat{J}_{n+1}(x)$, a więc zero $J_{n+1}(x)$.
Tak samo między kolejnymi zerami funkcji $\check{J}_{n+1}(x)=x^{n+1}J_{n+1}(x)$ leży zero $\frac{d}{dx}\check{J}_{n+1}(x)=x\check{J}_n(x)$, a więc zero $J_n(x)$.

Gdyby x_0 było wspólnym zerem J_n i J_{n+1}, wtedy $\hat{J}_n(x_0)=\hat{J}_n'(x_0)=0$; otóż $\hat{J}_n$ spełnia równanie $xy''+(1+2n)y'+xy=0$, z którego widać, że warunek $y(x_0)=y'(x_0)=0$ implikuje $\forall k\geqslant0: y^{(k)}(x_0)=0$, tzn. $y(x)\equiv0$. Sprzeczność.

* Wyprowadzić wzory: $\quad J_1(z)=-J_0'(z), \qquad J_2(z)=J_0''(z)-\frac{1}{z}J_0'(z)=2J_0''(z)+J_0(z)=-J_0(z)-\frac{2}{z}J_0'(z),$
$$J_3(z)=-\frac{4}{z}J_0(z)+\left(1-\frac{8}{z^2}\right)J_0'(z)=\left(1-\frac{4}{z^2}\right)J_0'(z)+\frac{4}{z}J_0''(z)=\frac{4-z^2}{z}J_0(z)+\frac{8-z^2}{z}J_0''(z).$$

17. $$\boxed{J_n(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos zt\,dt, \qquad z\in\mathbf{C}^*,\ n\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right)>0}.$$ [Wh.152]

Na $[-1,1]$ szereg Taylora dla $t \mapsto \cos zt$ jest zbieżny jednostajnie, zaś funkcja $|(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}| = (1-t^2)^{\mathrm{Re}(z-\frac{1}{2})}$ jest całkowalna, więc $I_n(z) := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos tz\, dt = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{(2r)!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} t^{2r} dt$; zarazem $\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} t^{2r} dt = \int_{0}^{1} (1-u)^{n-\frac{1}{2}} u^{r-\frac{1}{2}} du =$ $= B\left(r+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+r+1)}$ oraz $\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right) = \left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2r)!}{2^{2r}\,r!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Stąd, dzięki 13., mamy

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos tz\, dt = I_n(z) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) J_n(z).$$

18. Niech $\bigcirc\!\!\bigcirc$ będzie konturem obiegającym -1 zgodnie, a $+1$ — przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wtedy

$$\boxed{J_n(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{2\pi i \Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{\bigcirc\!\!\bigcirc} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \cos zt\, dt, \qquad n \in \mathbf{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right\},\ z \in \mathbf{C}^*},$$

jeśli gałąź potęgi określimy warunkiem $\arg(t^2-1) = 0$ dla $t \in\,]1,\infty[$. Zauważmy, że wyrażenie podcałkowe po obiegnięciu konturu $\bigcirc\!\!\bigcirc$ wraca do początkowej wartości, gdyż $(t-1)^{n-\frac{1}{2}}$ będzie pomnożone przez $e^{(2n-1)\pi i}$, zaś $(t+1)^{n-\frac{1}{2}}$ — przez $e^{-(2n-1)\pi i}$; zatem ciągła deformacja konturu $\bigcirc\!\!\bigcirc$ nie zmienia wartości całki. [Wh.152]

Analityczność obu stron względem n pozwala założyć dodatkowo, że $\mathrm{Re}(n+\frac{1}{2}) > 0$, by skorzystać z 17. Deformując $\bigcirc\!\!\bigcirc$ do konturu złożonego z przebieganego *w te i wewte* odcinka $[-1+r, 1-r]$ i okręgów $C(\pm 1, r)$ oraz przechodząc do granicy $r \searrow 0$ dostajemy

$$\int_{\bigcirc\!\!\bigcirc} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \cos zt\, dt = e^{(n-\frac{1}{2})\pi i} \int_{1}^{-1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos zt\, dt + e^{-(n-\frac{1}{2})\pi i} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos zt\, dt = -2i \sin\!\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\, I_n(z) =$$

$$= 2i\, I_n(z)\, \sin\!\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = 2i \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \underbrace{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \sin\!\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}_{=\frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}} J_n(z) = \frac{2\pi i \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} J_n(z). \qquad \square$$

Połówkowe funkcje Bessela

- Ze wzoru 17. widać, że $J_n(z)$ dla $n \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right\}$ wyraża się przez funkcje elementarne. Całkowanie daje:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \qquad J_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z^3}} (\sin z - z \cos z), \qquad J_{\frac{5}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z^5}} \big((3-z^2)\sin z - 3z\cos z\big),$$
$$J_{\frac{7}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z^7}} \big(3(5-2z^2)\sin z + z(z^2-15)\cos z\big), \quad J_{\frac{9}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z^9}} \big((z^4-45z^2+105)\sin z + 5z(2z^2-21)\cos z\big).$$

Do obliczenia $J_{\pm\frac{1}{2}}(z)$ można się też posłużyć wzorem 13.: skoro, jak widzieliśmy, $\Gamma\!\left(r+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2r)!}{2^{2r} r!}\sqrt{\pi}$, to $\Gamma\!\left(r+\frac{3}{2}\right) = \left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\!\left(r+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2r+1)!}{2^{2r+1} r!}\sqrt{\pi}$, więc

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^{2r} r!}{r!(2r)!\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2r} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r)!} z^{2r} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z,$$
$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^{2r+1} r!}{r!(2r+1)!\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2r} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} z^{2r+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z.$$

Na funkcje Bessela

- Jeśli $n \in \mathbf{C}$ jest ustalone, to każde dwie gałęzie potęgi z^n (np. na $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$) mają stały iloraz, więc jeśli pokrywają się w jakimś punkcie, to są równe. Istotnie, każda gałąź z^n jest postaci $|z|^n e^{in(2k\pi + \arg_0 z)}$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$.

- **Ćwiczenie**. Niech $\bigcirc\!\!\bigcirc$ będzie 'ósemką' obiegającą -1 zgodnie, a $+1$ — przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wykazać, że
$$\oint_{\bigcirc\!\!\bigcirc} (z^2-1)^n z^{2m} dz = 2i \sin(n+1)\pi \cdot B(n+1, m+\tfrac{1}{2}) \text{ dla } m \in \mathbf{Z}_+,\ n \in \mathbf{C},$$
jeśli wybór gałęzi potęgi na $\bigcirc\!\!\bigcirc$ jest określony warunkiem $(z^2-1)^n \in \,]0,+\infty[$ dla $z \in \,]1,+\infty[$.

Skoro po obiegnięciu $\bigcirc\!\!\bigcirc$ czynnik $(z-1)^n$ zostanie pomnożony przez $e^{i2\pi n}$, zaś $(z+1)^n$ — przez $e^{-i2\pi n}$, to droga $\bigcirc\!\!\bigcirc$ podnosi się do pętli na powierzchni Riemanna funkcji $(z^2-1)^n z^{2m}$; wobec tego wartość całki nie zmienia się przy ciągłych deformacjach drogi $\bigcirc\!\!\bigcirc$. Zastąpmy więc $\bigcirc\!\!\bigcirc$ drogą, złożoną z $C(-1;r)$ (obieganym zgodnie), $C(+1;r)$ (obieganym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) oraz w te i wewte przebieganego odcinka $[-1+r, 1-r]$. Przy $r \searrow 0$ daje to $\mathcal{J} = \left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right) \int_{-1}^{1} (1-z^2)^n z^{2m} dz$, zaś $\int_{-1}^{1} \ldots dz = 2\int_0^1 \ldots dz = \left\| \begin{smallmatrix} z^2 = x \\ dz = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\, dx \end{smallmatrix} \right| = \int_0^1 (1-x)^n x^{m-\frac{1}{2}} dx = B\left(n+1, m+\frac{1}{2}\right)$. Stąd teza.

- **Ćwiczenie**. Obliczyć sumy szeregów: $f_1(z) := \frac{1}{2} J_0(z) + \sum_{r=1}^{\infty} J_{2r}(z) \cos 2r\varphi$; $f_2(z) := \sum_{r=1}^{\infty} J_{2r-1} \sin(2r-1)\varphi$.

$$f_1(z) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \cos n\varphi = \frac{1}{2} \cos[z \sin\varphi]; \qquad f_2(z) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \sin n\varphi = \frac{1}{2} \sin[z \sin\varphi].$$

- **Ćwiczenie**. Dowieść, że $J_0(iy) \in \mathbf{R}$ dla $y \in \mathbf{R}$ i jest to rosnąca funkcja y^2; w szczególności $J_0(iy) \geqslant 1 = J_0(0)$.

<u>1. sposób</u>. Wzór $J_0(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r}$ daje $J_0(iy) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{y}{2}\right)^{2r}$. <u>2. sposób</u>. Wzór $J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin\theta} d\theta$ daje $J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-y \sin\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ch}(y \sin\theta) d\theta$. <u>3. sposób</u>. Wzór $J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos zt\, dt}{\sqrt{1-t^2}}$ daje $J_0(iy) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} yt\, dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

- **Ćwiczenie**. Dowieść, że $\boxed{J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x) J_n(y) = J_0\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \text{ dla } x, y \in \mathbf{C}}$, licząc dwoma sposobami współczynnik przy t^0 szeregu Laurenta $F(t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_n(y) t^m \left(it^{-1}\right)^n$.

$F(t)$ ma przy t^0 współczynnik $\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_m(y) i^m = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (gdyż $S_{-m} = (-1)^m S_m$). Z drugiej strony $F(t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{y}{2}\left(\frac{i}{t} + it\right)\right] = \left\| \begin{smallmatrix} z := x+iy \\ \\ \hat{z} := x-iy \end{smallmatrix} \right\| = \exp\left[\frac{1}{2}\left(zt - \frac{\hat{z}}{t}\right)\right] = \left\| \begin{smallmatrix} u := \sqrt{z\hat{z}} = \\ \\ = \sqrt{x^2+y^2} \end{smallmatrix} \right\| = \exp\left[\frac{u}{2}\left(\frac{zt}{u} - \frac{u}{zt}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u) \left(\frac{zt}{u}\right)^n$, więc współczynnikiem $F(t)$ przy t^0 jest $J_0(u)$. <u>Nieco inny sposób</u>: $F(t) = \exp\left[\frac{1}{2}(zt - \hat{z}t^{-1})\right] = \sum_{q \geqslant 0} \frac{1}{q!} \left(\frac{zt}{2}\right)^q \sum_{r \geqslant 0} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{\hat{z}}{2t}\right)^r = \sum_n t^n \sum_{q-r=n} \frac{(-1)^r}{q!r!} \left(\frac{z}{2}\right)^q \left(\frac{\hat{z}}{2}\right)^r$ ma przy t^0 współczynnik $\sum_{r \geqslant 0} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \left(\frac{z\hat{z}}{4}\right)^r = J_0\left(\sqrt{z\hat{z}}\right)$.

- **Ćwiczenie**. Jeśli $n \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} n > -\frac{1}{2}$, $a > 0$ oraz $|b| < a$, to $\boxed{\int_0^{\infty} e^{-az} z^n J_n(bz) dz = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(2b)^n}{\sqrt{\pi}(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}}}$.

$I_n(a,b) := \int_0^{\infty} e^{-az} z^n J_n(bz) dz = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{n+2r} \int_0^{\infty} z^{2n+2r} e^{-az} dz$, zaś tożsamości $\int_0^{\infty} z^{p-1} e^{-az} dz = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$, $\Gamma(2p+1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2p} \Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma(p+1)$ dają $\int_0^{\infty} z^{2n+2r} e^{-az} dz = \frac{\Gamma(2n+2r+1)}{a^{2n+2r+1}} = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a}\right)^{2n+2r} \Gamma\left(n+r+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+r+1)$, $I_n(a,b) = \frac{(2b)^n}{a^{2n+1}\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Gamma\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}{r!} \left(\frac{b}{a}\right)^{2r}$; $\frac{(-1)^r \Gamma\left(n+r+\frac{1}{2}\right)}{r!} = \frac{(-1)^r \left(n+r-\frac{1}{2}\right)\left(n+r-\frac{3}{2}\right) \ldots \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r} = \binom{-n-\frac{1}{2}}{r} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$, więc $I_n(a,b) = \frac{(2b)^n}{a^{2n+1}\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(2b)^n}{\sqrt{\pi}(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. Zbieżność $\int_0^1$: $z^n J_n(z) \cong C z^{2n}$.

- **Ćwiczenie**. Jeśli $n \in \mathbf{Z}_+$ oraz $a > 0$ to $\boxed{F_n(a) := \int_0^{\infty} e^{-az} J_n(z) dz = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}(a+\sqrt{a^2+1})^n}}$.

Skoro $J_n(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\varphi - n\varphi)}d\varphi$, to $F_n(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{i(z\sin\varphi-n\varphi)-az}dz = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{e^{-in\varphi}d\varphi}{a-i\sin\varphi}$; standardowe podstawienie $z = e^{i\varphi}$ daje tu $F_n(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\dfrac{2z^{-n}dz}{-z^2+2az+1} = \left\| {z_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2+1} \atop z_1 z_2=-1} \right\| = \operatorname*{res}_{a-\sqrt{a^2+1}} + \operatorname*{res}_0 = -\operatorname*{res}_{a+\sqrt{a^2+1}}\dfrac{2z^{-n}}{-z^2+2az+1} = -\dfrac{2(a+\sqrt{a^2+1})^{-n}}{-2a-2\sqrt{a^2+1}+2a} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}(a+\sqrt{a^2+1})^n}$. **Uwaga.** $n\in\mathbf{Z}_- \Rightarrow F_n(a) = (-1)^n F_{-n}(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}(a-\sqrt{a^2+1})^n}$.

- **Ćwiczenie**. Dowieść, że dla $-\frac{1}{2}\leqslant n\leqslant\frac{1}{2}$ funkcja $J_n(z)$ ma nieskończenie wiele zer na osi rzeczywistej. [Wh.17.3]

Dla $n > -\frac{1}{2}$ mamy $J_n(z) = \dfrac{2(z/2)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot K_n(z)$, gdzie $K_n(z) := \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos(zt)dt$. Stąd dla $m\in\mathbf{N}$ dostajemy:

$$K_n\Big((2m+1)\tfrac{\pi}{2}\Big) = \int_0^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos\left[(2m+1)\frac{\pi t}{2}\right]dt = \frac{1}{2}A_0 - A_1 + A_2 - \ldots + (-1)^m A_m,$$

$$\text{gdzie}\quad A_r := (-1)^r\int_{\frac{2r-1}{2m+1}}^{\frac{2r+1}{2m+1}} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos\left[(2m+1)\frac{\pi t}{2}\right]dt = \int_0^{\frac{2}{2m+1}}\left[1-\left(u+\frac{2r-1}{2m+1}\right)^2\right]^{n-\frac{1}{2}}\sin\left[(2m+1)\frac{\pi u}{2}\right]du.$$

(podstawienie $t = u + \dfrac{2r-1}{2m+1}$). Zauważmy, że $\left|u-\frac{1}{2m+1}\right|\leqslant u+\frac{1}{2m+1} < u+\frac{3}{2m+1} < \ldots < u+\frac{2m-1}{2m+1}\leqslant 1$ na przedziale całkowania, więc gdy wykładnik $n-\frac{1}{2}$ jest ujemny, tzn. gdy $n\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, wtedy $A_0 < A_1 < \ldots < A_m$. Stąd

$$m\equiv 0 \bmod 2 \;\Rightarrow\; K_n\Big((2m+1)\tfrac{\pi}{2}\Big) > (-A_1+A_2)+\ldots+(-A_{m-1}+A_m) > 0,$$
$$m\equiv 1 \bmod 2 \;\Rightarrow\; K_n\Big((2m+1)\tfrac{\pi}{2}\Big) < (A_0-A_1)+\ldots+(A_{m-1}-A_m) < 0,$$

a więc $J_n(z)$ ma co najmniej jedno zero pomiędzy każą parą kolejnych wyrazów ciągu $(2m+1)\frac{\pi}{2}$. Ponadto $\begin{cases} J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z, \\ J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z. \end{cases}$

O iloczynach nieskończonych

1. **Definicja**. Niech $(a_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. 'Iloczyn nieskończony' $a_1a_2a_3\ldots = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy *zbieżnym*, jeśli $\exists p \geqslant 0 : \left\{ \begin{array}{l} \forall n > p : a_n \neq 0, \\ \exists\ v := \lim_{n\to\infty} a_{p+1}a_{p+2}\ldots a_n, \\ v \neq 0. \end{array} \right\}$; wtedy liczbę $u := a_1\ldots a_p \cdot v$ nazywamy *wartością* iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ pisząc $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = u$. W pozostałych przypadkach, w szczególności gdy granica v jest równa 0 lub ∞ lub nie istnieje, iloczyn $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy rozbieżnym.

   Wartośc $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zerem $\Leftrightarrow \exists n : a_n = 0$. Na zbieżność iloczynu nie wpływa dopisanie lub opuszczenie skończonej liczby wyrazów. Dla zbieżnego iloczynu zachodzi $\boxed{\lim a_n = 1}$ (warunek konieczny!), gdyż $a_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}$ dla $n > p$.

2. **Przykłady**. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$, gdyż $\prod_{n=2}^{N} \ldots = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

   Z kolei $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ oraz $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ są rozbieżne, bo ich iloczyny cząstkowe, równe $n+1$ i $\frac{1}{n}$, dążą do 0 i do ∞.

   Dla $|z| < 1$ mamy: $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+z^{2^{n-1}}\right) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots = \frac{1}{1-z}$, gdyż $u_n = \frac{1-z^{2^n}}{1-z}$ (indukcja).

3. **Warunek Cauchy'ego**. Iloczyn $\prod_n a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) : \forall\, n > m > N : \left|\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) - 1\right| < \varepsilon$.

   Zakładając, że $\forall k : a_k \neq 0$, oznaczmy $u_n := a_1\ldots a_n$. $\boxed{\Rightarrow}$ Niech $u := \lim u_k \in \mathbf{C}^*$; $\exists\ M : \forall\ n \geqslant M : |u_n| \geqslant \frac{1}{2}|u|$, a ze 'zwykłego' warunku Cauchy'ego $\exists\ N \geqslant M\ : \forall\ n > m > N : |u_n - n_{m-1}| < \frac{1}{2}|u|\varepsilon$, wtedy $\left|a_m\ldots a_n - 1\right| = \left|\frac{n_n - u_{m-1}}{u_{m-1}}\right| < \frac{\frac{1}{2}|u|\varepsilon}{\frac{1}{2}|u|} = \varepsilon$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Z założenia $\boxed{\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ N : \forall\ n > m > N : \left|\frac{u_n}{u_{m-1}} - 1\right| < \varepsilon}$ (*); stąd, dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$, wynika ograniczoność ciągu (u_n), a więc także istnienie zbieżnego podciągu. Łatwo teraz z (*) wywieść, że granica podciągu jest zarazem granicą całego ciągu (u_n).

4. **Wniosek**. Jeśli iloczyn $\prod_n(1+c_n)$ jest *zbieżny bezwzględnie*, tzn. jeśli zbieżny jest $\prod_n(1+|c_n|)$, to jest zbieżny.

   $$\left|(1+c_1)\ldots(1+c_n) - 1\right| = \left|\sum_{|I|\geqslant 1}\prod_{i\in I} c_i\right| \leqslant \sum_{|I|\geqslant 1}\prod_{i\in I}|c_i| = (1+|c_1|)\ldots(1+|c_n|) - 1.$$

5. **Fakt**. Jeśli $\forall n : c_n \in \mathbf{R}_+$, to iloczyn $\prod_n(1+c_n)$ jest zbieżny $\iff$ szereg $\sum_n c_n$ jest zbieżny.

   Zatem dla $c_n \in \mathbf{C}$ iloczyn $\prod_n(1+c_n)$ jest zbieżny bezwzględnie $\iff$ szereg $\sum_n |c_n|$ jest zbieżny.

   Ciągi $s_n := c_1 + \ldots + c_n$ oraz $u_n := (1+c_1)\ldots(1+c_n)$ są dodatnie, niemalejące oraz $s_n \leqslant u_n \leqslant e^{s_n}$ (gdyż $1 + c_k \leqslant e^{c_k}$), skąd teza.

6. **Uwaga**. Przy dowolnych $c_n \in \mathbf{R}$ (lub $c_n \in \mathbf{C}$) żadna z implikacji $\left[\prod_n(1+c_n)\text{ zb.}\right] \Leftarrow\ \Rightarrow \left[\sum_n c_n\text{ zb.}\right]$ nie zachodzi.

   (1) Iloczyn $\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\cdot\ldots$ jest oczywiście zbieżny,
   lecz szereg $\frac{1}{\sqrt{1}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1}+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\ldots$ jest rozbieżny, gdyż $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} \approx \frac{1}{n}$.

   (2) Szereg $\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{4}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\ldots$ jest oczywiście zbieżny,
   lecz iloczyn $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\ldots = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots$ jest rozbieżny.

7. **Fakt**. Jeśli w obszarze D funkcje $c_n(z)$ są holomorficzne, a szereg $\sum_n |c_n(z)|$ jest zbieżny niemal jednostajnie, to:

   (1) Iloczyn nieskończony $f(z) := \prod_n\big(1+c_n(z)\big)$ jest zbieżny bezwzględnie, a funkcja f jest holomorficzna na D;

   (2) $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\log f(z) = \sum_n \frac{c_n'(z)}{1+c_n(z)}$ w obszarze $D\setminus\{z : f(z) = 0\}$ (*pochodna logarytmiczna*). [Leja,VIII§3]

Wzory Gaussa i Weierstrassa

8. **Fakt** (*wzór Gaussa*). $\boxed{\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{z(z+1)\ldots(z+n)}n^z}$ dla $z \in \mathbf{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, gdzie $n^z := \exp(z\ln n)$.

   Wystarczy dowieść tego dla $\mathrm{Re}\,z > 0$. Niech $\Gamma_n(z) := \int_0^n u^{z-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n du = \left\|^{u=nt}\right\| = n^z\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^n dt$. Całkując przez części dostajemy: $\displaystyle\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^n dt = \left\| \begin{array}{c|c} (1-t)^n & -n(1-t)^{n-1} \\ t^{z-1} & \frac{1}{z}t^z \end{array} \right\| = \frac{n}{z}\int_0^1 t^z(1-t)^{n-1}dt = \ldots = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\int_0^1 t^{z+n}dt$, a więc $\Gamma_n(z) = \dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{z(z+1)\ldots(z+n)}n^z$. Wystarczy zatem wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma_n(z) = \Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1}e^{-u}du$. Otóż $\Gamma(z) - \Gamma_n(z) = \displaystyle\int_0^n u^{z-1}\left[e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n\right]du + R_n(z)$, gdzie $R_n(z) = \displaystyle\int_n^\infty u^{z-1}e^{-u}du \longrightarrow 0$ (zbieżność całki), natomiast z oszacowań $\boxed{0 \underset{(1)}{\leqslant} e^{-u} - \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \underset{(2)}{\leqslant} \frac{1}{n}u^2e^{-u} \text{ dla } 0\leqslant u\leqslant n}$ wynika, że $\left|\displaystyle\int_0^n \left[\ldots\right]du\right| \leqslant \int_0^n \frac{1}{n}u^{\mathrm{Re}\,z+1}e^{-u}du \leqslant \frac{1}{n}\int_0^\infty \ldots du \longrightarrow 0$.

Oszacowania (1) i (2) wynikają z nierówności $e^x \geqslant 1+x$: *Ad* (1): Kładziemy $x := -\frac{u}{n}$ i podnosimy obustronnie do n-tej potęgi. *Ad* (2): Kładziemy $x := \frac{u}{n}$, dostając $e^u \geqslant \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$, skąd $e^u\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \geqslant \left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1 - \frac{u^2}{n}$ (z Bernoulliego), i już.

9. **Fakt** (*wzór Weierstrassa*). $\boxed{1/\Gamma(z) = ze^{\gamma z}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]}$ dla $z\in\mathbf{C}$; stosujemy oczywiście umowę, że $1/\Gamma(z)$ ma zera tam, gdzie $\Gamma(z)$ — bieguny, tzn. dla $z\in\{0,-1,-2,\ldots\}$; współczynnik $\gamma\approx 0.577215$ jest *stałą Eulera*:

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{n}-\ln n\right)$$

$e^{z(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m)}\prod\limits_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = e^{-z\ln m}\dfrac{(z+1)(z+2)\ldots(z+m)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$, przy czym, jak wiemy ze wzoru Gaussa, prawa strona dąży do $\frac{1}{z\Gamma(z)}$. Pozostaje dowieść, że iloczyn $\prod\limits_n\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ jest zbieżny: Dla ustalonego $z\in\mathbf{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ weźmy $m,n\in\mathbf{N}$ takie, że $n > m \geqslant 2|z|$, wtedy $\left|\frac{z}{n}\right| < \left|\frac{z}{m}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, więc $\frac{z}{n}$ należy do dziedziny $\log_{(0)}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$ oraz $\left|\log_{(0)}\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right| = \left|-\frac{z^2}{2n^2} + \frac{z^3}{3n^3} - \frac{z^4}{4n^4} + \ldots\right| \leqslant \frac{|z|^2}{2n^2}\left(1 + \left|\frac{z}{n}\right|^2 + \left|\frac{z}{n}\right|^2 + \ldots\right) \leqslant \frac{m^2/4}{2n^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = \frac{m^2}{4n^2}$. Dowodzi to, że szereg $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}\left[\log_{(0)}\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right]$ jest bezwzgl. zbieżny, więc $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty}\exp\left[\log_{(0)}\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right] = \prod\limits_{n=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ jest zbieżny.

10. **Fakt**. $\boxed{\dfrac{d}{dz}\log\Gamma(z+1) = -\gamma + z\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+z)}}$, $\boxed{\dfrac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z+1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+z)^2}}$ dla $z\in\mathbf{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$.

Pochodna logarytmiczną $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = e^{-\gamma z}\prod\limits_n(1+\frac{z}{n})^{-1}e^{\frac{z}{n}}$ i różniczkowanie szeregu: $\frac{d}{dz}\,\frac{z}{n(n+z)} = \frac{1}{n}\,\frac{n+z-z}{(n+z)^2} = \frac{1}{(n+z)^2}$.

11. **Wniosek**. $\boxed{\Gamma'(1) = -\gamma}$, $\boxed{\Gamma''(1) = \gamma^2 + \dfrac{\pi^2}{6}}$ gdyż $\frac{d}{dz}\,\frac{\Gamma'}{\Gamma} = \frac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$. Ponadto $\Gamma'(z+1) = \left[z\Gamma(z)\right]' = z\Gamma'(z) + \Gamma(z)$, więc $\Gamma'(n+1) = n\Gamma'(n) + (n-1)!$, skąd kolejno dostajemy: $\Gamma'(1) = -\gamma = -0.577215$, $\Gamma'(2) = 1-\gamma = 0.422785$, $\Gamma'(3) = 3-2\gamma = 1.84557$, $\Gamma'(4) = 11-6\gamma = 7.53671$, $\Gamma'(5) = 2(25-12\gamma) = 36.1468$, $\Gamma'(6) = 2(137-60\gamma) = 204.734$, $\Gamma'(7) = 36(49-20\gamma) = 1348.40$, $\Gamma'(8) = 36(363-140\gamma) = 10158.8$, $\Gamma'(9) = 144(761-280\gamma) = 86310.6$, $\Gamma'(10) = 144(7129-2520\gamma) = 817116$.

12. **Przykład**. Wykażemy, że $\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(2-2\ln 2-\gamma) \approx 0.032339$; w szczególności $\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right) > 0$, więc z wypukłości funkcji Γ na $\mathbf{R}_+^*$ wynika, że $\min\limits_{x>0}\Gamma(x) = \Gamma(x_0)$ dla pewnego $x_0\in\left]1,\frac{3}{2}\right[$.

$\frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} = f(1)-\gamma$, gdzie $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n+1)}$; otóż $f'(x) = \frac{2}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - x\right]$, gdyż $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$; stąd $f(1) = \int_0^1\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{x}\right)dx = \left\|^{x=\frac{1}{t}}\right\| = \int_0^\infty\left[\ln(t+1) - \ln(t-1) - \frac{2}{t}\right]dt = \left[(t+1)\ln(t+1) - (t-1)\ln(t-1) - 2\ln t\right]_{t=1}^{\infty} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(t\ln(1+\frac{2}{t-1}) + \ln\frac{t^2-1}{t^2}\right) - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2$.

Uwaga. Rezultat numeryczny: $y_0 := \min\limits_{x>0}\Gamma(x) = \Gamma(1.4616) = 0.8856031947$, przy czym $\frac{y_0}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{y_0}{\sqrt{\pi}/2} = 0.99929$.

13. **Fakt**. $\boxed{\sin z = z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{\pi^2n^2}\right)}$, przy czym na całej płaszczyźnie $\mathbf{C}$ iloczyn jest zbieżny bezwzględnie.

Bezwzględna zbieżność i holomorficzność prawej strony: gdyż szereg $\sum\limits_n\frac{z^2}{\pi^2n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie. Wartość iloczynu: jeśli $z\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$, to $\frac{\sin\pi z}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(z)}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-z)}$, zaś ze wzoru Weierstrassa $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ oraz $\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{1}{(-z)\Gamma(-z)} = \frac{-z}{(-z)}e^{-\gamma z}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$, skąd teza.

14. **Przykład**. $\prod\limits_{n=1}\left(1+\dfrac{a^2}{n^2}\right) = \dfrac{\sin(i\pi a)}{\pi ia} = \dfrac{\mathrm{sh}(\pi a)}{\pi a}$ dla $a\in\mathbf{C}$.

15. **Przykład**. Licząc pochodną logarytmiczną rozwinięcia $\sin z$ otrzymujemy wzór $\boxed{\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2z}{z^2-n^2}}$.

Obliczanie iloczynów postaci $\prod\limits_{n=1}^{\infty} R(n)$

16. Założymy, że $R(z)$ jest funkcją wymierną, nie mającą biegunów w punktach $z = n \in \mathbf{N}$. Rozłóżmy ją na czynniki liniowe: $R(z) = C\dfrac{(z+a_1)\ldots(z+a_r)}{(z+b_1)\ldots(z+b_s)}$; zbieżność iloczynu wymaga, by $\lim\limits_{n\to\infty} R(z) = 1$, tzn. $C = 1$ oraz $s = r$. Zażądajmy, by $\prod\limits_{n=1}^{\infty} R(n)$ był *bezwzględnie* zbieżny; jak wiemy, jest to równoważne bezwzględnej zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(R(n)-1\big)$, a więc tym bardziej musi być spełniony warunek $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(R(n)-1\big) = 0$. Ponieważ

$$z\big(R(z)-1\big) = \frac{n\big(1+\frac{a_1}{z}\big)\ldots\big(1+\frac{a_r}{z}\big) - n\big(1+\frac{b_1}{z}\big)\ldots\big(1+\frac{b_r}{z}\big)}{\big(1+\frac{b_1}{z}\big)\ldots\big(1+\frac{b_r}{z}\big)} \xrightarrow[z\to\infty]{} (a_1+\ldots+a_r) - (b_1+\ldots+b_r),$$

więc warunkiem koniecznym bezwzgl. zbieżności jest równość $\boxed{a_1+\ldots+a_r = b_1+\ldots+b_r}$. Oczywiście jest to zarazem warunek wystarczający bezwgl. zbieżności, gdyż wtedy istnieje $l = \lim\limits_{z\to\infty} z^2\big(R(z)-1\big)$, tzn. $R(n)-1 \cong \dfrac{l}{n^2}$.

Dla obliczenia wartości $\prod\limits_{n=1}^{\infty} R(n)$ zauważmy, że $R(n) = \dfrac{(1+\frac{a_1}{n})e^{-\frac{a_1}{n}}\cdot\ldots\cdot(1+\frac{a_r}{n})e^{-\frac{a_r}{n}}}{(1+\frac{b_1}{n})e^{-\frac{b_1}{n}}\cdot\ldots\cdot(1+\frac{b_r}{n})e^{-\frac{b_r}{n}}}$, zaś ze wzoru Weierstrassa $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}} = \dfrac{e^{-\gamma z}}{z\Gamma(z)} = \dfrac{e^{-\gamma z}}{\Gamma(1+z)}$; zatem ostatecznie $\boxed{\prod\limits_{n=1}^{\infty} R(n) = \dfrac{\Gamma(1+b_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(1+b_r)}{\Gamma(1+a_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(1+a_r)}}$.

17. **Przykład**. $I(x) := x\left(1-\frac{x}{1^4}\right)\left(1-\frac{x}{2^4}\right)\left(1-\frac{x}{3^4}\right)\ldots = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n^4}\right) = x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-x}{n^4}$; niech $\sqrt[4]{x} = \{y_1,\ldots,y_4\}$, wtedy z tożsamości $z^4 - x = (z-y_1)\cdot\ldots\cdot(z-y_4)$ dostajemy: $I(x) = x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-y_1)(n-y_2)(n-y_3)(n-y_4)}{(n+0)(n+0)(n+0)(n+0)} =$ $= x\,\dfrac{\Gamma(1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(1)}{\Gamma(1-y_1)\cdot\ldots\cdot\gamma(1-y_4)} = \dfrac{-1}{\Gamma(-y_1)\Gamma(-y_2)\Gamma(-y_3)\Gamma(-y_4)}$, gdyż $(-y_1)(-y_2)(-y_3)(-y_4) = -x$.

18. **Przykład**. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)} = \dfrac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = \dfrac{ab}{a+b}\,B(a,b)$.

19. **Przykład**. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2}) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-x)(n+x)}{n^2} = \dfrac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} = \dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$ dla $x \in \mathbf{C}^*$ (nowe wyprowadzenie).

Nieco o funkcjach całkowitych

20. Niech $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ będzie funkcją holomorficzną (*całkowitą*, tzn. określoną na całej płaszczyźnie). Wtedy:

(1) Jeśli $f^{-1}\{0\} = \emptyset$, to (jednospojność $\mathbf{C}$) istnieje funkcja holomorficzna $h : \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ taka, że $\boxed{f(z) = e^{h(z)}}$.

(2) Jeśli zbiór $f^{-1}\{0\}$ jest skończony, to $\boxed{f(z) = z^{k_0}\big(1-\frac{z}{z_1}\big)^{k_1}\ldots\big(1-\frac{z}{z_n}\big)^{k_n}e^{h(z)}}$, gdzie $z_1,\ldots,z_n \in \mathbf{C}^*$ są 'niezerowymi zerami' f, liczby $k_1,\ldots,k_n \geqslant 1$ — ich krotnościami, $k_0 \geqslant 0$ - krotnością zera $z_0 = 0$, zaś $h : \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ jest funkcją holomorficzną (całkowitą).

(3) Jeśli zbiór $f^{-1}\{0\} = \{z_1, z_2, \ldots\}$ jest nieskończony, to $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ (gdyż zera funkcji holomorficznej są izolowane, więc w każdej kuli $K(0;R)$ jest tylko skończona liczba wyrazów z_n).

21. **Twierdzenie** (Weierstrassa, *o rozkładzie*). Niech $z_1, z_2, z_3, \ldots$ będzie ciągiem w C^*, takim że $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, zaś $r_0, r_1, r_2, \ldots$ — ciągiem w $\mathbf{Z}_+$, takim że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{z_n}\right|^{r_n+1}$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $\mathbf{C}$. Wtedy iloczyn $\boxed{f(z) := z^{r_0}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\Big[\sum\limits_{k=1}^{r_n}\frac{1}{k}\big(\frac{z}{z_n}\big)^k\Big]}$ jest bezwzględnie zbieżny na $\mathbf{C}$, a f jest funkcją całkowitą, mającą w punkcie 0 zero r_0-krotne, a w każdym punkcie $z \in \{z_n : n \in \mathbf{N}\}$ — zero o krotności równej $\big|\{n\in\mathbf{N} : z = z_n\}\big|$.

Uwaga. 1. Zwiększenie liczb k_n nie psuje warunku (3), gdyż na każdym kole $K(0,R)$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbf{N}$ mamy $\left|\frac{z}{z_n}\right| < 1$.
2. Zawsze wystarczą $k_n := n-1$, gdyż $\forall\, R>0 : \left|\frac{z}{z_n}\right|^n \leqslant \left|\frac{z}{2R}\right|^n$ dla p.w. $n\in\mathbf{N}$, zaś $\sum\limits_n\left|\frac{z}{2R}\right|^n$ jest zbieżny jednostajnie w $K(0;R)$.

Niech $E_r(z) := (1-z)\exp\Big[\sum\limits_{k=1}^{r}\frac{z^k}{k}\Big]$; ponieważ $f(z) = z^{r_0}\prod\limits_n E_{r_n}\big(\frac{z}{z_n}\big)$, zaś $\frac{z}{z_n} \in K(0;\frac12)$ dla p.w. $n\in\mathbf{N}$, więc wystarczy pokazać, że $\forall z \in K(0;\frac12) : |E_r(z)-1| \leqslant 6|z|^{r+1}$. Otóż $\forall\, z\in K(0;1) : 1-z = \exp\Big[-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\Big]$, więc $E_r(z) = e^u$, gdzie $u = U_r(z) := -\sum\limits_{k=r+1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$, zaś $|e^u-1| = \Big|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\Big| \leqslant |u|e^{|u|}$, przy czym dla $u = U_r(z)$ mamy oszacowania $|u| \leqslant \sum\limits_{k=r+1}^{\infty}|z^k| \leqslant 2|z|^{r+1}$ oraz $e^{|u|} \leqslant e^{2|z|^{r+1}} \leqslant e^1 < 3$.

Na funkcje Gamma i Beta

1. **Ćwiczenie**. Jeśli $p, q \in \mathbf{R}$, to całka $I(p,q) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x^q}$ jest zbieżna $\iff$ $0 < p < q$ lub $q < p < 0$; przy tym $I(p,q) = I(p-q,-q)$, gdyż $\dfrac{x^{p-1}}{1+x^q} = \dfrac{x^{p-q-1}}{1+x^{-q}}$. Wykazać, że $\boxed{I(p,q) = \dfrac{\pi}{q\sin(\frac{p}{q}\pi)}}$.

   W przypadku $0 < p < q$ podstawienie $\left\| \begin{array}{c} u = \frac{1}{1+x^q} \\ x = (\frac{1}{u}-1)^{1/q} \end{array} \right\|$ daje $I(p,q) = \frac{1}{q}\int_0^1 u^{-\frac{p}{q}}(1-u)^{\frac{p}{q}-1}du = \frac{1}{q}B\left(1-\frac{p}{q}, \frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{q\sin\frac{p}{q}\pi}$.
   Inny sposób. Podstawienie $t = x^q$ daje $I(p,q) = \frac{1}{q}I\left(\frac{p}{q},1\right) = \frac{1}{q}\int_0^\infty \frac{t^{k-1}dt}{t+1}$; podstawiamy następnie $u = \frac{1}{t+1}$ itd.

2. **Ćwiczenie**. Dowieść, że jeśli $-1 < s < 1$, to $\boxed{I(s) := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\theta)^s d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{s\pi}{2}}}$.

   Podstawienie $u = \sin^2\theta$, $\operatorname{tg}^2\theta = \frac{u}{1-u}$, $du = 2u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}$ daje $I(s) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u^{\frac{s-1}{2}}(1-u)^{\frac{-s-1}{2}}du = \frac{1}{2}B\left(\frac{1+s}{2}, \frac{1-s}{2}\right) =$
   $= \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2\sin\frac{1+s}{2}\pi} = \dfrac{\pi}{2\cos\frac{s}{2}\pi}$. Oczywiście równie dobrze można tu zastosować podstawienie $u = \cos^2\theta$.

3. **Ćwiczenie**. $x, y > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{x-1}dt}{(1+t)^{x+y}} = B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{2x-1}(\cos\varphi)^{2y-1}d\varphi}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 |\log t|^{x-1}\,dt = \Gamma(x)}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^x)dt = \Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{-x}du = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}dt}{1+t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\varphi)^{2x-1}d\varphi = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \quad x \in \,]0,1[}$.

4. **Ćwiczenie**. Jeśli $p, q > 0$, to $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{p-1}dt}{\sqrt{1-t^q}} = \frac{\sqrt{\pi}}{q}\,\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}}$, gdzie $k := \frac{p}{q}$ (podstawić $u = t^q$). W szczególności
   $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\big(\Gamma(1/4)\big)^2}{\sqrt{32\pi}}}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\sqrt{2\pi^3}}{\big(\Gamma(1/4)\big)^2}}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{\big(\Gamma(1/3)\big)^3}{\sqrt{3}\sqrt[3]{16}\,\pi}}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^3}} = \frac{2^{7/3}\pi^2}{3\big(\Gamma(1/3)\big)^3}}$,
   gdyż $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{4})}$, $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{1}{3})}$, zaś wzór $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$ daje $\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}2^{\frac{4}{3}}}{\left(\Gamma(\frac{1}{3})\right)^2\sqrt{3}}$, $\Gamma\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{\left(\Gamma(\frac{1}{3})\right)^2}{2^{\frac{4}{3}}\sqrt{3\pi}}$.

5. **Ćwiczenie**. Wykazać, że $\boxed{F(a,b) := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a\varphi\ \cos b\varphi\ d\varphi = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}}$ dla $b > a > -1$.
   Wskazówka. Całkować po brzegu $D := \{z : \varrho < |z| < 1, |z-i| > \varrho, |z+i| > \varrho, \operatorname{Re} z > 0\}$, gdzie $\varrho \searrow 0$, odpowiednio dobraną jednoznaczną gałąź funkcji $\left(z+\frac{1}{z}\right)^a z^{b-1}$.

   Dla $z \in D$ mamy $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re}(z+\frac{1}{z}) > 0$, więc możemy potęgi zdefiniować wzorem $w^p := |w|^p e^{pi\arg w}$, gdzie $\arg w \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   Wtedy $0 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi)^a e^{ib\varphi} i\,d\varphi - \int_0^1 \left[i\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^a (ir)^{b-1} i\,dr + \int_0^1 \left[-i\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^a (-ir)^{b-1}(-i)dr = 2^a i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^a\varphi\ e^{ib\varphi}d\varphi +$
   $+\left(-i^{b-a}+i^{a-b}\right)\displaystyle\int_0^1 (1-r^2)^a r^{b-a-1}dr = 2^a i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^a\varphi\ e^{ib\varphi}d\varphi - 2i\sin\frac{\pi(a-b)}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^a x^{\frac{b-a}{2}-1}dx$, więc z nieparzystości $\sin b\varphi$

$$F(a,b) = 2^{-a-1}\sin\tfrac{\pi}{2}\ B\left(a+1, \frac{b-a}{2}\right) = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}.$$

6. Jeśli $a, b, u > 0$, to całki $\displaystyle\int_0^\infty x^{u-1}e^{-ax}\begin{Bmatrix}\cos bx\\ \sin bx\end{Bmatrix}dx$ są zbieżne; wyrazić je przez funkcję Gamma.

   Sposób 1. Dla ustalonego $u > 0$ funkcja $F(v) := \int_0^\infty x^{u-1}e^{-vx}dx$ jest określona i holomorficzna w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} v > 0$; przy tym jeśli $v \in \mathbf{R}_+$, to $vx = t$ daje $F(v) = v^{-u}\int_0^\infty t^{u-1}e^{-t}dt = v^{-u}\Gamma(u)$. Zatem $F(v)$ pokrywa się na $\mathbf{R}_+$ z funkcją holomorficzńa $F_1(v) := v^{-u}\Gamma(u)$, gdzie $v^{-u} := |v|^{-u}e^{-iu\arg v}$ dla $\operatorname{Re} v > 0$ oraz $\arg v \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Stąd i z własności funkcji holomorficznych wynika równość $F(v) = v^{-u}\Gamma(u)$ dla $\operatorname{Re} v > 0$; zatem $\boxed{\int_0^\infty x^{u-1}e^{(-a+ib)x}dx = (a-ib)^{-u}\Gamma(u) = |a^2+b^2|^{-u}e^{iu\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}\Gamma(u)}$.

   Sposób 2. Określmy w obszarze $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ funkcję $f(z) := z^{u-1}e^{(-a+ib)z}$, gdzie $z^{u-1} := |z|^{u-1}e^{i(u-1)\varphi}$, $\varphi = \arg z \in \,]-\pi,\pi[$. Zauważmy, że jeśli $z = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{Re}(-a+ib)z = -(a\cos\varphi + b\sin\varphi) \leqslant -c(\cos\varphi+\sin\varphi) \leqslant -c$, gdzie $c := \min(a,b)$; zatem $|f(z)| \leqslant r^{u-1}e^{-cu}$, więc jeśli $C(r,\theta)$ dla $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ jest łukiem $|z| = r, \arg z \in [0,\theta]$, to $\left|\int_{C(r,\theta)} f(z)dz\right| \leqslant \theta r^u e^{-cu}$, co zbiega do zera zarówno przy $r \searrow 0$, jak też przy $r \nearrow \infty$. Stąd, całkując f po brzegu $\{z : r_1 < |z| < r_2, 0 < \arg z < \theta\}$ dla $r_1 \searrow 0$, $r_2 \nearrow \infty$ dostajemy, że całki z $f(z)$ po półprostych $\arg z = 0$ oraz $\arg z = \theta$ są jednakowe. Weźmy teraz θ takie, że $\operatorname{Im}(-a+ib)e^{i\theta} = b\cos\theta - a\sin\theta = 0$, tzn. $\theta := \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$. Biorąc parametryzację $z = \frac{t}{a-ib} = (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}e^{i\theta}t$ półprostej $\arg z = \theta$ dostajemy: $I := \displaystyle\int_0^\infty x^{u-1}e^{(-a+ib)x}dx =$

$$= (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}u} e^{iu\theta} \int_0^\infty t^{u-1} e^{-t}\,dt = (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}u} e^{iu\theta}\Gamma(u).$$

Odpowiedź. $\displaystyle\int_0^\infty x^{u-1}e^{-ax}\begin{Bmatrix}\cos bx\\ \sin bx\end{Bmatrix}dx = (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}u}\begin{Bmatrix}\cos u\theta\\ \sin u\theta\end{Bmatrix}\Gamma(u)$, gdzie $\theta := \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$.

Uwaga. Całkowanie funkcji $s(z) := z^{u-1}e^{-az}\sin bz$ nie prowadzi do celu: całki po łukach nie dążą do zera, więc całkowania po $\mathbf{R}_+$ nie można zastąpić całkowaniem po połprostej $(a+ib)\mathbf{R}_+$.

7. Wykazać, że $\boxed{\left|\frac{1}{\Gamma(iy)}\right|^2 = \frac{y}{\pi}\operatorname{sh}(\pi y)}$ dla $y \in \mathbf{R}\setminus 0$.

Wzór Weierstrassa $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ wskutek $\left|e^{\gamma i y}\right| = 1 = \left|e^{-\frac{iy}{n}}\right|$ daje $\left|\frac{1}{\Gamma(iy)}\right|^2 = y^2\prod\left|1+\frac{iy}{n}\right|^2 = y^2\prod\left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)$; dzięki wzorom $\sin\pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ oraz $\sin(iw) = i\operatorname{sh}(w)$ jest to równe $\frac{y}{i\pi}\sin(i\pi y) = \frac{y}{\pi}\operatorname{sh}(\pi y)$.

8. Wykazać, że $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$; korzystając z tego dowieść, że $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

(a) $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{\frac{2k}{n}\pi i}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z^n-1}{z-1} = n$, zaś $1-e^{2i\varphi} = e^{i\varphi}(-2i)\sin\varphi$; stąd $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$. (b) Suma całkowa odpowiadająca podziałowi $[0,1]$ na n równych części ma postać $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\right]$, co dąży do $\frac{1}{2}\ln(2\pi)$ przy $n\to\infty$.

9. Korzystając ze wzoru $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ obliczyć całkę $\displaystyle I := \int_{9/4}^{13/4}\ln\Gamma(x)dx$.

$I = I_1 + I_2$, gdzie $I_1 = \int_{9/4}^3 \ln\Gamma(x)dx$, $I_2 = \int_3^{13/4}\ln\Gamma(x)dx$; otóż $I_1 = \int_{1/4}^1 \ln\Gamma(t+2)dt = \int_{1/4}^1 \ln\big((t+1)t\Gamma(t)\big)dt$, $I_2 = \int_0^{1/4}\ln\Gamma(t+3)dt = \int_0^{1/4}\ln\big((t+2)(t+1)t\Gamma(t)\big)dt$, więc $I = \int_0^1\big[\ln(t+1)+\ln t+\ln\Gamma(t)\big]dt + \int_0^{1/4}\ln(t+2)dt = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^{9/4}\ln x\,dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{9}{4}\ln\frac{9}{4} - \frac{9}{4}$.

10. Korzystając ze wzoru $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ obliczyć dla $a>0$ całkę $\displaystyle I(a) := \int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)dx$.

$I'(a) = \ln\Gamma(a+1) - \ln\Gamma(a) = \ln\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a$, więc $I(a) = a\ln a - a + \text{const}$.

Ściąga ze wzorów

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \qquad 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z+\frac{\theta}{12z}}$$

$$\mathrm{B}(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{u-1}\,dt}{(1+t)^{u+v}} = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \qquad \mathrm{B}(u+1,v) = \frac{u}{u+v}\mathrm{B}(u,v)$$

$$\exp\left(\tfrac{z}{2}\left(t-\tfrac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \qquad z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u^{-n-1} \exp\left(\frac{z}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right) du = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_\gamma t^{-n-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt =$$

$$= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos zt\, dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{2\pi i \Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{\infty} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \cos zt\, dt =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\cos\varphi + n\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(z\sin\varphi - n\varphi) d\varphi = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi \qquad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \qquad J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \tfrac{2n}{z} J_n(z) \qquad J_{n+1}(z) = \tfrac{n}{z} J_n(z) - J_n'(z)$$