

Ryszard Kostecki

Badanie własności układu RLC

Warszawa, 11 marca 2001

Streszczenie

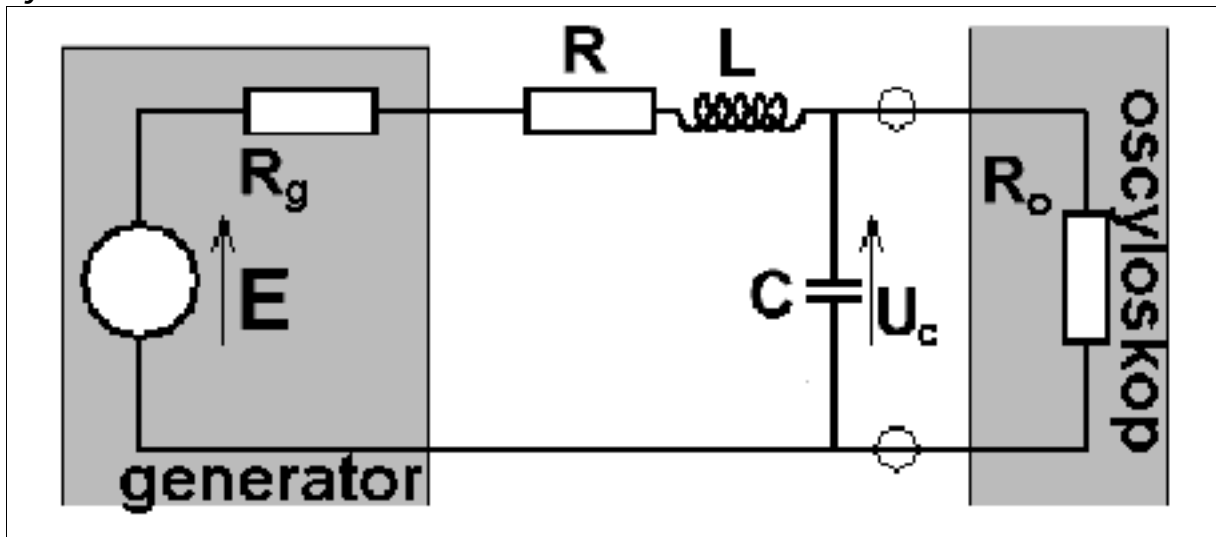
Celem tej pracy jest zbadanie własności układu oscylującego RLC dla dwóch różnych wartości rezystancji R.

Podstawy teoretyczne

Rozważmy obwód elektryczny, którego schemat znajduje się na rysunku 1. Oznaczmy przez:

- $U_c(t)$ - wartość napięcia na kondensatorze
- $U_{c_0} = U_c(t=0)$
- $L, \Delta L$ - odpowiednio: wartość indukcyjności cewki i błąd tej wartości
- $C, \Delta C$ - odpowiednio: wartość pojemności kondensatora i błąd tej wartości
- $R, \Delta R$ - odpowiednio: wartość oporu badanego opornika i błąd tej wartości
- R_g - wartość rezystancji wyjściowej generatora
- R_o - wartość rezystancji wejściowej oscyloskopu
- i - natężenie prądu

Rysunek 1



Jeśli założymy, że $R_o \gg R_g$ i $R_o \gg R$, oraz zanedbamy pasożytnicze wielkości charakteryzujące elementy obwodu, to prawdziwym z dość dobrym przybliżeniem stanie się wzór (1). Dla warunku określonego wzorem (2) rozwiązanie tego równania różniczkowego ma charakter oscylacyjny i wyraża się wzorem (3). Po przekształceniu tego wzoru otrzymujemy wzór (5) opisujący zmiany napięcia na kondensatorze w funkcji czasu i charakterystyki układu.

$$(1) \quad (R + R_g)i + L \frac{di}{dt} + \int idt = 0$$

$$(2) \quad (R + R_g)^2 < \frac{4L}{C}$$

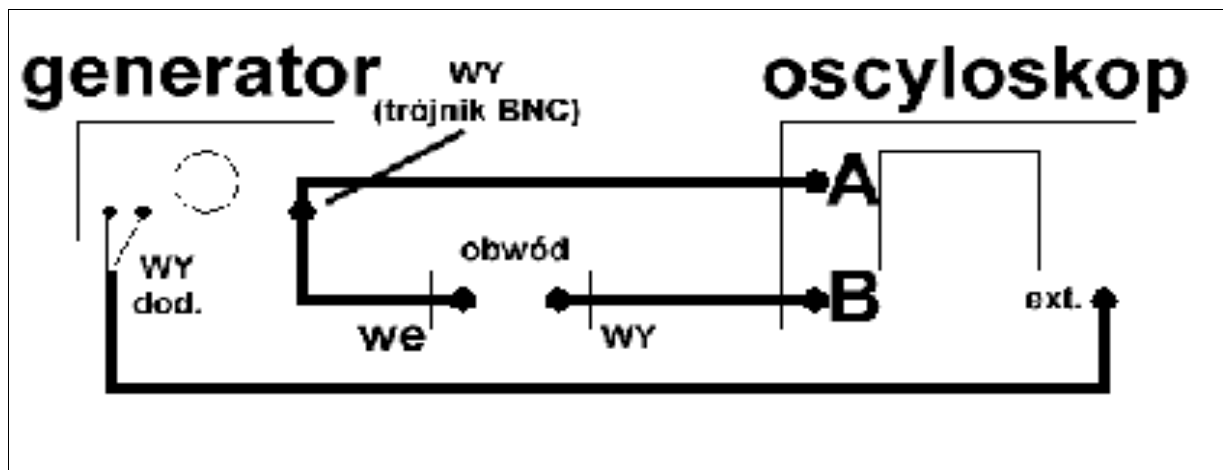
$$(3) \quad i(t) = \frac{U_{c_0}}{L\omega} \exp\left(-\frac{R + R_g}{2L}t\right) \sin(\omega * t) \quad \text{gdzie :} \quad (4) \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{(R + R_g)^2}{4L^2}}$$

$$(5) \quad U_c(t) = U_{c_0} \exp\left(-\frac{R + R_g}{2L}t\right) \cos(\omega * t)$$

Realizacja techniczna

Do przeprowadzenia doświadczenia użyłem dwóch oporników, jednego o rezystancji $R = (51 \pm 1) \Omega$, drugiego o rezystancji $R = (506 \pm 1) \Omega$ (wartości te zmierzyłem multimetrem cyfrowym). Ponadto użyłem też kondensatora i cewki, płytki montażowej, kilku przewodów, oraz generatora generującego sygnał prostokątny i oscyloskopu.

Doświadczenie rozpocząłem od pomiaru R obydwu oporników za pomocą multimetru cyfrowego, po czym zlutowałem obwód, zgodnie ze schematem zamieszczonym na rysunku 2. Następnie podałem z generatora na wejście obwodu sygnał prostokątny o amplitudzie 1 kHz. Po ustaleniu odpowiedniej skali na oscyloskopie dokonałem pomiaru kształtu pojedynczego ciągu oscylacji ze szczególnym uwzględnieniem punktów charakterystycznych krzywej. Po zakończeniu pomiarów wymieniłem opornik $R = (51 \pm 1) \Omega$ na $R = (506 \pm 1) \Omega$ i powtórzyłem doświadczenie.



Rysunek 2

Wyniki pomiarów

Poniżej znajdują się wyniki pomiarów zmierzonych wartości t , U , gdzie t było wyznaczone przez poziomą oś na ekranie oscylatora, a U przez oś pionową (przy czym w obydwu przypadkach oś U była ustawiona tak, aby w nieskończoności wykres napięcia na kondensatorze zbiegał do zera).

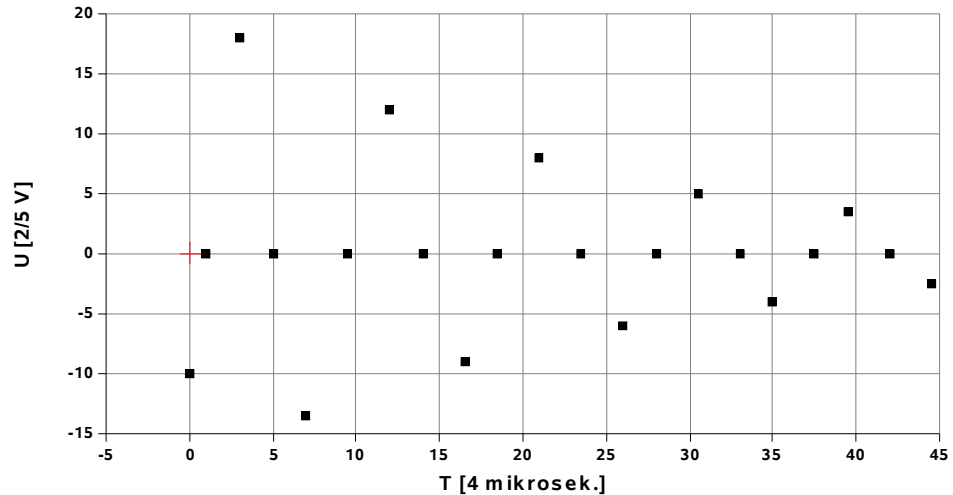
dla $R = (51 \pm 1) \Omega$				dla $R = (506 \pm 1) \Omega$			
t [$4\mu s$]	Δt [$4\mu s$]	U [2/5V]	ΔU [2/5V]	t [$2\mu s$]	Δt [$2\mu s$]	U [2/5V]	ΔU [2/5V]
0	0.2	-10	0.2	0	0.2	-10	0.2
1	0.2	0	0.2	2	0.2	0	0.2
3	0.2	18	0.2	5.5	0.2	9.5	0.2
5	0.2	0	0.2	10.5	0.2	0	0.2
7	0.2	-13.5	0.2	13.5	0.2	-3	0.2
9.5	0.2	0	0.2	18	0.2	0	0.2
12	0.2	12	0.2	22	0.2	2	0.2
14	0.2	0	0.2	28	0.2	0	0.2
16.5	0.2	-9	0.2				
18.5	0.2	0	0.2				
21	0.2	8	0.2				
23.5	0.2	0	0.2				
26	0.2	-6	0.2				
28	0.2	0	0.2				
30.5	0.2	5	0.2				
33	0.2	0	0.2				
35	0.2	-4	0.2				
37.5	0.2	0	0.2				
39.5	0.2	3.5	0.2				
42	0.2	0	0.2				
44.5	0.2	-2.5	0.2				

Dane te po naniesieniu na wykres prezentują się następująco:

Wykres 1

Badanie zależności U (T)

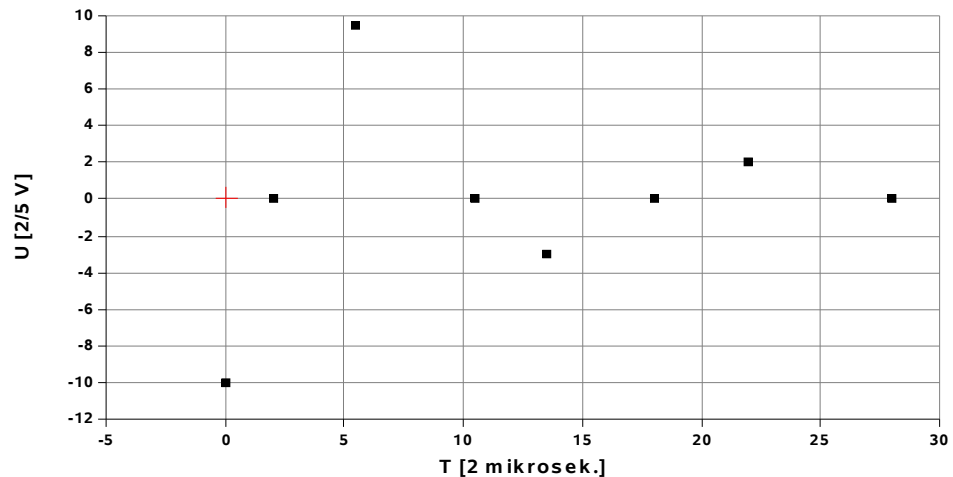
dla $R=(51\pm 1)\ \Omega$:



Wykres 2

Badanie zależności U (T)

dla $R=(506\pm 1)\ \Omega$:



Analiza wyników

Aby

dopasować do danych pomiarowych funkcję określoną wzorem (5) dokonałem następujących obliczeń:

- ω wyliczyłem wyliczając najpierw średni okres na podstawie ze średniej arytmetycznej podwojonych odległości czasowych pomiędzy punktami o $U = 0$ (czyli miejscami zerowymi), po czym skorzystałem z poniższych wzorów:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N}, \quad \Delta T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T - T_i)^2}{N - 1}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \Delta\omega = \left| \frac{\partial\omega}{\partial T} \right| = 2\pi \frac{\Delta T}{T^2}$$

- Aby znaleźć U_{c0} , oraz L przekształciłem wartości zarejestrowanych minimów i maksimów przekształceniem $U(t) \rightarrow \log(|U(t)|)$. Do otrzymanego w ten sposób zbioru punktów $[t, \log(|U(t)|)]$ dopasowałem prostą najmniejszych kwadratów o wzorze $y = a \cdot x + b$, gdzie $y = \log(|U(t)|)$, $x = t$, $a = -(R+Rg)/2L$, $b = \log(U_{c0})$. W tym celu skorzystałem z własnoręcznie napisanego programu analizy danych Panda¹ (dostępnego w internecie pod adresem <http://tempac.okwf.fuw.edu.pl/~rpkost>). Otrzymane w ten sposób wyniki przekształciłem zgodnie z położonymi na następnej stronie wzorami.

¹ z programu tego pochodzą również wszystkie wykresy zamieszczone w tej pracy

$$(6) \quad L = -\frac{R + Rg}{2a}$$

$$(7) \quad \Delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial (R + Rg)} \Delta(R + Rg)\right)^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{(\Delta(R + Rg))^2 + \left(\frac{(R + Rg)\Delta a}{a}\right)^2}$$

$$(8) \quad U_{C_0} = \exp(b)$$

$$(9) \quad \Delta U_{C_0} = \left| \frac{\partial U_{C_0}}{\partial b} \Delta b \right| = |\exp(b)\Delta b| = |U_{C_0}\Delta b|$$

W wyniku wyżej opisanego postępowania otrzymałem następujące wyniki:

$$\mathbf{R = (51 \pm 1) \Omega}$$

$$T = (2.2(7) \pm 0.15023130314) \mu\text{s}$$

$$\omega = (2.75846926676 \pm 0.18193540947) \text{ MHz}$$

przybliżenie zależnością liniową

Par pomiarów - 10

$$a = -0,011388275 [1/\mu\text{s}]$$

$$\Delta a = 0,000281955 [1/\mu\text{s}]$$

$$b = 2.99162$$

$$\Delta b = 0.030445$$

czyli:

$$U_{C_0} = 7.9671692 \text{ V}$$

$$\Delta U_{C_0} = 0.24256046629 \text{ V}$$

$$L = 0.00443438536565 \Omega \cdot \text{s}$$

$$\Delta L = 0.000118241531807 \Omega \cdot \text{s}$$

po zaokrągleniu:

$$U_{C_0} = 7.97 \text{ V}$$

$$\Delta U_{C_0} = 0.24 \text{ V}$$

$$L = 0.00433 \Omega \cdot \text{s} = 4.43 \text{ mH}$$

$$\Delta L = 0.00012 \Omega \cdot \text{s} = 0.12 \text{ mH}$$

$$\omega = (2.76 \pm 0.18) \text{ MHz}$$

Tak natomiast wyglądają wykresy dopasowania prostej najmniejszych

$$\mathbf{R = (506 \pm 1) \Omega}$$

$$T = (8.(6) \pm 1.39443337755) \mu\text{s}$$

$$\omega = (7.24982305275 \pm 0.11664686856) \text{ MHz}$$

przybliżenie zależnością liniową

Par pomiarów - 4

$$a = -0,04086905 [1/\mu\text{s}]$$

$$\Delta a = 0,00810505 [1/\mu\text{s}]$$

$$b = 2.42423$$

$$\Delta b = 0.213903$$

czyli:

$$U_{C_0} = 4.517412 \text{ V}$$

$$\Delta U_{C_0} = 0.96628797903 \text{ V}$$

$$L = 0.00680221341088 \Omega \cdot \text{s}$$

$$\Delta L = 0.00134905379579 \Omega \cdot \text{s}$$

po zaokrągleniu:

$$U_{C_0} = 4.52 \text{ V}$$

$$\Delta U_{C_0} = 0.97 \text{ V}$$

$$L = 0.0068 \Omega \cdot \text{s} = 6.8 \text{ mH}$$

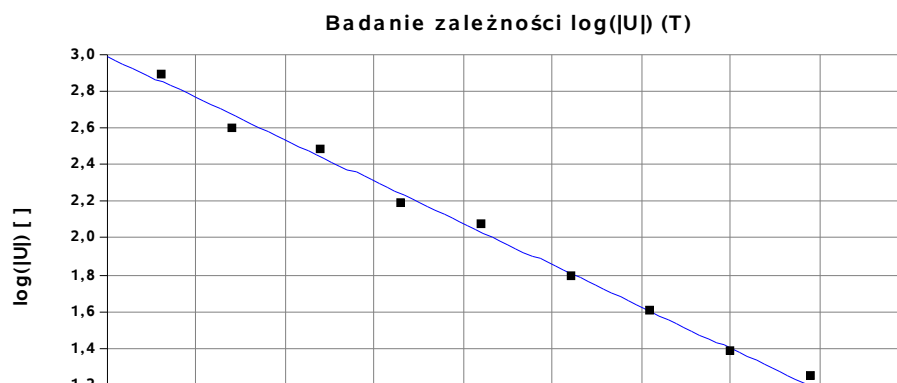
$$\Delta L = 0.0013 \Omega \cdot \text{s} = 1.3 \text{ mH}$$

$$\omega = (7.25 \pm 0.12) \text{ MHz}$$

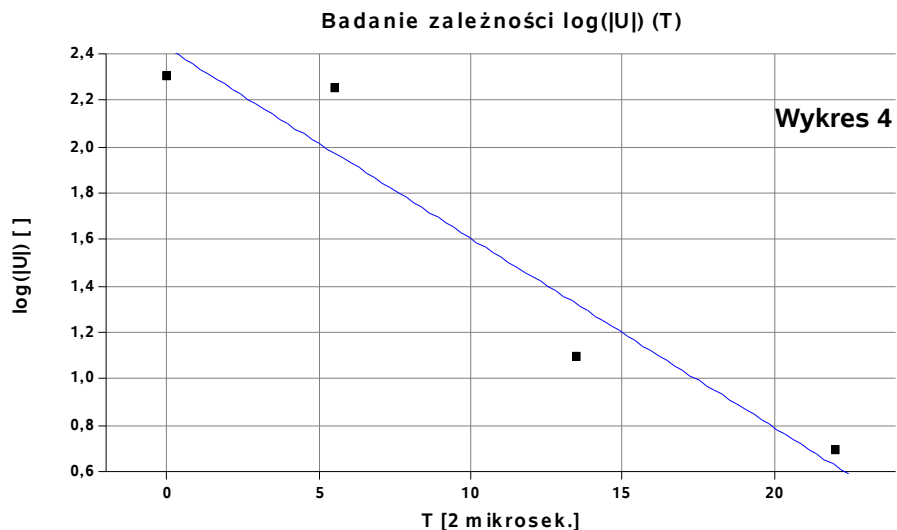
Wykres 3

kwadratów do logarytmu
modułów ekstremów
przebiegu funkcji $U_c(t)$:

dla $R=(51\pm 1)\ \Omega$:



dla $R=(506\pm 1)\ \Omega$:



Wykres 4

Wnioski i dyskusja wyniku

Otrzymane dwie różne wartości indukcyjności cewki są zgodne ze sobą w obliczu "testu 3σ ". Jest to wynik zadowalający. Jednakże już wartości U_{c0} dla obydwu oporników w obliczu "testu 3σ " nie są ze sobą zgodne. Najbardziej prawdopodobne wytłumaczenie tego faktu jest takie, iż po wymianie opornika zmieniła się także charakterystyka "pasożytnicza" obwodu, co spowodowało efekty "dyssypacji napięcia". Jeśli chodzi o różnicę w wartościach ω , to jest ona oczywista: wynika ona z różnych wartości R w obwodach (patrz: wzór (4)).

Ciekawostką jest fakt, szczególnie widoczny na wykresach 3 i 4, iż logarytmy modułów ekstremów mierzonych napięć układają się regularnie na przemian: raz poniżej prostej najmniejszych kwadratów, raz powyżej niej. Wydaje mi się, że wytłumaczenie tego faktu może być następujące: jeśli zróżniczkujemy funkcję $U_c(t)$, zapisaną zgodnie ze wzorem (5), to otrzymamy złożenie funkcji harmonicznych $\sin(\dots)$, oraz $\cos(\dots)$, tłumione gasnącą funkcją $\exp(\dots)^2$. Oscylacje wokół prostej najmniejszych kwadratów wynikają więc ze swoistych "dudnień" pochodnej funkcji $U_c(t)$. Potwierdza to ponadto fakt, iż wykonane (w celach przetestowania tej hipotezy) osobne wykresy dla samych minimum i samych maksimum znacznie lepiej dały się przybliżyć prostą najmniejszych kwadratów.

Nie zmienia to jednak faktu, iż wynik końcowy nie jest dokładny z powodu różnych czynników (poza dokładnością miernika) wprowadzających niepewność. Wśród najbardziej istotnych znajdują się:

- ◆ Na pewno i przede wszystkim bardzo mała liczba punktów pomiarowych. W przypadku $R=(506\pm 1)\ \Omega$ dopasowywanie prostej do czterech punktów pomiarowych zakrawa nawet na przerost formy nad treścią. Niestety jednak w tym przypadku mogę się jedynie ograniczyć do bezradnej kontemplacji tego faktu, bowiem zarówno silne tłumienie (jak widać na wykresie) drgań, jak i dokładność oscyloskopu nie pozwoliły mi na uzyskanie większej dokładności.
- ◆ Nieidealność zasilacza i oscyloskopu jako woltomierza: idealny woltomierz posiada nieskończony opór. W praktyce oczywiście tak nie jest. Idealny zasilacz podaje zawsze stałe napięcie niezależnie od obciążenia, sądzę, iż tak też nie było.

² podaję zapis ciał tych funkcji w notacji "(...)", bowiem w tym rozważaniu nie są one istotne

- ◆ Wzory użyte w tej pracy były wzorami przybliżonymi, bowiem nie uwzględniały zarówno pasożytniczego wpływu otoczenia na charakterystykę układu, jak i pasożytniczych cech samych elementów obwodu.
- ◆ Stosowane przeze mnie przewody łączące woltomierz i zasilacz z płytką montażową, a także same wtyki do tych przewodów mogły się także przyczynić do generacji błędów. Niepomijalny wpływ wniosła też zapewne pojemność, indukcja i rezystancja kabli.