Wyznaczanie wartości przyspieszenia ziemskiego

Ryszard Kostecki

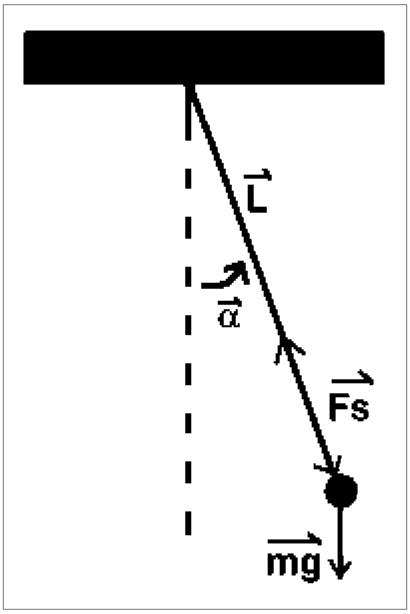
Warszawa, 17 grudnia 2000

Streszczenie

Celem tej pracy jest wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego w Warszawie (21°01'00" E, 52°13'15" N, 100m n.p.m.) przy użyciu wahadła matematycznego.

Podstawy teoretyczne

rysunek 1



Oznaczmy przez:

- L - długość nici
- g - wartość przyspieszenia ziemskiego
- m - masę ciała zawieszonego na nici (nazywanego dalej "ciężarkiem")
- α - kąt wychylenia ciężarka od pionu
- α_m - maksymalną wartość α (amplitudę wahań)
- T - okres wahań wahadła
- I - moment bezwładności ciężarka
- ω - częstość wahań
- Fs - siłę sprężystości
- MFs - moment siły Fs
- Mmg - moment siły mg
- ΔT - błąd pomiaru T
- ΔL - błąd pomiaru L
- Δg - błąd pomiaru g
- $\hat{g}$ - średnią wartość g
- $\Delta\hat{g}$ - błąd wyznaczonej wartości $\hat{g}$
- $\pi = 3{,}14159265358979 \pm 10^{14}$

Rozważmy siły działające na masę m (patrz: rysunek 1).
Można zauważyć, iż:

$$M_{Fs} = L \times Fs = 0$$

$$\vec{M}_{mg} = \vec{L} \times m\vec{g} = -Lmg \cdot \sin(\alpha)\frac{\vec{\alpha}}{\alpha}$$

Jeżeli α jest bliskie zeru, to można zastosować przybliżenie $\sin\alpha \approx \alpha$. Wtedy mamy: $M_{mg} = -mgL$

Wobec tego:

$$-mgL\alpha = -I\omega^2\alpha$$

$$mgL = mL^2\omega^2$$

$$g = \omega^2 L$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1)$$

przekształcając ten wzór mamy ostatecznie:

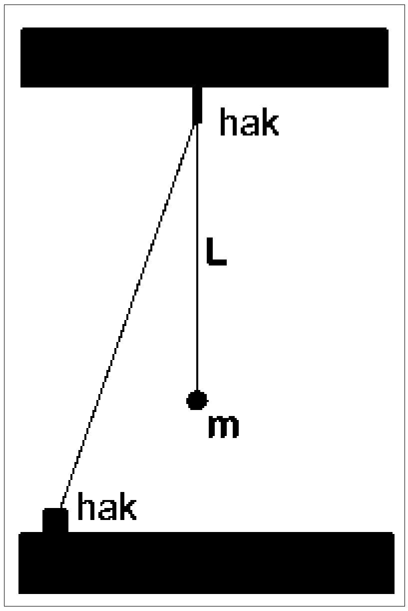
$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \qquad (2)$$

Realizacja techniczna

Do przeprowadzenia doświadczenia użyłem nitki, zawieszonej na niej ciężarka (o masie 100g ± 10g), linijki o dokładności 0.5 cm, zegarka ze stoperem Casio 71W, oraz dwóch haków przez które przewieszona została nitka. Schemat układu doświadczalnego znajduje się na rysunku 2.

Doświadczenie przeprowadziłem ustalając pewną długość nitki L, a następnie odchylając zawieszony na nitce ciężarek o pewien kąt (stały dla wszystkich pomiarów i równy 6° ± 1°) i puszczając go, mierząc czas potrzebny wahadłu na wykonanie pełnych 10 wahnięć (10, a nie 1, w celu zmniejszenia wpływu błędu wynikającego z opóźnienia czasu reakcji). Dla ustalonego L procedurę tę wykonywałem 20 razy. Doświadczenie przeprowadziłem dla pięciu różnych wartości L. Wyniki podane są poniżej w tabelach od 1 do 5 (przy czym w tabelach podałem już czasy T, a nie 10*T).

rysunek 2



Błąd pomiaru długości L przy pomocy linijki równy jest 0.5 cm, natomiast błąd pomiaru okresu T wynika głównie z opóźnienia pomiędzy zaobserwowaniem maksymalnego wychylenia, a wciśnięciem przycisku zatrzymującego stoper (dokładność samego stopera wynosi 0.01s). Błąd ten oszacowałem dla 10*T na 0.2s (opis tego oszacowania znajduje się w Dodatku A), a więc dla T wynosi on 0.02s.

Wyniki pomiarów

Poniżej znajdują się wyniki pomiarów zmierzonego okresu wahadła dla różnych wartości L. W tabeli, oprócz zmierzonych wartości T (czyli 10*T podzielonych już przez 10), znajdują się od razu wyliczone cząstkowe wartości g, oczywiście wyliczone na podstawie wzoru (2). Histogram otrzymanych w ten sposób 100 wartości g znajduje się za tabelami

tabela 1 dla L [m] = 2,015

T [s]	g [m/s^2]
2,843	9,841948039
2,843	9,841948039
2,841	9,855809936
2,824	9,974827695
2,857	9,745728454
2,85	9,793661
2,846	9,821209963
2,836	9,890593074
2,837	9,883621731
2,833	9,911551415
2,86	9,725293593
2,844	9,835028054
2,846	9,821209963
2,853	9,773075276
2,841	9,855809936
2,83	9,932576443
2,835	9,897571795
2,847	9,814311835
2,858	9,738909683
2,853	9,773075276

tabela 2 dla L [m] = 1,735

T [s]	g [m/s^2]
2,648	9,768395937
2,64	9,827688037
2,643	9,805390397
2,629	9,910100155
2,645	9,790567436
2,649	9,761022172
2,639	9,835137488
2,652	9,738950902
2,643	9,805390397
2,64	9,827688037
2,633	9,880012581
2,638	9,842595412
2,64	9,827688037
2,627	9,925195507
2,64	9,827688037
2,629	9,910100155
2,63	9,90256539
2,633	9,880012581
2,631	9,895039214
2,638	9,842595412

tabela 3 dla L [m] = 1,455

T [s]	g [m/s^2]
2,421	9,800159661
2,4	9,97241278
2,411	9,881623647
2,414	9,857078121
2,399	9,980728321
2,41	9,889825866
2,408	9,906260971
2,415	9,848916599
2,424	9,775916852
2,416	9,84076521

tabela 4 dla L [m] = 1,175

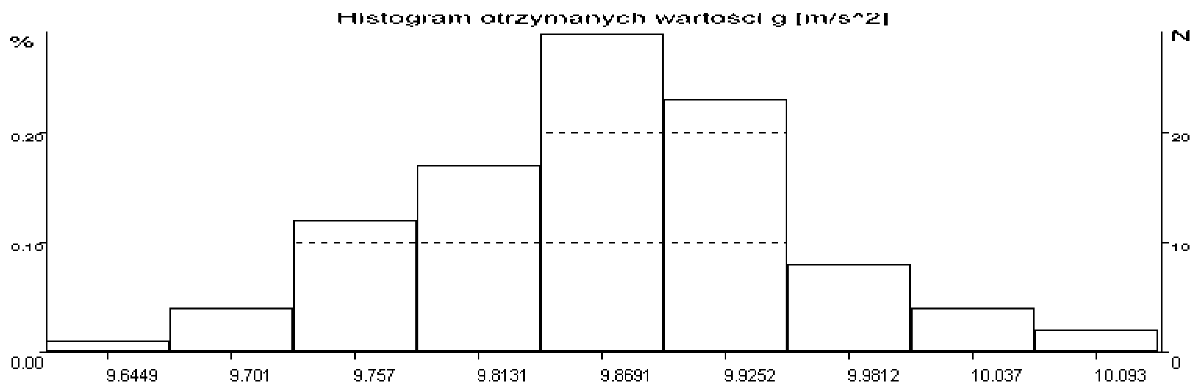
T [s]	g [m/s^2]
2,17	9,850950474
2,167	9,878244713
2,167	9,878244713
2,162	9,923987855
2,165	9,896503941
2,152	10,01643251
2,167	9,878244713
2,161	9,933174605
2,152	10,01643251
2,164	9,905652546

2,395	10,01409471	2,163	9,914813843
2,427	9,751763885	2,168	9,869134042
2,424	9,775916852	2,171	9,841877529
2,413	9,865249792	2,164	9,905652546
2,432	9,711707391	2,164	9,905652546
2,41	9,889825866	2,177	9,787702159
2,424	9,775916852	2,17	9,850950474
2,414	9,857078121	2,17	9,850950474
2,432	9,711707391	2,186	9,707273995
2,41	9,889825866	2,164	9,905652546

tabela 5 **dla L [m] = 0,895**

T [s]	g [m/s^2]	T [s]	g [m/s^2]
1,89	9,891431862	1,884	9,954534936
1,889	9,901907299	1,882	9,975703532
1,871	10,09334683	1,874	10,06105676
1,889	9,901907299	1,882	9,975703532
1,887	9,922908157	1,889	9,901907299
1,871	10,09334683	1,882	9,975703532
1,887	9,922908157	1,914	9,644926117
1,896	9,82892692	1,887	9,922908157
1,885	9,943975897	1,881	9,98631316
1,901	9,777290934	1,886	9,933433649

A tak wygląda histogram wynikowych wartości g ze wszystkich serii pomiarowych:



Dla każdej serii pomiarowej uśredniłem wartości T. Zrobiłem to średnią ważoną dyspersją, równą w tym przypadku średniej arytmetycznej, bowiem w obrębie jednej serii ΔT i ΔL (wynoszące, jak już ustaliliśmy: ΔT = 0.02s, ΔL = 0.5cm), wynikające z niedokładności przyrządów mierniczych, są stałe. Dzięki uśrednieniu wyników maleje znacznie ΔT (którego nową wartość wyliczam ze wzoru (6)). Opierając się na otrzymanych pięciu parach wartości (Tśr, ΔTśr), korzystając ze wzorów (3) i (4), wyznaczyłem pięć par g i Δg. Wyniki tych obliczeń zaprezentowane zostały w tabeli 6.

3) $$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

4) $$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial L}\Delta L\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8\pi^2 L\Delta T}{T^3}\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 \Delta L}{T^2}\right)^2} = 4\pi^2\sqrt{\left(\frac{2L\Delta T}{T^3}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{T^2}\right)^2}$$

tabela 6	**Tśr [s]**	**ΔTśr [s]**	**ĝ [m/s^2]**	**Δĝ [m/s^2]**
dla L = 2.015 m:	2,84385	0,004472136	9,836065587	0,039404614
dla L = 1.735 m:	2,63835	0,004472136	9,839984174	0,043782743
dla L = 1.455 m:	2,41495	0,004472136	9,849324435	0,049762472
dla L = 1.175 m:	2,1662	0,004472136	9,885542335	0,058614268
dla L = 0.895 m:	1,88635	0,004472136	9,929747823	0,07276043

po zaokrągleniu:

tabela 7	**Tśr [s]**	**ΔTśr [s]**	**ĝ [m/s^2]**	**Δĝ [m/s^2]**
dla L = 2.015 m:	2,8438	0,0045	9,836	0,039
dla L = 1.735 m:	2,6383	0,0045	9,840	0,044
dla L = 1.455 m:	2,4150	0,0045	9,849	0,050
dla L = 1.175 m:	2,1662	0,0045	9,886	0,059
dla L = 0.895 m:	1,8864	0,0045	9,930	0,073

Z wynikających z każdej serii wartości ĝ i Δĝ wyliczyłem g i Δg korzystając ze średniej ważonej dyspersją:

$$(5)\qquad g = \frac{\sum_i \frac{\hat{g}_i}{(\Delta\hat{g}_i)^2}}{\sum_i \frac{1}{(\Delta\hat{g}_i)^2}} \qquad\qquad (6)\qquad \Delta g = \left(\sum_i \frac{1}{(\Delta\hat{g}_i)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Otrzymujemy więc ostateczny wynik:

g = 9,855336406 m/s^2 Δg = 0,022089093 m/s^2

po zaokrągleniu:

g = 9,855 ± 0,022 m/s^2 Δg/g ≈ 0.22%

Wnioski i dyskusja wyniku

"Tablice fizyczno-astronomiczne" wydawnictwa Adamantan podają następujący wzór na przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi: $g = 9.780327*(1+0.0053024*\sin^2\varphi-0.0000058*\sin^2 2\varphi)-0.000003086*h$, gdzie φ oznacza szerokość geograficzną, a h - wysokość nad powierzchnią morza [m]. Po wstawieniu współrzędnych miejsca w którym przeprowadzałem eksperyment (φ = 52°13'15", h = 100m) otrzymuję:

> g = 9.780327*(1+ 0.0053024*0.7903*0.7903-0.0000058*0.9687*0.9687)-0.000003086*100 m/s^2
> g ≈ 9.812 m/s^2

Jak widać, wynik otrzymany w doświadczeniu przeprowadzonym przeze mnie jest zgodny w obliczu "testu 3σ" z wartością tablicową. Jest to wynik zadowalający.

Nie zmienia to jednak faktu, iż wynik końcowy nie jest dokładny z powodu całego szeregu czynników wprowadzających niepewność. Wśród zasługujących na dostrzeżenie znajdują się:

- Opory powietrza - powodujące ucieczkę energii z wahadła, przez co kolejne wahnięcia (a przecież liczyłem okres wahadła na podstawie średniej z dziesięciu wahnięć) miały mniejszą amplitudę, etc.

Jednakże po obliczeniu maksymalnej wartości siły oporu powietrza (patrz: Dodatek B) okazuje się, iż jest ona o 4 rzędy wielkości mniejsza od maksymalnej wartości składowej siły grawitacji stycznej do toru, a zmiana w przyspieszeniu jest rzędu 0.0176% otrzymanej wartości g.

- Przybliżenie małych drgań - wzór (1), na którym opiera się całe doświadczenie, jest jedynie wzorem przybliżonym. Bardziej dokładny wzór można znaleźć np. w tomie I "Wstępu do fizyki" A. K. Wróblewskiego i J. A. Zakrzewskiego. Ma o następującą postać:

tabela 8
wyniki pomiarów T_{10} [s]

0.24	0.13	0.25	0.29	0.29
0.07	0.26	0.27	0.34	0.13
0.18	0.09	0.27	-0.05	0.24
-0.10	0.15	0.18	0.36	0.33
-0.06	0.17	0.00	0.29	0.08
0.27	0.26	0.27	0.23	0.24
0.24	0.17	0.34	0.37	0.19
0.15	0.09	0.23	0.28	0.06
0.24	0.32	0.24	0.07	0.26
0.20	0.23	0.18	0.30	0.13

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot\left(1+\frac{\sin\left(\frac{\alpha_m}{2}\right)}{4}+\ldots\right) \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 L\cdot\left(1+\frac{\sin\left(\frac{\alpha_m}{2}\right)}{4}+\ldots\right)}{T^2}$$

- Poprawka wprowadzona przez ten wzór dla $\alpha_m = 6°$ wynosi 0.27%:

$$\left(1+\frac{\sin\left(\frac{\alpha_m}{2}\right)}{4}+\ldots\right) = 1+\sin^2(3°)+\ldots \approx 1+(0.0523)^2 = 1.00273529$$

- Błąd wprowadza również ciche założenie o tym, iż nić jest nieważka i nierozciągliwa, a ciało zwieszone na nici jest punktowe. Oczywiście założenia te są nieprawdziwe. Sądzę jednak, że zastosowana przezemnie metoda mierzenia wartości L wtedy, gdy jest obciążona, a także mierzenie L od punktu zaczepienia na haku do przewidywanego punktu środka masy ciężarka upoważnia do zmarginalizowania tej kwestii jako źródła błędu.
- Dodatkową (aczkolwiek dość mało znaczącą) niepewność do pomiaru wprowadza fakt, iż punkt zaczepu nitki (hak) nie był w rzeczywistości punktowy – a posiadając niezerowe wymiary zmieniał kąt wychylenia. Sądzę, że poprawka związana z tym faktem byłaby jednak rzędu 1‰, albo jeszcze mniejsza.

Na podstawie powyższych rozważań wydaje mi się uprawnionym stwierdzenie, iż największym źródłem błędu wynikającego z założeń analizy teoretycznej jest przybliżenie małych drgań. Natomiast nie należy zapominać, iż zarówno sam pomiar okresu T, jak i długości L był obarczony błędem wynikającym z niedokładności przyrządów i czasu reakcji obserwatora. Jeśli chodzi o ocenę, która niedokładność (ΔT czy ΔL) bardziej zaważyła na Δg, to trzeba spojrzeć na wzór:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial L}\Delta L\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8\pi^2 L\Delta T}{T^3}\right)^2+\left(\frac{4\pi^2\Delta L}{T^2}\right)^2} = 4\pi^2\sqrt{\left(\frac{2L\Delta T}{T^3}\right)^2+\left(\frac{\Delta L}{T^2}\right)^2}$$

Jeżeli ΔT bardziej wpłynęła na Δg, to prawdziwe byłoby:

$$\left(\frac{2L\Delta T}{T^3}\right)^2 > \left(\frac{\Delta L}{T^2}\right)^2 \Rightarrow \left|\frac{2L\Delta T}{T^3}\right| > \left|\frac{\Delta L}{T^2}\right| \Rightarrow \frac{2L\Delta T}{T^3} > \frac{\Delta L}{T^2} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} > \frac{\Delta L}{2L}$$

Sprawdźmy to poprzez podstawienie dwóch par najbardziej skrajnych wartości (L [m]; T [s]): (0.895; 1.8864) oraz (2.015; 2.8438). Jak widać, dla dużego L błąd pomiaru czasu wahań ma rzeczywiście większy wkład do Δg, natomiast dla małego L większy udział w Δg ma jednak ΔL.

$$\frac{0.0045}{2.8438} \approx 0.001582 > \frac{0.005}{2*2.015} \approx 0.001241$$

$$\frac{0.0045}{1.8864} \approx 0.002385 < \frac{0.005}{2*0.895} \approx 0.002793$$

Posumowanie

Powyższe doświadczenie potwierdziło prawdziwość przewidywań teoretycznych dotyczących wartości przyspieszenia ziemskiego w Warszawie.

Bibliografia

1. A.K. Wróblewski, J.A. Zakrzewski "Wstęp do fizyki", tom I, PWN, Warszawa 1984
2. "Tablice fizyczno-astronomiczne", Adamantan, Warszawa 1994
3. J.R. Taylor "Wstęp do analizy błędu pomiarowego", PWN, Warszawa 1995

Dodatek A - oszacowanie ΔT

W celu oszacowania błędu pomiaru czasu wynikającego z opóźnionej reakcji manualnej przeprowadzającego doświadczenie na bodźce wzrokowe zastosowałem metodę "trafienia" na stoperze w 10 sekund. Mówiąc inaczej: starałem się zatrzymać stoper dokładnie wtedy, gdy upływało na nim 10 sekund - traktując to jako odpowiednik sytuacji maksymalnego wychylenia wahadła. Wyniki otrzymane na stoperze były oczywiście w większości różne od 10 sekund. Wyniki te zostały zawarte w tabeli 8 (T_{10} oznacza różnicę czasu pokazywanego przez stoper po zatrzymaniu go i dziesięciu sekund). Po obliczeniu średniej arytmetycznej z 50 pomiarów T_{10} otrzymujemy średnie T_{10} = 0.1992s ≈ 0.20s. Taki też przyjąłem $\Delta(10*T)$. Wobec tego ΔT = 0.02s.

Dodatek B - oszacowanie wpływu oporu powietrza

Oznaczenia:

- V - maksymalna prędkość ciężarka
- η - współczynnik lepkości powietrza = 1.185*10^{-5} Pa*s
- ρ - gęstość powietrza = 1.185kg/m^3
- r - promień ciężarka = 0.01m
- Re - liczba Reynoldsa
- h - różnica pomiędzy długością rzutu L na pion w momencie maksymalnego wychylenia a długością L
- Fo - maksymalna siłą oporu powietrza
- C - współczynnik we wzorze Newtona: $F_o = \frac{C\rho S V^2}{2}$

Aby oszacować maksymalną siłę oporu powietrza muszę niestety przyjąć pewną wartość g (sic!), ale nie jest to bardzo istotne, bowiem Δg jest w tym zagadnieniu czymś na kształt małej wyższego rzędu...

$$\frac{L-h}{L} = \cos(\alpha_m) \Rightarrow h = L(1-\cos(\alpha_m))$$

$$\frac{mV^2}{2} = mgh$$

$$h \approx 2m*(1-\cos 6^\circ) = 2m*(1-0.9945) = 0.011m$$

$$V = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2*9.81*0.011}\frac{m}{s} \approx 0.46456\frac{m}{s}$$

Na podstawie tych obliczeń można już spróbować wyznaczyć błąd procentowy...

$$\mathrm{Re} = \frac{Vl\rho}{\eta} \approx \frac{0.46456*0.02*1.185}{1.185*10^{-5}} \approx 0.92912*10^3 \Rightarrow C \approx 0.45$$

$$F_o = \frac{CS\rho V^2}{2} \approx 0.0225\cdot 1.185\cdot(0.46456)^2\cdot 3.14159\cdot(0.01)^2 N \approx 1.81\cdot 10^{-5} N$$

$$(mg\sin\alpha)_{\max} \approx mg\sin(6^\circ) \approx 0.1\cdot 9.81\cdot 0.1045 N \approx 1.03\cdot 10^{-1} N$$

$$czyli: \quad \frac{F_o}{(mg\sin\alpha)_{\max}} \approx 1.76\cdot 10^{-4} = 0.0176\%$$