

# Notes on adjointness in epistemic foundations

Ryszard Paweł Kostecki

Institute for Theoretical Physics  
ul. Hoża 69, 00-689 Warszawa, Poland  
ryszard.kostecki@fuw.edu.pl

29 June 2012

*pre-pre-draft version (notes for a future paper)*

## Abstract

In these notes I revisit the discussion of a categorical framework for intersubjective (multi-agent) epistemic inference theories, that I've proposed in [2,3,4,5]. Following Lawvere's approach to categorical *deductive* logic, I postulate to consider the system of *inductive* logic to be determined by two categories:  $E$  of abstract *experimental configuration spaces* and their allowed transformations, and  $T$  of abstract *theoretical models* and the allowed inductive inferences. An *interpretation* (or a *construction of an inferential theory*) is a functor  $I:E \rightarrow T$ , a *prediction* is defined as a functor  $P:T \rightarrow E$ . (This way every interpretation  $I:E \rightarrow T$  is also an interpretation in the sense of [1], where an *interpretation* was defined as a functor from ontic to epistemic category, and a postulate of many possible ontologies for a single epistemic theory was analysed in these terms.) An *agent* of any pair  $(P, I)$  of interpretation and prediction is given by an object in a category  $E$ . For a given theory  $T$  and an interpretation  $I:E \rightarrow T$ , a prediction  $P:T \rightarrow E$  is called: *intersubjectively scientific* (resp. *magic*) *verification* iff  $P$  is right (resp. left) adjoint to  $I$ . Heuristic arguments based on some vague references to the Durkheim–Granet, Spengler–Fleck, and Chwistek's theories of knowledge are given as a tentative justification. This framework is intended to (but not yet proved to) encompass both bayesian inference theory and quantum mechanics.

## Contents:

1. *On the semantics of formal inductive inference systems*, 26-27 June 2012
2. *Zur Allgemeine Kategorischeninduktionslogiktheorie: The truth [of an epistemic theory] as an adjoint functor (a letter to Marcin & Michał Kotowski)*, 28 June 2012

## References

- [1] Kostecki R.P., 2005, *Toposophical de-ontologisation*, preprint, July 2005.
- [2] Kostecki R.P., 2011, *Categories of quantum theoretic models*, a talk given on 18.07.2011 at International Category Theory Conference CT2011, University of British Columbia, Vancouver.
- [3] Kostecki R.P., 2012, *On principles of inductive inference*, in: Goyal P. et al (eds.), Proceedings of the 31st International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, 9–16 July 2011, Waterloo, Canada, AIP Conf. Proc. **1443** (2012), 22-31. arXiv:1109.3142.
- [4] Kostecki R.P., 2012, *Towards non-linear quantum information foundations of quantum theory*, Quantum Foundations Seminar, Perimeter Institute, Waterloo. Video recording of a talk available at: <http://pirsa.org/displayFlash.php?id=12010138>.
- [5] Kostecki R.P., 2012, *A sketch of a categorical interface for the experiment-theory relationship*, preprint, April 2012.

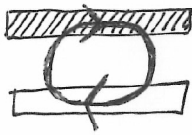
On the semantics of formal inductive inference systems

1. the problem of inductive inference is usually exemplified into a mixture of various mathematical tools, that are introduced and justified upon the ad hoc arguments. This is more or less explicit in the frequentist approach, but the same is true in Bayesian approach.

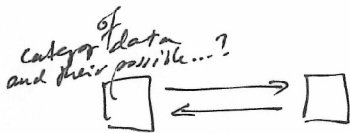
2. Chwistek + Fleck / Spengler / Durrheim + Gravet

3.  semantics: epistemic

 syntactic: formal

4.  "cogn. part 'pragmatic',  
+ "cogn. part 'speculative'?"  
+ "verification of theory of truth".

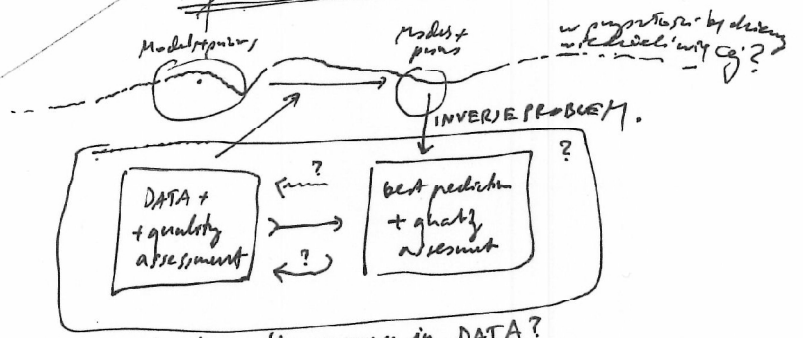
Lawvere: model as functor  
 $\square \rightarrow \square$   
proofs as arrows.



model CONSTRUCTION is not the same as USE of the model.

abstract items.

inferences as arrows.



what are the arrows in DATA?  
ARE THERE ANY arrows?

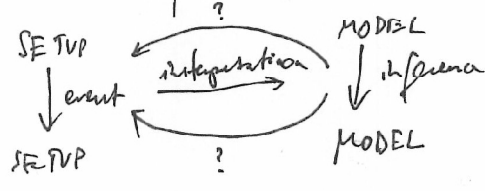
[CALIBRATION] SETUP

occurrences (data, events) are arrows. this is an ACTIVE COMPONENT (and beyond any prediction itself).

[POST-REQ] [STRONG] SETUP

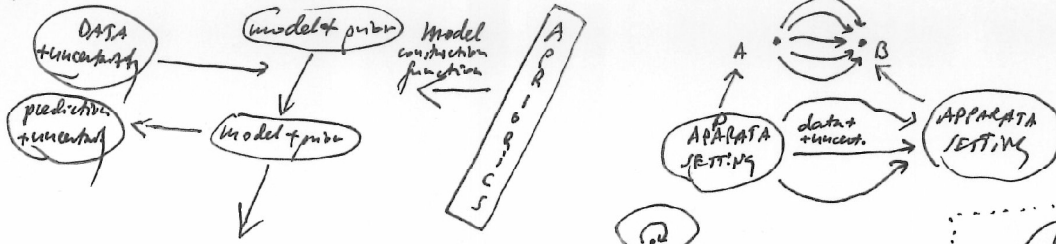
Basically, every setup is an object in  $Scale \times (Conf \downarrow Sup)$ , but are the arrows also the arrows in this category?

Well, it can be in the following NORMATIVE sense (different than just laziness to invent yet another "experimental universe" category...): the occurrences (SHALL be) somehow distinguishable by means of the "change" (i.e., morphisms) of passive components. Otherwise, how we could say that occurrence had ever OCCURRED? Yet, this requires really good justification that the members of  $Mor(Scale \times (Conf \downarrow Sup))$  should be considered as good/valid representation of "experimental events".

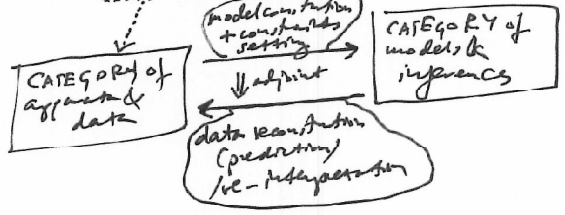
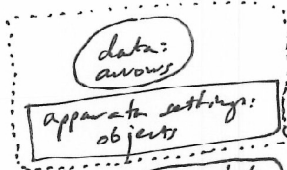
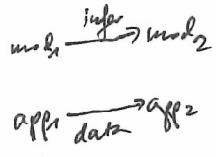
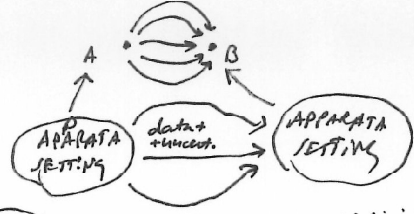


What is verification?

It is an assessment of the agreement between the prediction generated...



magical vs scientific worlds: the issue of adjoints [left/right]



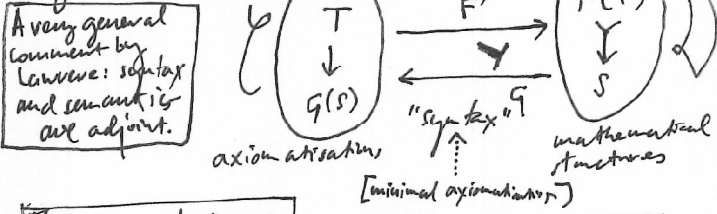
An inferential universe is predictable iff

$\exists$  inference  $\exists$  data magical world via

$\nexists$  data inference? vacu to just generate, but the "unrealistic" "precess" models.

key to just adjoint functor?

Take  $\mathcal{L}$  to be the set of all logical theories (axiomatizations), and  $\mathcal{D}$  the power set of all mathematical structures. For a theory  $T$  in  $\mathcal{L}$ , let  $F(T)$  be the set of all structures that satisfy the axioms  $T$ . For a set  $S$  of mathematical structures, let  $G(S)$  be the minimal axiomatization of  $S$ . We can say that  $F(T)$  is a subset of  $S$  iff  $T$  logically implies  $G(S)$ : the "semantics" functor  $F$  is left adjoint to the "syntax" functor  $G$ .



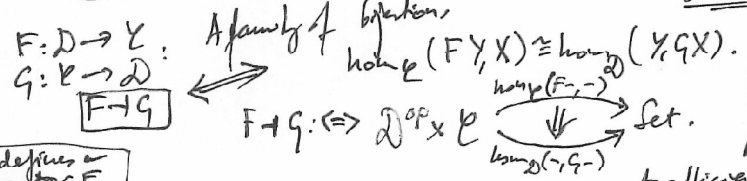
A very general comment by Lawvere: syntax and semantics are adjoint.

We say that  $F(T) \rightarrow S$  iff  $T \rightarrow G(S)$  logically implies natural iso:  $\text{hom}_{\mathcal{L}}(F-, -) \cong \text{hom}_{\mathcal{D}}(-, G-)$ .

Forgetful functor  $G: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$  has a left adjoint  $F$  generating the discrete space and right adjoint  $H$  creating the trivial topology.

$\exists_f$  is the most efficient solution to the problem posed by  $(\cdot)^*$   $\rightarrow \forall_f$  poses the most difficult problem that  $(\cdot)^*$  solves.

Every poset can be viewed as a category. A pair of adjoint functors between two posets is called a Galois connection. Any Galois connection leads to a closure operators!



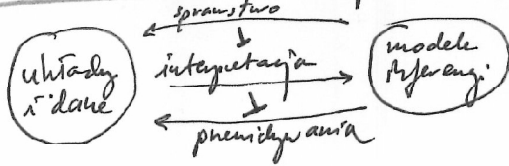
it defines a universal property

it defines a functor F

Adjoints functors is a way to giving the most efficient solution to some problem by a method which is formalized. Finding the most efficient solution is an optimization. Suppose we have started with F and ask: is there a problem to which F is the most efficient solution? F is the most efficient solution to the problem posed by G  $\Leftrightarrow$  G poses the most difficult problem that F solves.

We say that WERYFIKACJA to:

- A) interpretacja (modelu) inference model 2 iff model eventy do predykcji (modelu 2)
- predykcja (modelu) eventy do danych 2 iff model inference do interpretacji (danych 2)
- B) interpretacja (modelu) inference model 2 iff model eventy do sprawstwa (modelu 2)
- sprawstwo (modelu) eventy do danych 2 iff model inference do interpretacji (danych 2)



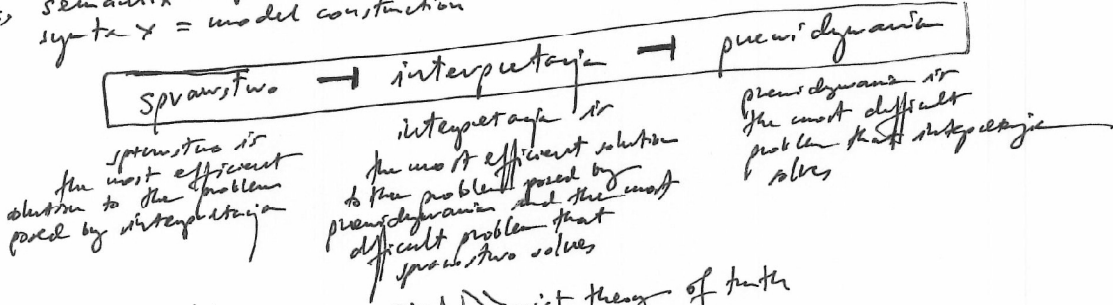
"oświadczenie o czymś tam pomysł, ale nie stawa!"

"data inference" "data inference" "data inference"

NAUKA

in science, semantics = model construction  
syntax (minimal axiomatization) = experimental prediction  
 [faktory chi, pomiarowe i semantyki magii]  
 [model pomiarowe i syntaksy magii]

in magic, semantics = experiment construction (sprawstwo)  
syntax = model construction



<<RELATIVE INDUCTIVE VERIFICATION>> - is theory of truth  
 "INDUKTYWNA PRAWDA TO ADJOINT FUNCTOR"

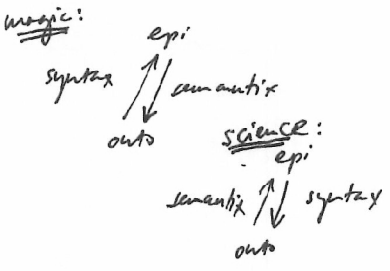
Punkt wyjścia pomysłowej analizy:

a pedant chce być bardziej zadowolony, że dokonywany konkluzje

Fleck:



mix. nie sposób rozdzielić: transformacji i wglądu.



pojawia się pytanie: co jest w tym co jest interpretowane / w tym co jest interpretacji / w tym co jest interpretacji / w tym co jest interpretacji?

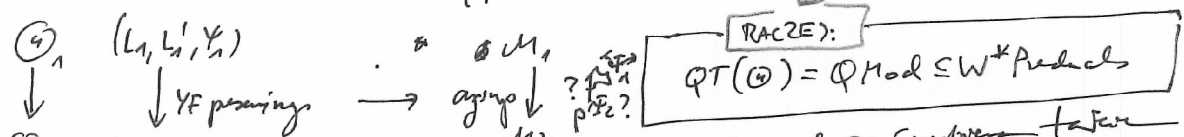
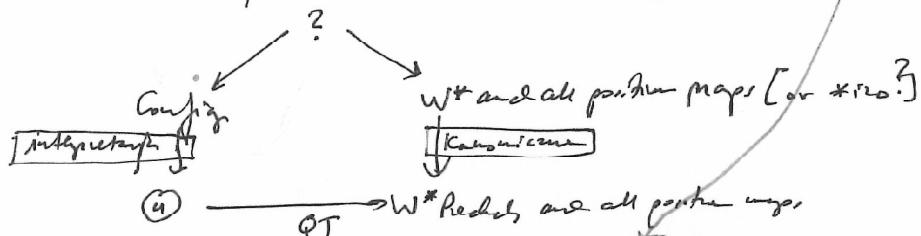
Nauka znaczenie eksperymentu nadaje poprzez wyrażenie ich w konstrukcyjnej umyśle. Magia znaczenie kon. funkcjom umyśla nadaje poprzez wyrażenie ich w behawioralnym.

It's standing on the answer to the question WIELKIE: "czy to matematyczne struktury inferencji i wyznaczenia ma miejsce w eksperymentalnym kategorii" czy odwrócić? Jedno jest nauka, drugie umyśle?!"

# Usage!

A co pełni rolę McCullagh ma na myśli WISZYŚKIE uniwersyjny przedmiot. Wzrost  $P(\Delta)$  i co to jest?  
 Jego kategoria jest to, żeby odnieść typ  $P(\Delta)$  od  $P(\Delta)$ ? Wtedy byłby przekształcenie  
 $P(\Delta) \cong \mathcal{P}Mod$ . Przebieg podstawienie to:  $W^*Preds \sim P(\Delta)$ ,  
 $\mathcal{P}Mod \sim \textcircled{4}$   
 $W^*Alg \sim \Delta$

A więc funkcja  $Config \rightarrow \textcircled{4}$  to interpretacja  $Config \rightarrow \mathcal{P}Mod$ , zaś funktor  
 $Scale \times Obj^{op} \rightarrow P(\Delta)$  to raczej kanoniczne odzwierciedlenie  $W^* \rightarrow W^*Preds$ .

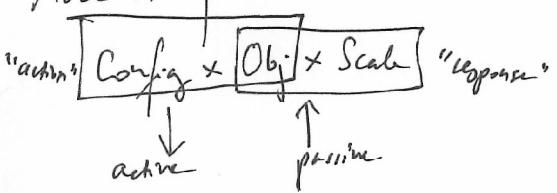


nie musimy mieć żadnych dodatkowych map, które zachowują odpowiednie relacje.

Czy ja wiem?...

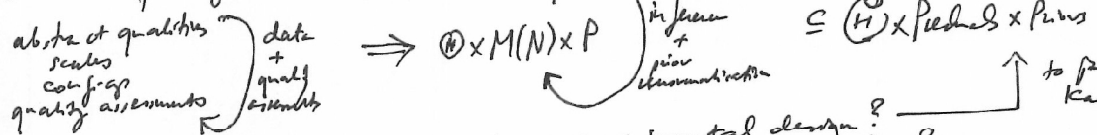
$W^*$  aldehyd nie ma phase space =  $(X, \mathcal{U}(X))$   
 A więc odzwierciedlenie tego schematu może być inne...

Może zaś być tak:



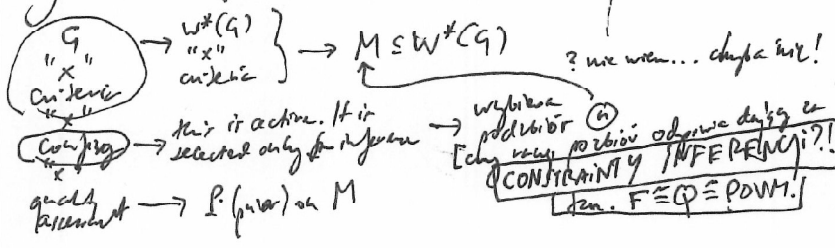
Obj? ?

[in case of magic: ↑ is active and ↓ is passive]



Są dwa różne rozumienia: 1) co to jest experimental design? 2) co to jest inferential verifiability?  
 to fakt buduje te kategorie? czy nie?

Jeżeli odpowiedź na 2). Czy McCullagh umie odpowiedzieć na 1)?



AHA! to może dać szansę na wyjaśnienie "diagramu" McCullagha jako wypracowania podstrony kategorii adaptacji do języka kierunkowej symetrii (i jej struktury).

# *Zur Allgemeine Kategorischeninduktionslogiktheorie:* The truth [of an epistemic theory] as an adjoint functor

*Ryszard Paweł Kostecki*

Institute for Theoretical Physics  
ul. Hoża 69, 00-689 Warszawa  
ryszard.kostecki@fuw.edu.pl

28.06.2012

(...)<sup>1</sup>

Otóż mam wspaniałą rewizję do moich "kategoryjnych przymiarek do koherencyjnej intersubiektywnej definicji <<prawdy>> w teoriach induktywnej inferencji". Matematycznie jest to inspirowane Lawvere'a podejściem do logiki deduktywnej, oraz problemami które napotkałem w poprzedniej wersji mojego kategoryjnego podejścia (post-McCullaghowskiego), które jakiś czas temu Wam wysłałem. Tamta praca jest ciekawa jako próba zdefiniowania kinematyki teorii, czyli tego jak modele kwantowe lub probabilistyczne powinno się konstruować "kowariantnie" (w sensie kategoryjnym) ze względu na zmienniczość ("skalowalność"/transformacyjność) kategorii poznawczych. Ale nie nadaje się do modelowania dynamiki (inferencji). Matematycznie będzie poniżej, a filozoficznie zaś, jest to dalsze przemyślenie okołofleckowsko-spenglerowskie z dodatkowym inputem z Chwistka ("Granice nauki"). W skrócie wygląda to tak:

Przy okazji zakończenia etapu pierwszego naszych dociekań fleckowskich, tj. (jak rozumiem) Waszej zgody co do pryncypialnej możliwości podważenia każdej kategorii poznawczej, przyznaję Wam rację, że aby móc prowadzić jakkolwiek intelektualne **\*modelowanie\*** (a nie krytykę) z pozycji fleckowskich, trzeba dokonać jakichś stabilizacji opisu o charakterze pozytywnym (tzn. zgodzić się na pewną umowę, zamiast heraklitowsko-heglowsko-korzybskiego flowu negacji). Wydaje mi się najbardziej obiecującym i najsłabszym (w sensie logicznym, a nie w sensie potocznym, tzn. "joł joł - ale słabizna, meeeen!") badanie ustabilizowanych Denkstili, gdzie stabilizacja znaczy ustabilizowanie się rozdziału na kategorie poznawcze które są uznawane za kategorie "czystych faktów" (<<bezpośredniego>> doświadczenia), oraz kategorie poznawcze ich "rozumienia, interpretacji, etc". O ile wcale nie jest jasne, że taki rozdział musi zajść (jak już sygnalizowałem, argumenty biologiczno-ewolucyjne nie mają dla mnie żadnej wartości, przede wszystkim dlatego, że interesują mnie problemy intersubiektywnej komunikacji z systemami poznawczymi dla których te kategorie nie odgrywają żadnej roli; plus obecna teoria ewolucyjna brzmi rozsądnie na poziomie różniczkowym, ale całkowo to jest jakiś mix fantazji i fitowania do nadziei), to wystarczy argument, że pewne formy intesubiektywnego myślenia/działania/komunikacji które nas interesują mają taką stabilizację wbudowaną ex definitione. Jedną z takich form jest myślenie naukowe. Czyli o ile w globalnej perspektywie mamy oczywiście fleckowski "flow" podziału na elementy czynne i bierne (i związane z tym pozostawanie w niedefiniowalnym cieniu tego czym jest "tak naprawdę" awizo oporu [co to znaczy "jest"???]), to z drugiej strony określony Zeitgeist (termin dla zachowania fleckowskiego smaczku terminologicznego :P) danej dziedziny poznawczego działania scharakteryzowany jest przez występowanie określonego podziału w praktyce-i-myśleniu intersubiektywnym. Wcale te Zeitgeisty nie muszą jeden w drugi przechodzić rewolucjami (=Kuhn ist be), ważne jest, że nam do analiz są potrzebne, plus na poziomie labu lub użytkowników tych samych urządzeń i/lub podręczników się efektywnie stabilizują na przedziale jakiegoś czasu, który uważamy za ciekawy. (Wydaje mi się, że - przynajmniej w naszej dyskusji - ten motyw "skalowania do skali naszych zainteresowań" pochodzi od Was, i kupuję to.)

Kluczowy argument, który pozwala jakoś dalej to pożyć na poziomie socjoepistemologii nauki, pochodzi od Chwistka i mówi, że w naukowym poznaniu i praktyce nie mamy nigdy do czynienia z "rzeczywistością" jako ostateczną instancją weryfikacji, tylko ze "schematem rzeczywistości", ujętym w pewne abstrakcyjne kategorie pojęciowe. Czyli doświadczenie komunikowane intersubiektywnie to jest tylko schemat, który musi być współdzielany, żeby była możliwa intersubiektywna weryfikowalność. To samo głoszą Durkheim, Spengler i Granet w odniesieniu do DOWOLNYCH form poznania i działania człowieka w ramach wspólnoty intersubiektywności, czyli kultury, i od tej ostatniej strony (poprzez próbę konstruktywnej odpowiedzi na krytykę "obiektywnej intersubiektywności" Jaynesa ze strony subiektywnych bayesowców + Uffinka) ja sam do tego doszedłem. No ale jednak Chwistek był pierwszy, co jakoś w lutym czy w marcu ze zdumieniem odkryłem, czytając ponownie epistemologiczne kawałki w "Granicach nauki". (Odniesienia do Plechanowa - pycha!)

Czyli idea jest taka, że ogólnie mamy przechodzenie w siebie elementów czynnych i biernych, i "total względność", natomiast przy zatrzymaniu się na Zeitgeście mamy precyzyjne rozdzielanie w praktyce, odzwierciedlone w relacji pomiędzy pojęciami.

Matematycznie, w skrócie, moje nowe podejście wygląda tak:  
mając dane:

<sup>1</sup> Poniższy tekst (tak jak i jego tytuł, modulo fragment w nawiasach kwadratowych) jest skopiowany verbatim z e-maila do braci Marcina i Michała Kotowskich, wysłanego w dn. 28.06.2012 o g.19:21.

katégorie eksperymentalną:

\* obiekty to konfiguracje eksperymentalne (skonstruowane z obiektów conajmniej 3 kategorii podstawowych: abstrakcyjnych "subiektów poznania", abstrakcyjnych "konfiguracji", oraz abstrakcyjnych "skal pomiarowych" - szerzej o tym w poprzednim drafcie jest)

\* strzałki to liczbowo-jakościowe charakteryzacje eventów eksperymentalnych, skonstruowane ze strzałek w/w kategorii

i teoretyczną:

\* obiekty to modele statystyczne/kwantowe (+priory na nich)

\* strzałki to wnioskowania (na przykład maksymalizacje względnej entropii z więzami)

to <<model poznawczy>> (lub, równoważnie, <<interpretacja>>) jest zdefiniowany jako funktor z kategorii eksperymentalnej w teoretyczną. Czyli model poznawczy to nic innego jak funktor "teoretycznej interpretacji", czy też "konstruowania modeli i wnioskowań".

I teraz centerpiece programu: <<intersubiektywna weryfikowalność>> modelu poznawczego jest zdefiniowana jako istnienie PRAWEGO funktora sprzężonego. Funktor ten jest funktorem <<intersubiektywnie 'naukowych' przewidywań>>.

Jako bonus otrzymujemy ściśle rozróżnienie pomiędzy <<myśleniem>> 'naukowym' a 'magicznym'. W tym pierwszym dla każdego danych doświadczalnych (=każdego eventu doświadczalnego) istnieje taka asocjowana ("...przy intersubiektywnej zgodzie co do metod...") inferencja, która jest w stanie je przewidzieć przy cofnięciu z teorii na dane. W tym drugim "cokolwiek o czym zrazu pomyślę, TAKIM SIĘ STANIE W FAKTACH".

Ten drugi sposób myślenia n.t. związku myślenia z "faktami" też można zdefiniować ściśle. Mianowicie jest to LEWY funktor sprzężony to funktora interpretacji. Można go nazwać funktorem sprawczości, (<<inersubiektywnie 'magicznych'\* przewidywań>>). Obydwie formy myślenia są zatem ściśle, tylko że rozwiązują dokładnie odwrotne problemy:

1. (magiczne) sprawstwo jest najbardziej efektywnym rozwiązaniem problemu określonego przez interpretację/model poznawczy
2. przewidywania są najtrudniejszym problemem który jest rozwiązywany przez interpretację/model poznawczy
3. interpretacja jest najbardziej efektywnym rozwiązaniem problemu zadanego przez przewidywania naukowe i najtrudniejszym problemem rozwiązywanym przez magiczne przewidywania.

Bardzo mi się to podoba!

Co ciekawe, w zasadzie można nawet tu stawiać pytania w stylu Tarskiego-Goedla, tzn. na ile istnieje możliwość endofunktora z kategorii eksperymentalną w nią samą, taka że istnieje nietrywialny prawy sprzężony. Wtedy oznaczałoby to, że "można tłumaczyć doświadczenia w kategoriach czysto eksperymentalnych" (coś w stylu pozytywizmu empirycznego a la Heisenberg w pierwszej pracy o QM, czy wczesne Carnap/Reichenbachy). A istnienie nietrywialnego pełnego lewego sprzężonego endofunktora oznaczałoby możliwość dowolnej magicznej kreacji "całego świata" z jego podzbioru elementów "mentalnych".

No to tyle na dziś :)

Aha, oczywiście lewy/prawy sprzężony mają bardzo fajne własności zachowywania pullbacków/pushoutów, etc., ale żeby to zinterpretować, to trzeba mieć lepszy kategorijski obraz tego czym są kategorie z domeny i kodomeny, co mam nadzieję uda mi się wymyśleć w jakiejś bliższej przyszłości.

A teraz czas pójść się trochę zdrzemnąć:)

Z pozdrowieniami,

R.

\*ps. <<magiczność>>, ale nie <<mityczność>>. jak dotąd [= wstępnie, do dalszej obróbki kiedyś] zaliczałem mityczność do form logiki deduktywnej, jako bardzo bardzo słabą "\infty-kohomologiczną" deduktywną logikę (w sensie tej kategorijskiej logiki, która powinna odpowiadać jakimś "infty-snopom/infty-stackom" czy czemuś takiemu). Trochę na ten temat mam bazgrołów i matematycznych pomysłów, ale o tym kiedy indziej.