Ш. А. АЮПОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ имени В. И. РОМАНОВСКОГО

Ш. А. АЮПОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Ответственный редактор
академик АН УзССР *Т. А. Сарымсаков*

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
11	2-я снизу	i [,	i [a,
58	11-я сверху	(R_+.	R_+.
58	11-я сверху	инволютивным)	инволютивным (
66	3-я сверху	йорданов	йорданова
123	11-я снизу	IW-алгебра	JW-алгебра

К заказу 208

ТАШКЕНТ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» УЗБЕКСКОЙ ССР
1986

УДК 517.98

Аюпов Ш. А. **Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.** Ташкент: Фан, 1986. 124 с.

В монографии излагаются результаты по классификации слабо замкнутых йордановых алгебр самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве и их абстрактных обобщений—йордановых банаховых алгебр. Доказывается теорема о реализации абстрактных упорядоченных йордановых алгебр, общая теория которых была развита в монографии «Упорядоченные алгебры» (Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И., 1983 г.), рассматриваются некоторые вопросы теории меры на йордановых банаховых алгебрах.

Для специалистов по теории операторных алгебр, некоммутативному интегрированию и теории упорядоченных пространств.

Библиогр. 180.

Рецензенты:

член-корреспондент АН УзССР *Дж. Хаджиев*,
кандидат физ.-мат. наук *В. Н. Желябин*

А $\frac{1702030000-3420}{М355(04)-86}$ 59—87

ВВЕДЕНИЕ

Теория операторных алгебр является сравнительно новой и бурно развивающейся областью математики. Она возникла на стыке таких дисциплин, как функциональный анализ, алгебра, теоретическая и математическая физика. Настоящая книга посвящена исследованиям по теории йордановых алгебр ограниченных и неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

К началу 30-х годов были сформулированы математические основы квантовой механики, согласно которым наблюдаемой данной физической системе соответствует линейный самосопряженный оператор a, действующий в гильбертовом пространстве H, а всякому состоянию φ рассматриваемой системы соответствует матрица плотности ρ, действующая в H, причем среднее значение наблюдаемой a в состоянии φ вычисляется по правилу $\langle\varphi, a\rangle = \mathrm{Tr}(\rho a)$, где Tr — канонический след оператора в гильбертовом пространстве H. В дальнейшем были предложены различные алгебраические формулировки квантовомеханического формализма.

В 1932 г. фон Нейман указал, что симметризованное произведение $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ двух наблюдаемых a и b может быть также интерпретировано как наблюдаемая в силу равенства

$$a \circ b = \frac{1}{2}\left[(a + b)^2 - a^2 - b^2\right].$$

Это произведение удовлетворяет дистрибутивным законам

(i) $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$, $(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$,

(ii) $\lambda(a \circ b) = (\lambda a) \circ b = a \circ (\lambda b)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$

и коммутативно, т. е.

(iii) $a \circ b = b \circ a$.

В общем случае оно не ассоциативно, т. е. $(a \circ b) \circ c$ может быть отлично от $a \circ (b \circ c)$, однако удовлетворяет более слабому условию

(iv) $a^2 \circ (b \circ a) = (a^2 \circ b) \circ a$.

В 1933 г. Йордан предложил аксиоматику, согласно которой совокупность $\mathcal{U}$ квантовомеханических наблюдаемых должна характеризоваться алгебраическими аксиомами (i)—(iv). Алгебры над полем действительных чисел $\boldsymbol{R}$ (или другими полями), удовлетворяющие этим аксиомам, получили в дальнейшем название *йордановых алгебр*. Йордан, фон Нейман и Вигнер [87] классифицировали конечномерные йордановы алгебры над $\boldsymbol{R}$ с дополнительным свойством

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0,\ a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{U}$$

(формально вещественные йордановы алгебры). Эти алгебры разлагаются в прямую сумму простых, которые за одним исключением являются алгебрами самосопряженных операторов в конечномерном гильбертовом пространстве. Исключительной является йорданова алгебра M_3^8 эрмитовых 3×3 матриц над числами Кэли.

Несмотря на дальнейшие исследования фон Неймана [146] по бесконечномерным йордановым алгебрам (см. также [124]), алгебраический подход к квантовой механике развивался преимущественно на W^*-алгебрах, введенных в работах Мюрэя и фон Неймана [103—105, 147], а также на C^*-алгебрах, введенных Гельфандом и Наймарком (см. [75, 106]). W^*-алгебры (C^*-алгебры) — это слабо (соответственно равномерно) замкнутые комплексные $*$-алгебры операторов в гильбертовом пространстве. W^*-алгебры получили также название алгебр фон Неймана. Обычное ассоциативное произведение двух самосопряженных операторов не является, вообще говоря, самосопряженным оператором и ему, в отличие от йорданова произведения, трудно придать какой-либо физический смысл [173]. Поэтому рассмотрение W^*- и C^*-алгебр вызвано не столько физическими соображениями, сколько техническими. В настоящее время теория C^*- и W^*-алгебр — глубоко развитая теория с многочисленными приложениями [59, 74, 75, 116, 133, 134, 137].

В то же время теория йордановых алгебр оставалась предметом исследования чистых алгебраистов (см. монографии [61, 68, 76]). Только в середине 60-х годов в работах Топпинга [138] и Штермера [158—161] впервые были рассмотрены йордановы аналоги W^*-алгебр (C^*-алгебр) — JW-алгебры (JC-алгебры), т. е. слабо (равномерно) замкнутые йордановы алгебры ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Следует отметить, что идея существования такой теории содержалась, по существу, в упомянутой статье фон Неймана [146]. Эмх отметил: «К сожалению, хотя в заголовке статьи фон Неймана и стояло «Часть I», что свидетельствовало о намерении автора опубликовать продолжение, «Часть II» так и не увидела света, и у нас нет ни классификации, ни теории представлений, сравнимых с теми, которыми мы располагаем в случае, когда алгебра $\mathcal{U}$ обладает конечным линейным базисом» [173, с. 72].

Бурное развитие теория йордановых операторных алгебр получила после появления работы Альфсена, Шульца и Штермера [11], в которой была доказана теорема Гельфанда — Наймарка для йордановых банаховых алгебр (JB-алгебр), а также статьи Шульца [166], который ввел йорданов аналог W^*-алгебр — JBW-

алгебры. В настоящее время эта теория продолжает развиваться и находит приложения в самой теории операторных алгебр, теории однородных самодуальных конусов в гильбертовом пространстве [81] и математических основаниях квантовой теории [59]. Кроме того, обнаружились интересные приложения йордановых банаховых алгебр в теории функций многих (конечного [94] и бесконечного [60, 93] числа) комплексных переменных. Хорошим введением в теорию йордановых банаховых алгебр является вышедшая недавно книга Ханке — Ольсена и Штермера «Йордановы операторные алгебры» [155]. Другой аспект этой теории и ее обобщение (теория упорядоченных йордановых алгебр) были развиты в главе III монографии «Упорядоченные алгебры» [121].

Предлагаемая книга является в некотором смысле логическим продолжением этих двух монографий, хотя автор пытался давать замкнутое изложение материала. От читателя требуется знание некоторых разделов теории йордановых алгебр (в чисто алгебраическом аспекте [68, 76]) и основ теории W^*-алгебр (см., например, [137]). Компактное изложение необходимого алгебраического материала дано в книге [155]. Исключением являются §§ 4, 5 гл. II, которые требуют более глубоких сведений из модулярной теории W^*-алгебр [133]. Кроме того, в последней главе предполагается знакомство с основами теории некоммутативного интегрирования [125].

В первой главе излагаются основные свойства йордановых алгебр самосопряженных операторов и йордановых банаховых алгебр (JW- и JBW-алгебр). Получена их классификацчя по типам I, II_1, II_∞ и III, основанная на модулярных свойствах решетки идемпотентов (проекторов). При этом оказывается, что чисто исключительные JBW-алгебры имеют тип I_3; таким образом, с точки зрения классификации наибольший интерес представляют специальные JBW-алгебры, т. е. JW-алгебры. Вводится понятие следа на JBW-алгебре и исследуется вопрос о продолжении следа на JW-алгебре A до следа на обертывающей W^*-алгебре $\mathcal{U}(A)$. Найдены критерии типов JBW-алгебр в терминах существования конечных и полуконечных нормальных следов.

Вторая глава посвящена описанию с точностью до изоморфизма JBW-факторов. Для этой цели предварительно выявлена полная взаимосвязь между типом JW-алгебры A и типом ее обертывающей W^*-алгебры $\mathcal{U}(A)$. Показано, что проблема классификации с точностью до изоморфизма JW-факторов сводится к классификации W^*-факторов и их инволютивных *-антиавтоморфизмов (с точностью до сопряженности). Эта проблема полностью решена для JBW-факторов типа I. Кроме того, используя глубокие результаты, полученные Джиордано [70, 71], мы даем решение этой проблемы для случая инъективных JW-факторов типа II_1, II_∞ и III и приводим явную конструкцию всех перечисленных JBW-факторов.

В третьей главе результаты предыдущих глав использованы для изучения йордановых алгебр неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Вводятся понятия измеримых и локально измеримых самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, присоединенных к JW-алгебре, и доказывается, что они образуют упорядоченную йорданову алгебру (OJ-алгебру) в смысле монографии [121]. Основным результатом главы является теорема о реализации абстрактной OJ-алгебры в виде суммы OJ-алгебры локально измеримых самосопряженных операторов, присоединенных к JW-алгебре, и OJ-алгебры неограниченных отображений гиперстоуновского компакта в исключительную алгебру M_3^8. Этот результат является неограниченным вариантом теоремы Гельфанда — Наймарка для йордановых алгебр [11, 166].

Наконец, последняя глава посвящена приложениям к теории неассоциативного интегрирования. Здесь исследуются веса и следы на JBW-алгебрах. Доказан аналог теоремы Хаагерупа [150] о характеризации нормальных весов на W^*-алгебрах. Для JBW-алгебр с точным нормальным полуконечным следом построена теория интегрирования по Сигалу [125], определены и реализованы неограниченными самосопряженными операторами пространства $L_p (p \geqslant 1)$ и доказана теорема о двойственности: $L_p = (L_q)^*$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Получены различные варианты теоремы Радона—Никодима для весов и состояний на JBW-алгебрах.

После каждой главы даны комментарии, в которых приведены библиографические справки и дальнейшие результаты, относящиеся к рассматриваемому кругу проблем.

Нумерация теорем и предложений в каждой главе самостоятельная: первая цифра означает номер параграфа, вторая — номер теоремы или предложения. При ссылках на теоремы или предложения из других глав указывается также номер главы.

Автор выражает глубокую признательность академику АН УзССР Т. А. Сарымсакову за внимание и полезные советы в процессе подготовки книги.

ГЛАВА I

ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Предварительные сведения о йордановых банаховых алгебрах

Всюду через $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{H}$ обозначаются соответственно поля действительных, комплексных чисел и тело кватернионов. Кроме того, в дальнейшем будем рассматривать йордановы алгебры только над полем $\boldsymbol{R}$.

Определение. Йорданова алгебра с единицей называется йордановой банаховой алгеброй или *JB*-алгеброй, если на ней задана норма, относительно которой A является банаховым пространством и удовлетворяет условиям

$$\text{(i) } \|a^2\| = \|a\|^2; \quad \text{(ii) } \|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\|$$

для всех $a, b \in A$.

Определение. Пространством с порядковой единицей называется упорядоченное нормированное пространство с порядковой единицей $\mathbf{1}$, порядок на котором архимедов (т. е. из $na \leqslant \mathbf{1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ вытекает, что $a \leqslant 0$), и норма удовлетворяет условию

$$\|a\| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{1}\} \tag{1}$$

(напомним, что порядковой единицей в упорядоченном векторном пространстве A называется такой положительный элемент $\mathbf{1}$, что для любого $a \in A$: $-\lambda\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \lambda\mathbf{1}$ при некотором $\lambda > 0$).

Имеет место следующий результат.

Теорема 1.1. Если A—*JB*-алгебра, то множество $A^+ = A^2$ всех квадратов элементов A является правильным выпуклым конусом, превращающим A в полное (в смысле нормы) пространство с порядковой единицей относительно исходной *JB*-нормы, в котором порядковой единицей является мультипликативная единица; при этом

$$\text{если } -\mathbf{1} \leqslant a \leqslant \mathbf{1}, \text{ то } 0 \leqslant a^2 \leqslant \mathbf{1}. \tag{2}$$

Обратно, если A — полное пространство с порядковой единицей и введенным на нем йордановым умножением, для которого мультипликативной единицей является исходная порядковая единица, и выполнено условие (2), то A является *JB*-алгеброй относительно нормы (1).

Рассмотрим некоторые примеры и свойства *JB*-алгебр.

Пример 1. Пусть A — замкнутое по норме (оператора) линейное подпространство самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве; A называется *JC*-алгеброй, если оно замкнуто относительно йорданова произведения $a \circ b = 1/2(ab+ba)$ операторов из A. Легко видеть, что всякая JC-алгебра и, в частности, эрмитова часть C^*-алгебры являются специальными JB-алгебрами.

Пример 2. Через M_3^8 обозначим простую 27-мерную исключительную йорданову алгебру эрмитовых 3×3 матриц над октавами (числами Кэли). Тогда в M_3^8 можно задать норму, относительно которой она является JB-алгеброй.

Следующий результат содержит, в частности, описание всех ассоциативных JB-алгебр.

Теорема 1.2. Всякая замкнутая по норме ассоциативная подалгебра JB-алгебры, содержащая единицу, изометрически, порядково и алгебраически изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных действительных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве X.

Если JB-алгебры являются йордановыми аналогами C^*-алгебр, то алгебрам фон Неймана (W^*-алгебрам) соответствуют JBW-алгебры.

Определение. JB-алгебра A называется JBW-алгеброй, если она обладает предсопряженным пространством, т. е. существует банахово пространство N, такое, что A изометрически изоморфна пространству N^*, топологически сопряженному к N.

Положительный линейный функционал ρ на JB-алгебре A называется состоянием, если $\rho(1) = 1$. Линейный функционал φ называется нормальным, если для любой сети $\{x_\alpha\} \subset A$, монотонно убывающей к нулю, $\varphi(x_\alpha) \to 0$. Говорят, что JB-алгебра A обладает разделяющим семейством нормальных состояний, если для любого $a \in A^+$, $a \neq 0$ существует нормальное состояние ρ на A, такое, что $\rho(a) > 0$.

JB-алгебра A называется монотонно полной, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}$ в A существует точная верхняя грань $x = \sup x_\alpha$.

Теорема 1.3. JB-алгебра A обладает предсопряженным пространством (т. е. является JBW-алгеброй) тогда и только тогда, когда она монотонно полна и имеет разделяющее семейство нормальных состояний. Если эти условия выполнены, то предсопряженное пространство к A единственно и может быть отождествлено с пространством N всех нормальных линейных функционалов на A (в естественной двойственности между A и $N \subset A^*$).

Пример 3. Всякая JW-алгебра, т. е. JC-алгебра, замкнутая в слабой (операторной) топологии, является примером специальной JBW-алгебры. В частности, эрмитова часть алгебры фон Неймана является JBW-алгеброй.

Пример 4. Всякая конечномерная JB-алгебра и, в частности, исключительная алгебра M_3^8 является JBW-алгеброй.

Из теоремы 1.3 вытекает следующий результат.

Следствие. Пусть A—JC-алгебра. Следуюшие условия эквивалентны:

1) A — монотонно полна и обладает разделяющим семейством нормальных состояний;

2) A обладает предсопряженным пространством;

3) A имеет точное представление как слабо замкнутая йорданова алгебра самосопряженных операторов (JW-алгебра).

Последние результаты показывают, что если JW-алгебры являются йордановыми аналогами алгебр фон Неймана как операторных алгебр, то JBW-алгебры являются их абстрактными аналогами (точнее аналогами W^*-алгебр). Такое же замечание относится и к связи между JC-, JB- и C^*-алгебрами. Существенное различие здесь привносит наличие исключительной алгебры M_3^8, которую не удается выделить при помощи разумных алгебраических аксиом. Однако следующий результат показывает, что примером M_3^8, по существу, исчерпываются исключительные JBW-алгебры и исключительная часть произвольной JBW-алгебры «хорошо» отделяется.

Теорема 1.4. Всякая JBW-алгебра A допускает единственное разложение $A = A_{sp} + A_{ex}$, такое, что алгебра A_{sp} специальна и изоморфна JW-алгебре, а алгебра A_{ex} исключительна и изоморфна алгебре $C\left(X, M_3^8\right)$ всех непрерывных отображений некоторого гиперстоуновского компакта X в M_3^8. Обратно, для любого гиперстоуновского компакта X алгебра $C\left(X, M_3^8\right)$ является JBW-алгеброй.

Напомним, что компактное хаусдорфово пространство называется *гиперстоуновским*, если алгебра $C(X)$ всех непрерывных функций на X обладает предсопряженным пространством. Заметим, что в силу конечномерности M_3^8 слагаемое A_{ex} изоморфно пространству $L^\infty\left(\Omega, \mu, M_3^8\right)$, где μ — мера Радона на локально компактном пространстве Ω.

Наряду с топологией нормы на JBW-алгебрах можно рассматривать и другие топологии. *Слабой* топологией на JBW-алгебре A назовем топологию $\sigma(A, N)$ поточечной сходимости на элементах предсопряженного пространства N; *сильной* — локально-выпуклую топологию на A, порожденную семейством преднорм $\rho(a^2)^{1/2}$, $\rho \in K$, где K — множество всех нормальных состояний на A. Имеет место следующий результат.

Теорема 1.5. Для монотонных сетей в JBW-алгебре A понятия порядковой, сильной и слабой сходимости совпадают. Умножение в A слабо непрерывно по каждой переменной раздельно и сильно непрерывно по совокупности переменных на ограниченных по норме подмножествах из A.

Пусть A — JBW-алгебра, $\mathcal{P}_A = \{e \in A;\ e^2 = e\}$ — решетка всех идемпотентов (проекторов) из A. Семейство $\{e_\lambda,\ \lambda \in \mathbf{R}\} \subset \mathcal{P}_A$ называется спектральным семейством в A, если

а) $e_\lambda \leqslant e_\mu$ при $\lambda \leqslant \mu$, λ, $\mu \in \mathbf{R}$;

б) $\inf e_\lambda = 0$, $\sup e_\lambda = \mathbf{1}$;

в) $\sup\{e_\lambda,\ \lambda < \mu\} = e_\mu$ для всех $\mu \in \mathbf{R}$.

Спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ назовем ограниченным, если существует $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+$, такое, что $e_\lambda = \mathbf{1}$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$, $e_\lambda = 0$ при $\lambda \leqslant -\lambda_0$.

Теорема 1.6 (спектральная теорема). Для любого элемента a JBW-алгебры A существует единственное спектральное семейство $\{e_\lambda\}$, ограниченное с $\lambda_0 = \|a\|$, такое, что для любого нормального состояния ω на A и $n = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство $\omega(a^n) = \int \lambda^n d\omega(e_\lambda)$. При этом $e_\lambda \in A(a)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$, где $A(a)$ — JBW-подалгебра A, порожденная элементами a и $\mathbf{1}$. Суммы Стилтьеса $\sum\limits_{l=1}^{m} \lambda_l \left(e_{\lambda_l} - e_{\lambda_{l-1}}\right)$ по норме сходятся к a, когда радиус разбиения $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m$ отрезка $[-\|a\|, \|a\|]$ стремится к нулю.

Утверждение теоремы 1.6 записывается как $a = \int \lambda de_\lambda$. С помощью спектральной теоремы определяется ограниченная борелевская функция φ от элемента $a \in A$ равенством $\varphi(a) = \int \varphi(\lambda)\, de_\lambda$.

Пусть a, b — элементы JBW-алгебры A, $\{e_\lambda\}$ и $\{f_\mu\}$ — соответственно их спектральные семейства.

Предложение 1.7. Следующие условия эквивалентны:

(i) a и b операторно коммутируют, т. е. $a \circ (c \circ b) = (a \circ c) \circ b$ для всех $c \in A$;

(ii) $a \circ (a \circ b) = a^2 \circ b$;

(iii) йорданова подалгебра $J(a, b)$, порожденная элементами a и b, ассоциативна;

(iv) a операторно коммутирует со всеми f_μ;

(v) b операторно коммутирует со всеми e_λ;

(vi) все пары e_λ, f_μ операторно коммутируют.

При выполнении этих условий будем говорить, что элементы a и b совместны и обозначим $a \leftrightarrow b$. Множество $Z_A = \{a \in A : a \leftrightarrow b\ \forall\ b \in A\}$ элементов JBW-алгебры A, совместных со всеми элементами из A, называется центром A. Если $Z_A = \{\lambda\mathbf{1},\ \lambda \in \mathbf{R}\}$, то A называется JBW-фактором.

В теории йордановых алгебр важную роль играет оператор U_a, определенный для любого элемента $a \in A$ как $U_a x = 2a \circ (a \circ x) - a^2 \circ x$. В случае специальных йордановых алгебр

$U_a x = axa$. „Хорошими" свойствами оператора U_a на JBW-алгебре A являются его положительность $\left(\text{т. е. } U_a(A^+) \subset A^+\right)$ и нормальность $\left(\text{т. е. если } x_\alpha \uparrow x, \text{ то } U_a x_\alpha \uparrow U_a x\right)$ для любого $a \in A$. В частности, если s — симметрия (т. е. $s^2 = 1$), то U_s является йордановым автоморфизмом. Нетрудно показать, что для JBW-алгебры A $Z_A = \{a \in A : U_s a = a$ для любой симметрии $s \in A\}$.

§ 2. JW-алгебры и их разложение по типам

Всюду далее H означает комплексное гильбертово пространство, $B(H)$ — алгебру всех ограниченных линейных операторов в H. Напомним, что JW-алгебра — это вещественное линейное пространство самосопряженных операторов из $B(H)$, которое замкнуто относительно йорданова умножения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, и замкнуто в слабой операторной топологии. В частности, всякая JW-алгебра замкнута относительно операции $aba = U_a b$.

В силу слабой замкнутости JW-алгебры A вместе с каждым самосопряженным оператором $a \in A$ она содержит все его спектральные проекторы $\{e_\lambda\}$. Кроме того, A содержит наибольший проектор. Поэтому в дальнейшем, не ограничивая общности, можно считать, что этим проектором является единичный оператор $\mathbf{1}$ в $B(H)$.

Предложение 2.1. Пусть A—JW-алгебра. Тогда все условия (i)—(vi) предложения 1.7 означают, что операторы a и b коммутируют.

Доказательство. В силу предложения 1.7 достаточно показать эквивалентность двух условий: 1) $ab = ba$; 2) $a \circ (a \circ b) = a^2 \circ b$. Нетрудно проверить, что для любых $a, b, c \in A$ имеет место тождество

$$a \circ (c \circ b) - (a \circ c) \circ b = 1/4\,[c, [a, b]],$$

где $[x, y] = xy - yx$ — коммутатор операторов x и y. Отсюда очевидно, вытекает импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Обратно, пусть $a \circ (a \circ b) - a^2 \circ b = 0$. Покажем, что $[a, b] = 0$. Сначала предположим, что a — проектор, т. е. $a^2 = a$. Положим $d = [a, b]$. В силу приведенного выше тождества $[a, [a, b]] = 0$, т. е. $ab - 2aba + ba = 0$. Учитывая, что $ab = d + ba$, получаем $d - 2da = 0$. Умножая это выражение справа на a, получаем $da = 0$, т. е. $d = 0$.

Теперь пусть a — произвольный оператор из A, $d = [a, b]$. Так как d — косоэрмитов элемент, т. е. $d^* = -d$, то id — самосопряженный оператор в $B(H)$, причем по условию $[a, id] = i\,[,\ d] = 0$. Если $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство оператора a, то в силу спектральной теоремы $[e_\lambda, id]=0$ для всех λ, т.е. $[e_\lambda, [a, b]]=0$. Из тождества Якоби

$$[[a, b], e_\lambda]+[[b, e_\lambda], a]+[[e_\lambda, a], b]=0$$

и спектральной теоремы имеем, что $[[b, e_\lambda], a]=0$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$. Отсюда, рассуждая как и выше, получим, что $[[b, e_\lambda], e_\lambda]=0$ для всех λ. Так как e_λ — проектор, то из первой части доказательства вытекает, что $[b, e_\lambda]=0$ для всех λ. В силу спектральной теоремы $[b, a]=0$. Предложение доказано.

Из этого предложения вытекает, что JW-алгебра A ассоциативна тогда и только тогда, когда все операторы в ней коммутируют. Поэтому такие JW-алгебры будем называть **абелевыми**. В частности, центр Z_A JW-алгебры A совпадает с множеством операторов из A, коммутирующих со всеми элементами A. Для любого элемента $a \in A$ существует наименьший центральный проектор $e \in A$, такой, что $ea=a$; он называется **центральным носителем** a и обозначается $C(a)$. Если $C(a)=1$, то элемент a называется **точным**. Проектор $e \in A$ называется абелевым, если eAe — абелева JW-алгебра.

Определение. Говорят, что JW-алгебра A имеет **тип I**, если в ней существует точный абелев проектор.

Другими словами, A имеет тип I, если каждое прямое слагаемое (при разложении по центру) содержит абелев проектор. Отсюда видно, что прямая сумма JW-алгебр типа I также имеет тип I. В частности, взяв точную верхнюю грань всех центральных проекторов, минорируемых абелевыми проекторами, получим следующий результат.

Теорема 2.2. В произвольной JW-алгебре A существует центральный проектор e, такой, что eAe имеет тип I, $(1-e)A(1-e)$ не содержит ненулевых абелевых проекторов. Этот проектор единственен и является наибольшим среди центральных проекторов f, таких, что fAf имеет тип I.

Пусть e, f — проекторы из JW-алгебры A. Говорят, что e и f **связаны через симметрию**, если существует такая симметрия (самосопряженный унитарный оператор) s, что $ses=f$. Это отношение, очевидно, рефлексивно, симметрично, но вообще говоря, не транзитивно. Проекторы e и f называются **эквивалентными**, если существует конечное число симметрий $s_1, \dots, s_n \in A$, таких, что $u^*eu=f$, где $u=s_1 s_2 \dots s_n$. Таким образом, это отношение эквивалентности является аналогом унитарной эквивалентности в W^*-алгебрах. Как и в случае W^*-алгебр, имеет место следующая теорема о сравнении.

Теорема 2.3. Для любых проекторов e и f в JW-алгебре A существуют центральный проектор $h \in A$ и симметрия $s \in A$, такие, что $s(eh)s \leqslant fh$, $s(f(1-h))s \leqslant e(1-h)$. В частности, если A — JW-фактор, то либо $ses \leqslant f$, либо $ses \geqslant f$ для некоторой симметрии $s \in A$.

Пусть L — решетка всех проекторов JW-алгебры A. L называется модулярной решеткой, если $(e \vee f) \wedge g = e \vee (f \wedge g)$ для всех $e, f, g \in L$, таких, что $e \leqslant g$. Проектор $e \in A$ называется модулярным, если $[0, e] = \{f \in L : f \leqslant e\}$ является модулярной решеткой. Из общей теории решеток [89] известно, что в этом случае $[0, e]$ есть непрерывная геометрия в смысле фон Неймана. Используя это замечание и классические результаты фон Неймана [148], можно доказать следующий результат, содержащий эквивалентное определение модулярности проектора

Предложение 2.4. Проектор e в JW-алгебре модулярен тогда и только тогда, когда всякое ортогональное семейство проекторов $\{e_i\}$, $e_i < e$, любые два из которых связаны через симметрию, конечно.

Предложение 2.5. (i) Пусть $\{e_i\}$ — семейство модулярных проекторов в JW-алгебре A с ортогональными центральными носителями. Тогда проектор $e = \sup e_i$ модулярен.

(ii) Точная верхняя грань любого семейства центральных модулярных проекторов является модулярным проектором.

Доказательство. (i) Так как все $C(e_i)$ ортогональны и операция перехода к центральному носителю сохраняет точные верхние грани, то решетка $[0, C(e)]$ является прямым произведением решеток $[0, C(e_i)]$. Значит, $[0, e]$ — прямое произведение модулярных решеток $[0, e_i]$ и, следовательно, $[0, e]$ — модулярная решетка.

(ii) Пусть $\{e_i\}$ — произвольное семейство модулярных центральных проекторов в A, $e = \sup e_i$. Среди всевозможных семейств центральных подпроекторов в e_i (по всем i) выберем максимальное ортогональное семейство $\{f_k\}$ и положим $f = \sup f_k$. Тогда $f = e$, так как в противном случае $e - f$ является центральным проектором и $(e - f) e_i \neq 0$ для некоторого e_i, что противоречит максимальности семейства $\{f_k\}$. Так как все f_k центральны и модулярны, то в силу (i) e есть модулярный проектор.

Подмножество I в решетке проекторов L называется минорантным, если для любого $0 \neq e \in L$ существует $f \in I$, такой, что $0 \neq f \leqslant e$. По лемме Цорна в этом случае всякий элемент $e \in L$ является точной верхней гранью ортогонального семейства проекторов из I. Напомним также, что идеал в L — это подмножество $I \subset L$, такое, что (i) $e \vee f \in I$ для всех $e, f \in I$; (ii) если $e \in I$, $f < e$, то $f \in I$. Модулярным идеалом в L называется идеал, который как подрешетка L является модулярной решеткой. Наконец, p-идеал — это идеал $I \subset L$, такой, что если $e \in I$ и $f \sim e$, то $f \in I$.

Предложение 2.6. Множество всех модулярных проекторов в произвольной JW-алгебре образует модулярный p-идеал.

Доказательство. Если e — модулярный проектор, то для любой симметрии $s \in A$ проектор ses также модулярен, так как отображение $x \to sxs$ является автоморфизмом A. Далее, если $f < e$, то f, очевидно, также является модулярным проектором. Следовательно, достаточно показать, что если e и f — модулярные проекторы в A, то $e \vee f$ — модулярный проектор. Переходя при необходимости к JW-алгебре $(e \vee f) A (e \vee f)$, можно считать, что $e \vee f = 1$. Так как проекторы $(e \vee f) - f$ и $e - (e \wedge f)$ эквивалентны через симметрию [121, с. 159, следствие теоремы 2], то проектор $(e \vee f) - f$ модулярен. Далее $e \vee f = [(e \vee f) - f] + f$; поэтому, переходя к модулярным проекторам $(e \vee f) - f$ и f, можно предположить, что $ef = 0$. Таким образом, достаточно доказать, что если e и f — ортогональные модулярные проекторы и $e + f = 1$, то 1 — модулярный проектор. Предположим противное. Тогда в силу предложения 2.4 существует бесконечная ортогональная последовательность проекторов $\{g_i\}$, любые два из которых связаны через симметрию. Положим $g = \sup\limits_n g_{2n}$, $h = \sup\limits_n g_{2n-1}$. Пусть $s_n \in A$ — такая симметрия, что $s_n g_{2n} s_n = g_{2n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_n = s_n g_{2n}$. Тогда $x_n^* x_n = g_{2n}$, $x_n x_n^* = g_{2n-1}$. Положим $p_n = 1/2\left(x_n + x_n^* + g_{2n} + g_{2n-1}\right)$. Все p_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются проекторами в A. Положим $p = \sup p_n$, $r = 2p - 1$. Нетрудно проверить, что r — симметрия в A, связывающая проекторы g и h, т. е. $rgr = h$. Так как все $\{g_n\}$ попарно ортогональны, то g и h ортогональны, т. е. $rgr = h \leqslant 1 - g$. Из теоремы 2.3 о сравнении проекторов вытекает, что существуют центральный проектор $z \in A$ и симметрия $s \in A$, такие, что

$$s(gz)s < ez, \quad s(1-g)(1-z)s < (1-e)(1-z) = f(1-z).$$

Следовательно, gz и $(1-g)(1-z)$ являются модулярными проекторами. Далее, $g(1-z) < r(1-g)(1-z)r$, потому что $g \leqslant r(1-g)r$ и z есть центральный проектор. Так как $r(1-g) \times (1-z)r$ является модулярным проектором, то $g(1-z)$ — модулярный проектор. Следовательно, в силу предложения 2.5 (i) проектор $g = gz + g(1-z)$ модулярен и в то же время он равен бесконечной сумме ортогональных проекторов g_{2n}, $n = 1, 2, \ldots$, любые два из которых связаны через симметрию, что противоречит предложению 2.4. Предложение доказано.

Определение. а) JW-алгебра A называется модулярной, если решетка L всех ее проекторов модулярна, т. е. 1 является модулярным проектором.

б) JW-алгебра A называется локально модулярной, если она содержит точный модулярный проектор. Другими словами, A — локально модулярна, если каждое ее прямое слагаемое содержит модулярный проектор.

Теорема 2.6. Точная верхняя грань всех модулярных проекторов в JW-алгебре A является центральным проектором e, таким, что eAe — локально модулярная JW-алгебра, а в решетке $[0, 1-e]$ нет ни одного ненулевого модулярного проектора. Этот проектор является наибольшим среди всех проекторов f, таких, что fAf — локально-модулярная JW-алгебра. Модулярные проекты в eAe образуют минорантный модулярный p-идеал в $[0, e]$.

Доказательство. Пусть M—p-идеал всех модулярных проекторов в A, $e = \sup M$. Так как $sMs = \{sqs,\ q \in M\} = M$, то $ses = e$ для любой симметрии $s \in A$. Отсюда очевидно, что e является центральным проектором в A. Пусть $\{p_i\}$ — максимальное семейство модулярных проекторов в A с ортогональными центральными носителями, $p = \sup p_i$. В силу предложения 2.5 (i) p — модулярный проектор. Если $C(p) \neq e$, то $(e - C(p)) \wedge e = e - C(p) \neq 0$, т. е. $f = (e - C(p)) \wedge g \neq 0$ для некоторого модулярного проектора g. Но тогда $C(f) \leqslant e - C(p)$, что противоречит максимальности семейства $\{p_i\}$. Следовательно, $C(p) = e$, т. е. eAe — локально модулярная JW-алгебра. Остальные утверждения теоремы очевидны.

Определение. в) JW-алгебра A называется собственно немодулярной, если она не содержит ненулевых центральных модулярных проекторов.

г) JW-алгебра A называется чисто немодулярной, если она не содержит ненулевых модулярных проекторов.

Предложение 2.7. Пусть A—JW-алгебра. Существует наибольший центральный проектор e (соответственно f, g, h), такой, что eAe (fAf, gAg, hAh) является модулярной (локально-модулярной, собственно немодулярной, чисто немодулярной) JW-алгеброй. Эти проекторы связаны соотношениями

$$eg = 0,\ e + g = 1,\ fh = 0,\ f + h = 1,\ e \leqslant f,\ h \leqslant g.$$

Доказательство. Пусть e — точная верхняя грань всех центральных модулярных проекторов в A, $g = 1 - e$. Тогда утверждение, касающееся проекторов e и g, вытекает из предложения 2.5 (ii). Далее, пусть f — точная верхняя грань всех модулярных проекторов в A, $h = 1 - f$. Из теоремы 2.6 вытекают утверждения относительно проекторов f и h. Соотношения $e \leqslant f$ и $h \leqslant g$ очевидны. Предложение доказано.

Будем говорить, что JW-алгебра A имеет тип II, если она локально-модулярна и не содержит ненулевых абелевых проекторов.

Все приведенные выше утверждения теперь можно резюмировать в следующей теореме.

Теорема 2.8. Произвольная JW-алгебра единственным образом разлагается по центру в прямую сумму JW-алгебр следующих типов:

1) типа I модулярная (тип I_{fin});

2) типа I собственно немодулярная, локально модулярная (тип I_∞);

3) типа II модулярная (тип II_1);

4) типа II собственно немодулярная, локально-модулярная (тип II_∞);

5) чисто немодулярная (тип III).

При этом JW-фактор принадлежит одному и только одному из этих типов.

Доказательство. По теореме 2.2 разложим A в прямую сумму JW-алгебры типа I и JW-алгебры без ненулевых абелевых проекторов. Так как всякий абелев проектор, очевидно, модулярен, то JW-алгебра типа I всегда локально модулярна и в силу предложения 2.7 разлагается в прямую сумму JW-алгебр типа I_{fin} и I_∞. Оставшееся слагаемое без ненулевых абелевых проекторов разлагается в соответствии с предложением 2.7 в прямую сумму слагаемых типа II_1, II_∞ и III, соответствующих проекторам e, $f-e=g-h$, h. Последнее утверждение очевидно. Теорема доказана.

Следует отметить, что если JW-алгебра A совпадает с эрмитовой частью W^*-алгебры, то приведенное выше разложение по типам полностью согласуется с соответствующим разложением для W^*-алгебр. В самом деле, понятие типа I для JW-алгебры согласовано с соответствующим понятием в W^*-алгебре $A+iA$. Далее, если e — конечный проектор, то известно [137, гл. V, теорема 2.4], что $[0, e]$ — модулярная решетка. Для любых двух ортогональных эквивалентных (в смысле W^*-алгебр) проекторов e и f в A пусть $x \in A+iA$ — частичная изометрия, осуществляющая эквивалентность, т. е. $e=x^*x$, $f=xx^*$. Легко видеть, что $s=x+x^*+(1-e-f)$ является симметрией в A, связывающей e и f. Проектор e конечен тогда и только тогда, когда всякое ортогональное семейство $\{e_i\}$, $e_i \leqslant e$, попарно эквивалентных (в смысле W^*-алгебр) проекторов конечно. В силу сказанного выше и предложения 2.4 всякий модулярный проектор в A конечен в $A+iA$. Следовательно, определения всех типов для JW-алгебр и W^*-алгебр согласованы.

JW-алгебра A называется однородной, если в ней существует ортогональное семейство $\{e_i\}$ абелевых проекторов, любые два из которых связаны через симметрию, и $\sup e_i = 1$. Ясно, что всякая однородная JW-алгебра A имеет тип I. В этом случае будем говорить, что JW-алгебра A имеет тип I_n, где кардинальное число n означает мощность семейства проекторов $\{e_i\}$.

Предложение 2.9. Пусть A—JW-алгебра типа I. Тогда A можно единственным образом разложить (по центру) в прямую сумму однородных JW-алгебр типа I_n, где n — кардинальное число.

Доказательства этого и последующих предложений проводятся по той же схеме, что и для случая W*-алгебр, поэтому мы их опускаем.

Предложение 2.10. Пусть A—JW-алгебра, не содержащая ненулевых абелевых проекторов. Тогда всякий проектор в A можно разложить в сумму двух ортогональных проекторов, связанных через симметрию.

Определение. Пусть A — JW-алгебра, Z — ее центр. Центрозначный след на A — это линейное отображение Φ: $A \to Z$, такое, что

(i) $\Phi(za) = z\Phi(a)$ для всех $a \in A$, $z \in Z$;

(ii) $\Phi(a) \geqslant 0$ для $a \geqslant 0$;

(iii) $\Phi(sas) = \Phi(a)$ для всех $a \in A$ и любой симметрии $s \in A$;

(iv) $\Phi(1) = 1$.

Из свойств i) и (iv) следует, что $\Phi(z) = z$ для $z \in Z$. Φ называется точным, если $\Phi(a) \neq 0$ для $a \geqslant 0$, $a \neq 0$; Φ называется нормальным, если для любой сети $\{a_\alpha\}$, монотонно возрастающей к $a \in A$, сеть $\{\Phi(a_\alpha)\}$ монотонно возрастает к $\Phi(a)$.

Предложение 2.11. JW-алгебра A модулярна тогда и только тогда, когда она обладает (единственным) точным нормальным центрозначным следом.

В заключение отметим, что все результаты этого параграфа (естественно, кроме предложения 2.1) легко могут быть перенесены на случай JBW-алгебр. В частности, произвольная JBW-алгебра раскладывается по центру в прямую сумму JBW-алгебр типа $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, I_∞, II_1, II_∞ и III. Однако этот перенос не представляет особого интереса, поскольку исключительная часть $A_{\mathrm{ex}} = L^\infty\left(\Omega, \mu, M_3^8\right)$ (см. теорему 1.4) является, очевидно, слагаемым типа I_3. В частности, все JBW-алгебры без прямых слагаемых типа I_3 специальны, т. е. изоморфны JW-алгебрам.

§ 3. Обратимые JW-алгебры

Пусть A—JW-алгебра. Через $B(A)$ будем обозначать равномерно замкнутую вещественную *-алгебру в $B(H)$, порожденную A; через $C(A)$—C^*-алгебру, порожденную A. Таким образом, операторы вида $\sum\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\left(a_{ij} \in A\right)$ равномерно плотны в $B(A)$. Если через $iB(A)$ обозначить множество операторов вида ia, $a \in B(A)$, то алгебра $B(A)+iB(A)$ равномерно плотна в $C(A)$.

Предложение 3.1. Множество $B(A) \cap iB(A)$ является равномерно замкнутым двусторонним идеалом в $C(A)$.

Доказательство. Если $a, b \in B(A)$ и $c = id \in B(A) \cap iB(A)$, то $(a+ib)c = ac + ibid = ac - bd \in B(A)$. Аналогично $(a+ib)c \in iB(A)$, т. е. $(a+ib)c \in B(A) \cap iB(A)$. Так как множество

$B(A)\cap iB(A)$ равномерно замкнуто, и операторы вида $a+ib(a, b\in A)$ равномерно плотны в $C(A)$, то $B(A)\cap iB(A)$ — левый идеал в $C(A)$. В силу симметрии $B(A)\cap iB(A)$ является и правым идеалом. Предложение доказано.

Если R — некоторая *-алгебра, то через R_{SA} будем обозначать множество всех самосопряженных элементов R, т. е. $R_{SA}=\{a\in R : a^*=a\}$.

Определение. JW-алгебра A называется обратимой, если $a_1a_2\ldots a_n+a_na_{n-1}\ldots a_1\in A$ для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n\in A$.

Предложение 3.2. JW-алгебра A обратима тогда и только тогда, когда $A=B(A)_{SA}$.

Доказательство. Если $A=B(A)_{SA}$, то обратимость A очевидна, так как для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n\in A$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i+\prod_{i=n}^{1} a_i\right)^*=\prod_{i=n}^{1} a_i+\prod_{i=1}^{n} a_i\in B(A)_{SA}=A.$$

Обратно, пусть A — обратимая JW-алгебра. Включение $A\subset B(A)_{SA}$ очевидно. Если $a=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m_i} a_{ij}\in B(A)_{SA}$, то

$$a=\frac{1}{2}(a+a^*)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m_i} a_{ij}+\prod_{j=m_i}^{1} a_{ij}\right)\in A.$$

Отсюда вытекает обратное включение, т. е. $B(A)_{SA}=A$. Предложение доказано.

Для JW-алгебры A через $R(A)$ будем обозначать слабое замыкание алгебры $B(A)$ в $B(H)$, через $\mathcal{U}(A)$ — слабое замыкание C^*-алгебры $C(A)$. Очевидно, $\mathcal{U}(A)$ является W^*-алгеброй, порожденной A, и может быть отождествлено с бикоммутантом A'' JW-алгебры A в $B(H)$.

Лемма 1. Пусть A — обратимая JW-алгебра. Тогда в ней существуют два центральных проектора e, f, $e+f=1$, такие, что eA является эрмитовой частью W^*-алгебры, $B(fA)\cap iB(fA)=\{0\}$.

Доказательство. Положим $I=B(A)\cap iB(A)$. В силу предложения 3.1 I является идеалом в $C(A)$ и, следовательно, его слабое замыкание $J=\overline{I}$ является слабо замкнутым двусторонним идеалом в W^*-алгебре $\mathcal{U}(A)$. Известно [116; I.10.5], что в этом случае существует центральный проектор $e\in\mathcal{U}(A)$, такой, что $J=e\mathcal{U}(A)$. Так как JW-алгебра A обратима, то $J_{SA}=(I_{SA})^{-}\subset A$; следовательно, $e\in A$ и $J_{SA}=eA$. Ясно, что J — W^*-алгебра. Если $f=1-e$, то f является центральным проектором в A и $B(fA)\cap iB(fA)=f(B(A)\cap iB(A))=fI\subset fe\mathcal{U}(A)=\{0\}$. Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, каким образом в произвольной JW-алгебре можно выделить обратимую часть.

Лемма 2. Пусть A — JW-алгебра. Обозначим через J множество всех операторов $a \in A$, таких, что $bac + c^*ab^* \in A$ для всех $b, c \in B(A)$. Тогда J — слабо замкнутый йорданов идеал в A. Более того, J — обратимая JW-алгебра.

Доказательство. Пусть $a, b \in J$, $s, t \in B(A)$. Тогда

$$s(a+b)t + t^*(a+b)s^* = (sat + t^*as^*) + (sbt + t^*bs^*) \in A,$$

т. е. J — линейное подпространство в A. Далее, если $a \in J$, $b \in A$, $s, t \in B(A)$, то

$$s(ab+ba)t + t^*(ab+ba)s^* = (sa(bt) + (bt)^*as^*) + \\ + ((sb)at + t^*a(sb)^*) \in A,$$

т. е. J — йорданов идеал в A. Покажем слабую замкнутость J. Если $\{a_\alpha\} \subset J$ и $a_\alpha \to a$ слабо, то для всех $s, t \in B(A)$ $sa_\alpha t + t^*a_\alpha s^* \to \to sat + t^*as^*$ слабо. Так как A слабо замкнута, то $sat + t^*as^* \in A$, т. е. $a \in J$. Пусть $a_1 \in J$, $a_2, \ldots, a_n \in A$. Положим $a = \prod_{i=2}^{n} a_i$. Тогда $a_1a + a^*a_1 \in A$ по определению J. Покажем, что $a_1a + a^*a_1 \in J$; тогда, в частности, при $a_2, \ldots, a_n \in J$, будет вытекать обратимость J. Для любых $b, c \in B(A)$ имеем

$$b(a_1a + a^*a_1)c + c^*(a_1a + a^*a_1)b^* = \\ = (ba_1(ac) + (ac)^*a_1b^*) + ((ba^*)a_1c + c^*a_1(ba^*)^*) \in A,$$

т. е. $a_1a + a^*a_1 \in J$. Лемма доказана.

Определение. JW-алгебра A называется тотально необратимой, если идеал J в лемме 2 является нулевым, т. е. $J = \{0\}$.

Теорема 3.3. Пусть A — произвольная JW-алгебра. Существуют три центральных проектора $e, f, g \in A$, $e + f + g = \mathbf{1}$, такие, что

(1) eA — эрмитова часть W^*-алгебры;
(2) fA — обратимая JW-алгебра и $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$;
(3) gA — тотально необратимая JW-алгебра.

Доказательство. Рассмотрим идеал J, построенный в лемме 2. В силу слабой замкнутости J в A существует центральный проектор h, такой, что $J = hA$ [121, теорема 2, с. 162]. Покажем, что если $g = \mathbf{1} - h$, то gA является тотально необратимой JW-алгеброй. Пусть $a \in gA$. Если для всех $b, c \in B(gA) = gB(A)$: $bac + c^*ab^* \in gA$, то, так как $b = gs$, $c = gt$ для некоторых $s, t \in B(A)$, имеем $g(sat + t^*as^*) \in gA$. Но $a = ga$, следовательно, $sat + t^*as^* \in gA \subset A$ для всех $s, t \in B(A)$, т. е. $a \in J = hA$. Отсюда $a = 0$ и, значит, gA — тотально необратима.

Теперь рассмотрим обратимую часть $J = hA$. В силу леммы 1 существуют центральные проекторы e, f, $e + f = h$, такие, что eA — эрмитова часть W^*-алгебры, fA — обратимая JW-алгебра, такая, что $B(fA) \cap iB(fA) = \{0\}$. Теорема будет полностью доказана, если мы покажем, что $R(fA) \cap iR(fA) = \{0\}$, где $R(fA) = \bar{B}(fA)$ — слабое замыкание $B(fA)$. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3. Пусть A — обратимая JW-алгебра, такая, что $B(A) \cap iB(A) = \{0\}$. Тогда $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $J = R(A) \cap iR(A)$. Тогда J — слабо замкнутый двусторонний идеал в $\mathcal{U}(A)$ (см. лемму 1) и поэтому существует центральный проектор $e \in \mathcal{U}(A)$, такой, что $J = e\mathcal{U}(A)$. Далее, $J_{SA} \subset R(A)_{SA} \subset A$, так как A — обратима (предложение 3.2) и слабо замкнута. Следовательно, $e\mathcal{U}(A)_{SA} = J_{SA} \subset$ A. Из структурной теории W^*-алгебр известно, что в $\mathcal{U}(A)$ существует центральный проектор, такой, что $f\mathcal{U}(A)$ — абелева W^*-алгебра, $(1-f)\mathcal{U}(A)$ не содержит центральных абелевых проекторов (впрочем, это вытекает также из результатов предыдущего параграфа). Так как $f\mathcal{U}(A)$ — абелева, то $fR(A) = R(fA) = fA$ и, следовательно, $fJ = \{0\}$, т. е. $fe = 0$. Поэтому при доказательстве равенства $J = \{0\}$, можно предположить, что $\mathcal{U}(A)$ не содержит абелевых прямых слагаемых. Нетрудно показать (предлагается читателю в качестве упражнения), что в произвольной W^*-алгебре без центральных абелевых проекторов существуют восемь самосопряженных операторов $\{s_i\}_{i=1}^{8}$, таких, что $s_1s_2s_3s_4 + s_5s_6s_7s_8 = i1$. В частности, для таких W^*-алгебр $\mathcal{U}$ пересечение $B(\mathcal{U}_{SA}) \cap iB(\mathcal{U}_{SA})$ содержит $i1$, т. е. отлично от $\{0\}$. Отсюда следует, что если предположить, что $e \neq 0$, то

$$\{0\} \neq B(e\mathcal{U}(A)_{SA}) \cap iB(e\mathcal{U}(A)_{SA}) \subset B(A) \cap iB(A) = \{0\},$$

так как $e\mathcal{U}(A)_{SA} \subset A$. Это противоречие показывает, что $e = 0$, т. е. $J = \{0\}$. Лемма 3, а с ней и теорема 3.3 доказаны.

Для обратимой JW-алгебры A обертывающая W^*-алгебра может быть описана более точно.

Теорема 3.4. Пусть A — обратимая JW-алгебра. Тогда $\mathcal{U}(A) = R(A) + iR(A)$.

Доказательство. Если A совпадает с эрмитовой частью W^*-алгебры, то утверждение очевидно. Поэтому, в силу теоремы 3.3, можно сразу предположить, что $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$. Для доказательства теоремы в этом случае нам понадобится ряд свойств вещественных $*$-алгебр операторов R, обладающих свойством $R \cap iR = \{0\}$.

Лемма 4. Пусть R — равномерно замкнутая вещественная $*$-алгебра операторов в $B(H)$, содержащая единичный оператор **1**. Следующие условия эквивалентны:

(i) $R \cap iR = \{0\}$;

(ii) $(iR)^+ = \{0\}$;

(iii) $\|a+ib\| \geqslant \max\{\|a\|, \|b\|\}$ для всех $a, b \in R$.

В частности, если эти условия выполнены, то $R+iR$ является C^*-алгеброй.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii). Если $a \in R$, $b = ia \geqslant 0$, то $b^2 = a^*a$ — положительный оператор в R. Так как R—равномерно замкнутая $*$-алгебра, то b, будучи квадратным корнем из b^2, принадлежит R, т. е. $b \in R \cap iR = \{0\}$, т. е. $b = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Пусть $(iR)^+ = \{0\}$. Если предположить, что $R \cap iR \neq \{0\}$, то $R \cap iR$ является C^*-алгеброй и, следовательно, $(iR)^+ \supset (R \cap iR)^+ \neq \{0\}$. Противоречие.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Если $a+ib \geqslant 0$, $a, b \in A$, то $a \geqslant 0$. В самом деле, так как $a^* = a$, то $a = a^+ - a^-$, где $a^+ \geqslant 0$, $a^- \geqslant 0$, $a^+a^- = 0$. Пусть φ — произвольная непрерывная вещественная функция на вещественной прямой R, равная нулю на R_+. Тогда

$$\varphi(a)\,a\varphi(a) = -\varphi(a)\,a^-\,\varphi(a) \leqslant 0.$$

Так как $\varphi(a)(a+ib)\varphi(a) \geqslant 0$, то $\varphi(a)\,ib\varphi(a) \geqslant 0$. В силу (ii) $\varphi(a)\,b\varphi(a) = 0$, т. е. $\varphi(a)\,a\varphi(a) \geqslant 0$. Отсюда $\varphi(a)\,a\varphi(a) = 0$. Тогда из произвольности функции φ следует, что $a^- = 0$, т. е. $a \geqslant 0$.

Пусть $a, b \in R$. Чтобы доказать неравенство $\|a+ib\| \geqslant \max\{\|a\|, \|b\|\}$, можно, не ограничивая общности, предположить, что $\|a+ib\| \leqslant 1$. Тогда

$$0 \leqslant 1 - (a+ib)^*(a+ib) = 1 - a^*a - b^*b - i(a^*b - b^*a).$$

В силу доказанного выше, отсюда следует, что $1 \geqslant a^*a + b^*b \geqslant 0$, т. е. $\|a\| \leqslant 1$, $\|b\| \leqslant 1$, т. е. имеет место (iii).

Импликация (iii)$\Rightarrow$(i) очевидна: если $a = ib \in R \cap iR$, то $0 = \|a - ib\| \geqslant \max\{\|a\|, \|b\|\}$, т. е. $a = b = 0$. Осталось доказать, что при выполнении условий (i)—(iii) $R+iR$ является C^*-алгеброй. Для этого, очевидно, достаточно доказать полноту в смысле нормы $*$-алгебры $R+iR$. Если $\{c_n = a_n + ib_n\}$ — фундаментальная последовательность в $R+iR$, то в силу (iii) последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ являются фундаментальными в R и, следовательно, сходятся по норме к $a \in R$ и $b \in R$ соответственно. Тогда $c_n \to a+ib \in R+iR$. Лемма доказана.

Из доказательства импликации (ii)$\Rightarrow$(iii) вытекает

Следствие. В условиях леммы 4, если $a+ib \geqslant 0$ для $a, b \in R$, то $a \geqslant 0$.

Вернемся к доказательству теоремы 3.4. Пусть $\mathcal{B} = R(A) + iR(A)$. Тогда $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}(A)$ и в силу леммы 4 $\mathcal{B}$ является C^*-алгеброй. Поэтому достаточно доказать, что $\mathcal{B}$ — W^*-алгебра, отсюда будет следовать равенство $\mathcal{B} = \mathcal{U}(A)$. Для этого достаточно, в свою очередь, показать, что $\mathcal{B}$ содержит сильный предел каждой ограниченной монотонно возрастающей сети самосопряженных операторов из $\mathcal{B}$. Итак, пусть a_α, b_α — операторы из $R(A)$, такие, что сеть $\{a_\alpha + ib_\alpha\}$ монотонно возрастает к оператору s. Тогда $a_\alpha + ib_\alpha \to s$ сильно. Кроме того, в силу леммы 4 и ее следствия $\{a_\alpha\}$ — возрастающая сеть и $\|a_\alpha\| \leqslant \|s\|$ для всех α. Следовательно, существует $a = \sup a_\alpha \in R(A)$. Пусть ξ — произвольный фиксированный вектор в гильбертовом пространстве H, $\varepsilon > 0$. Так как $\{a_\alpha\} \uparrow a$, $\{a_\beta + ib_\beta\} \uparrow s$, то существуют такие α_0 и β_0, что

$$\omega(a_\alpha) \leqslant \omega(a) \leqslant \omega(a_\alpha) + \varepsilon/2,$$

$$\omega(a_\beta + ib_\beta) \leqslant \omega(s) \leqslant \omega(a_\beta + ib_\beta) + \varepsilon/2$$

для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant \beta_0$, где $\omega(a) = \omega_\xi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$, $\xi \in H$, $a \in B(H)$. Отсюда при $\gamma \geqslant \alpha_0$, β_0 имеем

$$\omega(ib_\gamma - (s - a))| = |\omega(ib_\gamma) - \omega(s) + \omega(a_\gamma + ib_\gamma) - \omega(a_\gamma + ib_\gamma) + \\ + \omega(a)| \leqslant |-\omega(s) + \omega(a_\gamma + ib_\gamma)| + |\omega(a) - \omega(a_\gamma)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Следовательно, $ib_\alpha \to s - a$ слабо, т. е. $b_\alpha \to b$ слабо, где $b = -i(s - a)$. В частности, $b \in R(A)$. Далее, так как

$$|\omega(a_\gamma + ib_\gamma - (a + ib))| \leqslant |\omega(a_\gamma - a)| + |\omega(ib_\gamma - (s - a))| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon = \frac{3\varepsilon}{2},$$

то $a_\alpha + ib_\alpha \to a + ib$ слабо. В силу отделимости слабой топологии, $a + ib = s \in R(A) + iR(A) = \mathcal{B}$. Теорема 3.4 доказана.

Определение. В е щ е с т в е н н о й W^*-а л г е б р о й называется слабо замкнутая вещественная $*$-алгебра R в $B(H)$, такая, что $R \cap iR = \{0\}$.

Таким образом, обратимые JW-алгебры в пункте (2) теоремы 3.3 — это эрмитовы части вещественных W^*-алгебр, так как $R(A)_{\mathrm{SA}} = A$.

Из доказательства теоремы 3.4 вытекает следующее описание обертывающей W^*-алгебры для вещественной W^*-алгебры.

Следствие. Если R — вещественная W^*-алгебра, то W^*-алгебра $\mathcal{U}(R)$, порожденная R в $B(H)$, совпадает с $R + iR$.

Определение. Обратимую JW-алгебру A назовем ч и с т о в е щ е с т в е н н о й, если $R(A)$ — вещественная W^*-алгебра.

Отметим, что свойство JW-алгебры быть чисто вещественной не является инвариантом при изоморфизмах. Более того, следующий пример показывает, что для любой W^*-алгебры существует вещественная W^*-алгебра, изоморфная ей в смысле вещественных $*$-алгебр.

Пример 1. Пусть $\mathcal{U}$ — W^*-алгебра, $\mathcal{U}_0$ — противоположная W^*-алгебра, т. е. $\mathcal{U}_0$ — это векторное пространство $\mathcal{U}$, снабженное произведением $(x, y) \to yx$. Для $a \in \mathcal{U}$ обозначим через a_0 элемент a, рассмотренный в $\mathcal{U}_0$. Тогда множество $R = \{(a, a_0^*), a \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{U} \times \mathcal{U}_0$ с покоординатными операциями является вещественной W^*-алгеброй. При этом отображение $(a, a_0^*) \to a$ является вещественным $*$-изоморфизмом между R и $\mathcal{U}$. В частности, JW-алгебра $\mathcal{U}_{SA}$ изоморфна чисто вещественной JW-алгебре R_{SA}.

Рассмотрим некоторые свойства вещественных W^*-алгебр, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Предложение 3.5. Пусть R — вещественная W^*-алгебра, $\mathcal{U} = R + iR$ — ее обертывающая W^*-алгебра. И пусть α — отображение $\mathcal{U}$ в себя, определенное как $\alpha(a + ib) = a^* + ib^*$, $a, b \in R$. Тогда α является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом $\mathcal{U}$.

Доказательство. Очевидно, что $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$ является тождественным отображением, т. е. α — инволютивно; следовательно, α — сюръективно. Так как $R \cap iR = \{0\}$, то $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$, т. е. α — инъективно. Далее, если $a, b, c, d \in R$, то

$$\alpha((a + ib)(c + id)) = \alpha((ac - bd) + i(ad + bc)) =$$
$$= (ac - bd)^* + i(ad + bc)^* = (c^* + id^*)(a^* + ib^*) =$$
$$= \alpha(c + id)\,\alpha(a + ib);$$

$$\alpha((a + ib)^*) = \alpha(a^* - ib^*) = a - ib = (a^* + ib^*)^* = \alpha(a + ib)^*.$$

Вещественная линейность α очевидна. Поэтому достаточно доказать, что $\alpha(i(a + ib)) = i\alpha(a + ib)$. Но

$$\alpha(i(a + ib)) = \alpha(-b + ia) = -b^* + ia^* = i(a^* + ib^*) = i\alpha(a + ib),$$

и утверждение доказано.

Следствие. Пусть R — вещественная W^*-алгебра, $\mathcal{U} = R + iR$. Тогда отображение $\Psi : \mathcal{U} \to R$, определенное как $\Psi(a + ib) = a\ (a, b \in R)$, положительно и нормально.

Доказательство. Положительность Ψ доказана в следствии леммы 4 Пусть η — отображение $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}$, определенное как $\eta(a + ib) = a - ib$. Тогда $\eta(x) = \alpha(x^*)$, $x \in \mathcal{U}$. Так как всякий антиавтоморфизм и инволюция на W^*-алгебре ультраслабо непрерывны, то η — ультраслабо непрерывно. Если I — тождественное отображение $\mathcal{U}$, то $\Psi = 1/2(I + \eta)$. Следовательно, Ψ — ультраслабо непрерывно и поэтому нормально.

Предложение 3.6. Пусть A — чисто вещественная JW-алгебра, $\mathcal{U} = R(A) + iR(A)$ — ее обертывающая W^*-алгебра. Если f — центральный проектор в $\mathcal{U}$, такой, что $(f\mathcal{U}) \cap A = \{0\}$, то

$(f\mathcal{U})_{SA}=fA$. Кроме того, существуют центральный проектор $g\in A$, $g\geqslant f$, и йорданов изоморфизм ψ из $(f\mathcal{U})_{SA}$ на gA, который является обратным к изоморфизму $ga\to fa$ из gA на $(f\mathcal{U})_{SA}$.

Доказательство. Обозначим через J идеал $f\mathcal{U}$ в W^*-алгебре $\mathcal{U}$. Положим $\Gamma=\{a\in R(A)$: существует $b\in R(A)$, что $a+ib\in J\}$. Очевидно, Γ — идеал в $R(A)$. Так как $R(A)\cap iR(A)=\{0\}$, то из соотношений $a+ib\in J$, $a+ic\in J$ вытекает, что $b=c$. Поэтому корректно определено отображение $\rho:\Gamma\to\Gamma$, которое элементу $a\in\Gamma$ ставит в соответствие элемент $b\in R(A)$, такой, что $a+ib\in J$ (в этом случае очевидно, что $b\in\Gamma$, так как $b-ia=-i(a+ib)\in J$). Это отображение ρ является линейной изометрией. В самом деле, $a^*a+ia^*b=a^*(a+ib)\in J$, а так как $a^*-ib^*=(a+ib)^*$, то $a^*b-ib^*b=(a^*-ib^*)b\in J$, т. е. $b^*b+ia^*b\in J$. Отсюда в силу единственности элемента $\rho(x)$, $x\in\Gamma$, следует, что $a^*a=b^*b$. В частности, $\|a\|=\|b\|=\|\rho(a)\|$, т. е. ρ — изометрия.

Далее, $\Gamma=\Psi(J)$, где Ψ — отображение, построенное в следствии предложения 3.5. Из слабой непрерывности Ψ и изометричности ρ вытекает, что Γ_{SA} — слабо замкнутый йорданов идеал в A, т. е. существует центральный проектор $g\in A$, такой, что $\Gamma_{SA}=gA$. Положим $s=\rho(g)$, $e=1/2(1+is)$, $f_1=eg$. Нетрудно проверить, что $(f\mathcal{U})_{SA}=f_1(gA)=f_1A$. Так как наибольшим проектором в $f\mathcal{U}$ является f, то $f_1=f$, т. е. $(f\mathcal{U})_{SA}=fA$. Кроме того, отображение $gA\to fA$, определенное соответствием $ga\to fa$, является инъективным: если $fa=0$, то $ega=0$ и, следовательно, $(1+is)ga=0$, т. е. $ga=isga\in R(A)\cap iR(A)=\{0\}$, а значит, $ga=0$. Пусть ψ — обратное отображение к отображению $ga\to fa$. Тогда, очевидно, ψ — йорданов изоморфизм $(f\mathcal{U})_{SA}=fA$ на gA. Предложение доказано.

Следствие. Пусть A — обратимый JW-фактор, такой, что $\mathcal{U}(A)$ не является W^*-фактором. Тогда существуют в точности два ортогональных минимальных ненулевых проектора e и f в центре $\mathcal{U}(A)$. При этом существуют йордановы изоморфизмы из $e\mathcal{U}(A)_{SA}$ и $f\mathcal{U}(A)_{SA}$ на A, причем $e\mathcal{U}(A)_{SA}=eA$, $f\mathcal{U}(A)_{SA}=fA$. В частности, йордановы алгебры $e\mathcal{U}(A)_{SA}$ и $f\mathcal{U}(A)_{SA}$ изоморфны.

Доказательство. Так как $\mathcal{U}$ не является W^*-фактором, то в силу леммы 1 $R(A)\cap iR(A)=\{0\}$. Если e и f — ортогональные центральные проекторы в $\mathcal{U}(A)$, отличные от 0 и 1, то $f\mathcal{U}(A)$ является слабо замкнутым двусторонним идеалом в $\mathcal{U}(A)$, таким, что $f\mathcal{U}(A)\cap A=\{0\}$. Так как A — JW-фактор, то проектор g в предложении 3.6 равен 1 и, следовательно, йорданов изоморфизм ψ действует из $f\mathcal{U}(A)_{SA}$ на A (аналогично из $e\mathcal{U}(A)_{SA}$ на A). Предположим, что $f=f_1+f_2$, где f_1, f_2—

центральные проекторы в $\mathcal{U}(A)$. Тогда $\psi(f_1)$ и $\psi(f_2)$ — ортогональные центральные проекторы в A. Следовательно, один из них равен нулю, другой — единице, т. е. либо $f_1 = f$, $f_2 = 0$, либо $f_1 = 0$, $f_2 = f$. Это означает, что f — минимальный проектор в центре $\mathcal{U}(A)$. Аналогично доказывается минимальность e. Утверждение доказано.

Рассмотрим пример необратимой JW-алгебры.

Пример 2. Спин-система в $B(H)$ — это семейство нетривиальных симметрий $S \subset B(H)$, т. е. $s^* = s$, $s^2 = 1$, $s \neq \pm 1$, $\forall s \in S$, которые антикоммутируют: $s \circ t = st + ts = 0$ для всех $s, t \in S$, $s \neq t$. Нетрудно проверить, что каждый оператор из слабого замыкания $(S)^-$ линейной оболочки спин-системы S также является кратным некоторой симметрии в $B(H)$. Отсюда вытекает, что линейное пространство $R1 + (S)^-$ есть JW-алгебра в $B(H)$; более того, оно является JW-фактором типа I_2. Построенные таким образом JW-факторы называются спин-факторами.

Оказывается, можно дать и абстрактное определение спин-фактора. Пусть A — вещественное гильбертово пространство размерности $\geqslant 3$ со скалярным произведением $\langle x \mid y \rangle$, $x, y \in A$, и пусть $u \in A$ — некоторый единичный вектор, $N = \{u\}^{\perp}$, т. е. $A = Ru + N$. Определим в A произведение

$$(\alpha u + x) \circ (\beta u + y) = (\alpha\beta + \langle x | y \rangle)\, u + (\beta x + \alpha y),$$

где $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in N$. С этим произведением A является йордановой алгеброй с единицей u, которая называется абстрактным спин-фактором. Можно показать [139], что всякий абстрактный спин-фактор изоморфен некоторому спин-фактору, и наоборот. Поэтому в дальнейшем абстрактные спин-факторы будем также называть спин-факторами. Под размерностью спин-фактора понимается размерность вещественного гильбертова пространства A. Поскольку йорданова структура A полностью определяется структурой вещественного гильбертова пространства, а гильбертово пространство определяется своей размерностью, то из сказанного вытекает

Теорема 3.7. Два спин-фактора изоморфны тогда и только тогда, когда равны их размерности. Для любого кардинального числа $m \geqslant 3$ существует единственный с точностью до изоморфизма спин-фактор m.

Оказывается, тотально необратимыми могут быть только спин-факторы; при этом, если размерность спин-фактора A отлична от 3, 4 или 6, то A всегда тотально необратим, если размерность A равна 3 или 4, то A обратим, и, наконец, если размерность A равна 6, то обратимость A зависит от его представления в $B(H)$ [112]. Что касается общих JW-алгебр, то тотально необратимыми JW-алгебрами являются JW-алгебры типа I_2. Как доказано в [130], всякая JW-алгебра этого типа разлагается в прямую сумму JW-алгебр

$$\sum_m L^{\infty}(\Omega_m, \mu_m, V_m),$$

где Ω_m — локально компактное хаусдорфово пространство, μ_m — мера Радона на Ω_m, V_m — спин-фактор размерности $m \geqslant 3$. С учетом этого результата теорему 3.3 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.8. В произвольной JW-алгебре A существуют три ортогональных центральных проектора e, f, g, $e+f+g=\mathbf{1}$, такие, что

(i) eA — эрмитова часть W^*-алгебры $\mathcal{U}(eA)$;

(ii) fA — эрмитова часть вещественной W^*-алгебры $R(fA)$;

(iii) $gA = \sum\limits_{m \geqslant 3} L^\infty(\Omega_m, \mu_m, V_m)$, где V_m — спин-фактор размерности m.

В заключение докажем один вспомогательный результат, который позволяет сводить изучение двупорожденных JBW-алгебр к изучению обратимых JW-алгебр.

Предложение 3.9. Пусть A — JBW-алгебра, A_0 — JBW-подалгебра, порожденная единицей $\mathbf{1}$ и двумя элементами $a, b \in A$. Тогда A_0 изоморфна обратимой JW-алгебре.

Доказательство. Пусть $J = J(a, b, \mathbf{1})$ — йорданова подалгебра, порожденная элементами $a, b, \mathbf{1}$. По теореме Ширшова, J является специальной йордановой алгеброй. Пусть $f(x, y, z)$ — некоторое s-тождество от трех переменных, которое не выполняется в M_3^8 [68; теорема 12, с. 51]. Тогда $f(x, y, z) = 0$ для всех $x, y, z \in J$. Так как единичный шар в J сильно плотен в единичном шаре A_0 [11; предложение 3.9], то в силу сильной непрерывности операции умножения по совокупности переменных на ограниченных по норме подмножествах A (теорема 1.5 гл. 1), тождество $f(x, y, z) = 0$ выполняется для всех $x, y, z \in A_0$. В силу [11; лемма 9.4] A_0 изоморфна JC-алгебре. Согласно следствию теоремы 1.3 гл. 1, A изоморфна JW-алгебре, т. е. существует изоморфное вложение $\varphi_1 : A_0 \to B(H)_{SA}$, такое, что $\varphi_1(A_0)$ является JW-алгеброй. Из общей теории йордановых алгебр [68; теорема 6, с. 77] известно, что йорданова алгебра $J = J(a, b, \mathbf{1})$, порожденная единицей $\mathbf{1}$ и двумя элементами a, b, является рефлексивной, т. е. совпадает с алгеброй симметричных элементов ассоциативной алгебры $\mathcal{U}$ со стандартной инволюцией π, где $\mathcal{U}$ — унитальная специальная универсальная обертывающая для алгебры J, т. е. $J = \mathcal{H}(\mathcal{U}, \pi) = \{x \in \mathcal{U} : \pi(x) = x\}$. В силу свойств унитальной специальной универсальной обертывающей [68; гл. II] вложение $\varphi_0 = \varphi_1|_J$ йордановой алгебры J в йорданову алгебру $B(H)_{SA}$ можно единственным образом продолжить до гомоморфизма φ алгебры $\mathcal{U}$ в $*$-алгебру $B(H)$, так, что для всех $x \in \mathcal{U}$ имеет место равенство

$$\varphi(\pi(x)) = \varphi(x)^*,$$

т. е. φ сохраняет инволюцию. Покажем, что $\varphi_0(J) = [\varphi(\mathcal{U})]_{SA}$. Включение $\varphi_0(J) \subset [\varphi(\mathcal{U})]_{SA}$ очевидно. Обратно, если $y \in [\varphi(\mathcal{U})]_{SA}$, то существует элемент $x \in \mathcal{U}$, такой, что $y=\varphi(x)$. Тогда $\varphi(\pi(x))=\varphi(x)^*=y^*=y=\varphi(x)$. Следовательно, $\varphi\left(\frac{x+\pi(x)}{2}\right)=y$. Так как $\frac{x+\pi(x)}{2} \in \mathcal{H}(\mathcal{U}, \pi)=J$, то $y \in \varphi_0(J)$. Следовательно, $\varphi_0(J)=[\varphi(\mathcal{U})]_{SA}$. В силу [175; теорема 1] слабая топология, индуцируемая на A_0 из JBW-алгебры A, при изоморфизме $\varphi_1: A_0 \to \varphi_1(A_0)$ соответствует слабой операторной топологии. Далее, JBW-алгебра A_0, порожденная элементами 1, a, b, совпадает со слабым замыканием $J(a, b, 1)$ в A. Следовательно, $\varphi_1(A_0)=\overline{\varphi_0(J)}=\overline{[\varphi(\mathcal{U})]_{SA}}$, где черта сверху означает замыкание в слабой (операторной) топологии в $B(H)$. В силу непрерывности инволюции в слабой топологии в $B(H)$: $\overline{[\varphi(\mathcal{U})]_{SA}}=[\overline{\varphi(\mathcal{U})}]_{SA}$, т. е. JW-алгебра $\varphi_1(A_0)$ совпадает с эрмитовой частью $*$-алгебры $\overline{\varphi(\mathcal{U})}$. В силу предложения 3.2 $\varphi_1(A_0)$ является обратимой JW-алгеброй, Следовательно, JBW-алгебра A_0 изоморфна обратимой JW-алгебре $\varphi_1(A_0)$. Предложение доказано.

§ 4. Следы на JW-алгебрах и обертывающих W^*-алгебрах

В настоящем параграфе мы рассмотрим понятие следа на JW-алгебре (или, более общо,— на JBW-алгебре) и исследуем вопрос о возможности продолжения следа, заданного на JW-алгебре A, до следа на обертывающей W^*-алгебре $\mathcal{U}(A)$. В отличие от W^*-алгебр в теории йордановых алгебр различными авторами понятие следа вводилось по-разному, причем было не совсем ясно, эквивалентны ли все эти определения. Поэтому этот параграф мы начнем с результата, показывающего эквивалентность различных определений конечного следа на JBW-алгебре.

Введем некоторые обозначения, общепринятые в теории йордановых алгебр. Тройное йорданово произведение элементов x, y, z йордановой алгебры определяется как

$$\{xyz\}=(x \circ y)\circ z-(z \circ x)\circ y+(y \circ z)\circ x,$$

в частности, если алгебра специальна, то $\{xyz\}=\frac{1}{2}\{xyz+zyx\}$. При $z=x$ получаем уже рассмотренный в § 1 оператор $U_x y=\{xyx\}$.

Теорема 4.1. Пусть A—JBW-алгебра, φ — состояние на A. Следующие семь условий эквивалентны:

(i) $\varphi(U_x y^2)=\varphi(U_y x^2)$ для всех x, $y \in A$;

(ii) $\varphi(x)=\varphi(U_p x)+\varphi(U_{1-p}x)$ для всех $x \in A$ и проекторов $p \in A$;

(iii) $\varphi(x \circ y) \geqslant 0$ для всех положительных x, $y \in A$;

(iv) $\varphi(x \circ y) \leqslant \|x\| \varphi(|y|)$ для всех x, $y \in A$;

(v) $\varphi(U_s x)=\varphi(x)$ для всех $x\in A$ и симметрий $s\in A$ (т. е. $s^2=1$);

(vi) $\varphi(x\circ(y\circ z))=\varphi((x\circ y)\circ z)$ для всех $x, y, z\in A$;

(vii) $\varphi(U_y x)=\varphi(y^2\circ x)$ для всех $x, y\in A$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $x\in A^+$, тогда

$$\varphi(U_p x)+\varphi(U_{1-p}x)=\varphi\left(U_{x^{\frac{1}{2}}}p\right)+\varphi\left(U_{x^{\frac{1}{2}}}(1-p)\right)=$$

$$=\varphi\left(U_{x^{\frac{1}{2}}}1\right)=\varphi(x).$$

Так как $A=A^+-A^+$, то утверждение доказано.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Для любого проектора $p\in A$ и $x\in A^+$, очевидно, имеет место тождество $p\circ x=\frac{1}{2}(x+U_p x-U_{1-p}x)$ (заметим, что все такие тождества в силу теоремы Ширшова достаточно проверить только для специальных йордановых алгебр). Так как $U_pU_p=U_p$ и $U_pU_{1-p}=0$, то $U_p(p\circ x)=U_p x$ и $U_{1-p}(p\circ x)=0$. Поэтому из (ii) следует, что

$$\varphi(p\circ x)=\varphi(U_p(p\circ x))+\varphi(U_{1-p}(p\circ x))=\varphi(U_p x)\geqslant 0$$

в силу положительности оператора U_p [121; с. 133, теорема 3]. Так как конус, порожденный проекторами, плотен по норме в A^+, то $\varphi(x\circ y)\geqslant 0$ для всех $x, y\in A^+$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Так как функционал $x\to\varphi(x\circ y)$ является положительным в силу (iii) для $y\in A^+$, то его норма совпадает со значением функционала на 1, т. е. $\varphi(x\circ y)\leqslant\|x\|\varphi(y)$ для всех $x\in A$. Если же $y\in A$ — произвольный элемент, то, разлагая y на положительную и отрицательную части $(y=y_+-y_-)$, получаем

$$\varphi(x\circ y)=\varphi(x\circ y_+)-\varphi(x\circ y_-)\leqslant\|x\|\varphi(y_++y_-)=\|x\|\varphi(|y|).$$

(iv) $\Rightarrow$ (v). Если $x\in A^+$, $-1\leqslant t\leqslant 1$, то положим

$$a=(1+t)x+(1-t)U_s x+2(1-t^2)^{1/2}s\circ x,$$

$$b=(1+t)^{1/2}1+(1-t)^{1/2}s.$$

Прямой подсчет показывает, что $a=U_b x\geqslant 0$. В силу тождества $y\circ U_y z=\{y^2zy\}$, верного в произвольной йордановой алгебре, имеем $s\circ U_s z=\{1zs\}=s\circ z$. Следовательно,

$$s\circ a=(1+t)s\circ x+(1-t)s\circ x+2(1-t^2)^{1/2}s\circ(s\circ x)=$$

$$=2s\circ x+(1-t^2)^{1/2}(x+U_s x).$$

В силу (iv) $\varphi(s\circ a)\leqslant\varphi(a)$; отсюда

$$0 \leqslant \varphi(a - s\circ a) = \left(1 - (1 - t^2)^{1/2}\right)\varphi\left(x + U_s x - 2s\circ x\right) + t\varphi\left(x - U_s x\right)$$

для всех t, сколь угодно близких к нулю. Так как $1 - (1 - t^2)^{1/2} \sim \frac{1}{2} t^2$ при $t \to 0$, то $\varphi\left(x - U_s x\right) = 0$.

(v) $\Longrightarrow$ (vi). По теореме Ширшова—Макдональда для всех $x, y, z \in A$ имеет место тождество

$$U_y \{yxz\} = 2y^2\circ\{xzy\} - \{xzy^3\}. \tag{1}$$

По определению тройного йорданова произведения,

$$2(x\circ y)\circ z = \{xyz\} + \{yxz\},$$
$$2x\circ(y\circ z) = \{xzy\} + \{xyz\}.$$

Поэтому для доказательства (vi) достаточно проверить, что

$$\varphi(\{yxz\}) = \varphi(\{xzy\}), \tag{2}$$

а вследствие того, что линейные комбинации симметрий плотны в A $\left(\text{так как всякий проектор имеет вид } p = \frac{1-s}{2}, \text{ где } s^2 = 1\right)$, то (2) достаточно проверить, когда y — симметрия, т. е. $y^2 = 1$. Но в силу (v) и (1) имеем

$$\varphi(\{yxz\}) = \varphi\left(U_y \{yxz\}\right) = \varphi(2y^2\circ\{xzy\} - \{xzy^3\}) = \varphi(\{xzy\}),$$

так как $y^2 = 1$, $y^3 = y$.

(vi) $\Longrightarrow$ (vii). Так как $U_y x = 2y\circ(y\circ x) - y^2\circ x$, то в силу (vi)

$$\varphi(y^2\circ x) = \varphi(y\circ(y\circ x)) = \frac{1}{2}\varphi\left(U_y x + y^2\circ x\right),$$

т. е. $2\varphi(y^2\circ x) = \varphi\left(U_y x\right) + \varphi(y^2\circ x)$, отсюда следует (vii).

(vii) $\Longrightarrow$ (i). В силу (vii) имеем

$$\varphi\left(U_y x^2\right) = \varphi(y^2\circ x^2) = \varphi(x^2\circ y^2) = \varphi\left(U_x y^2\right)$$

для всех $x, y \in A$. Теорема доказана.

Теперь, взяв в качестве свойства, характеризующего конечный след, условие (v) в теореме 4.1, введем понятие следа (не обязательно конечного) в произвольной JBW-алгебре.

Определение. След на JBW-алгебре A — это числовая функция τ на множестве A^+ положительных элементов A со значениями в $[0, +\infty]$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$ для всех $x, y \in A^+$;

2) $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$ для всех $x \in A^+$, $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant 0$, где подразумевается, что $0\cdot(+\infty) = 0$;

3) $\tau\left(U_s x\right) = \tau(x)$ для всех $x \in A^+$ и для любой симметрии $s \in A$.

Если A является JW-алгеброй, то последнее условие перепишется, очевидно, в виде

$$\tau(sxs) = \tau(x).$$

След τ называется:

точным, если $\tau(x) > 0$ для всех $x \in A^+$, $x \neq 0$;
конечным, если $\tau(\mathbf{1}) < +\infty$;

полуконечным, если для любого $x \in A^+$ существует $y \in A^+$, $y \neq 0$, $y \leqslant x$, такой, что $\tau(y) < +\infty$;

нормальным, если для любой монотонно возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}$ в A^+ имеет место равенство $\tau(\sup x_\alpha) = \sup \tau(x_\alpha)$.

Замечания. 1. Всякий конечный след на JBW-алгебре A можно по линейности продолжить до линейного функционала на A. Таким образом, конечный след на JBW-алгебре A — это положительный линейный функционал на A, удовлетворяющий условиям (i) — (vii) теоремы 4.1.

2. Условие 3) в определении следа означает, что τ принимает одинаковые значения на эквивалентных идемпотентах. Так как для любых двух идемпотентов e и f в JBW-алгебре идемпотенты $e \vee f - e$ и $f - e \vee f$ эквивалентны через симметрию [121, с. 159], то $\tau(e \vee f) = \tau(e \vee f - e) + \tau(e) = \tau(f - e \wedge f) + \tau(e)$. В частности, $\tau(e \vee f) \leqslant \tau(e) + \tau(f)$ для любых идемпотентов $e, f \in A$. Отсюда по индукции следует, что $\tau(\sup f_k) \leqslant \sum \tau(f_k)$ для любого конечного семейства идемпотентов $\{f_k\} \subset A$. Если же след τ нормален, то это неравенство верно для любого семейства идемпотентов $\{f_k\}$ (не обязательно конечного).

3. Из предыдущего замечания следует, что множество идемпотентов $\{e \in \nabla : \tau(e) = 0\}$ направлено вверх. Если τ — нормальный след, то $p = \sup\{e \in \nabla : \tau(e) = 0\}$ является наибольшим идемпотентом со свойством $\tau(p) = 0$. Так как $\tau(U_s p) = \tau(p) = 0$, то $U_s p \leqslant p$, отсюда $U_s p = p$ для любой симметрии $s \in A$, т. е. p — центральный идемпотент в A. Положим $s(\tau) = \mathbf{1} - p$ и назовем $s(\tau)$ носителем следа τ. Тогда $s(\tau)$ — центральный идемпотент, $\tau \equiv 0$ на $(\mathbf{1} - s(\tau)) \circ A^+$, и след τ точен на $s(\tau) \circ A^+$.

Пример. Пусть $A = \mathbf{R}u \oplus N$ — спин-фактор, построенный на вещественном гильбертовом пространстве A с фиксированным единичным вектором u, $N = \{u\}^\perp$. Для любого $a = \alpha u + x$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x \in N$, положим $\tau_0(a) = \alpha$. Тогда τ является точным нормальным конечным следом на A с $\tau_0(\mathbf{1}) = 1$. В самом деле, линейность функционала τ очевидна и $\tau_0(\mathbf{1}) = \tau_0(1 \cdot u + 0) = 1$. Так как $A^+ = \{a = \alpha u + x : \alpha \geqslant \|x\|\}$, то $\tau_0(a) \geqslant 0$ при $a \geqslant 0$, т. е. τ — состояние. Далее, если $a = \alpha u + x \geqslant 0$ и $b = \beta u + y \geqslant 0$, т. е. $\alpha \geqslant \|x\|$, $\beta \geqslant \|y\|$, то в силу неравенства $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ имеем

$$\tau_0(a \circ b) = \tau((\alpha\beta + \langle x|y\rangle)u + (\beta x + \alpha y)) = \alpha\beta + \langle x|y\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \alpha\beta - \|x\|\|y\| \geqslant 0;$$

это значит, что $\tau_0(a \circ b) \geqslant 0$ для всех $a, b \in A^+$. По теореме 4.1 (iii), τ_0 является следом. Нормальность τ_0 очевидна, так как A имеет тип I_2. Нетрудно показать, что τ — это единственный с точностью до скалярного кратного след на спин-факторе A. Таким образом, на произвольном спин-факторе существует единственный канонический след τ_0, $\tau_0(1) = 1$.

Начиная с этого момента будем считать, что A—JW-алгебра. Первый вопрос, который мы исследуем в этом параграфе,— это вопрос о продолжении следа на JW-алгебре до следа на обертывающей W^*-алгебре.

Теорема 4.2. Пусть R — вещественная W^*-алгебра (или просто W^*-алгебра), τ — след на JW-алгебре $A = R_{\mathrm{SA}}$. Тогда $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ для всех $x \in R$.

Доказательство. Пусть $u \in R$ — произвольный унитарный оператор, т. е. $u^*u = uu^* = 1$. Рассмотрим автоморфизм α JW-алгебры, определенный как $\alpha(a) = u^*au$, $a \in \mathrm{A}$. Так как $A = R_{\mathrm{SA}}$, то, очевидно, A — обратимая JW-алгебра. Из [143; теорема 1.4] следует, что автоморфизм α представим в виде конечного произведения инволюций $U_s : a \to sas$, где s — симметрия в A, т. е. $u^*au = s_1 \cdots s_n a s_n \cdots s_1$, где $s_1, \ldots, s_n$ — симметрии в A (более того, если R не имеет слагаемых типа $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, то сам унитарный оператор u есть произведение конечного числа симметрий [143; теорема 1.6]). Поэтому в силу свойства 3) следа $\tau(u^*au) = \tau(a)$ для всех $a \in A^+$ и любого унитарного оператора $u \in R$.

Пусть теперь x — произвольный элемент из R. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|x\| < 1/2$. Тогда оператор $1 + x$ обратим и, следовательно, в его полярном разложении $(1 + x) = u|1 + x|$, u является унитарным оператором. Покажем, что $u \in R$. Если R — W^*-алгебра, то утверждение очевидно. Если R — вещественная W^*-алгебра, то утверждение вытекает из следующей леммы.

Лемма. Пусть R — вещественная W^*-алгебра, $x \in R$, $x = u|x|$ — полярное разложение x, где u — частичная изометрия на H с начальным проектором $e = \mathrm{supp}\, x$ и конечным проектором $f = \mathrm{range}\, x$ (т. е. $e = u^*u$, $f = uu^*$). Тогда $u \in R$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = R + iR$ — обертывающая W^*-алгебра для R (см. § 3). Так как $u \in v$, то существуют v, $w \in R$, такие, что $u = v + iw$, т. е. $x = v|x| + iw|x| \in R$. Так как $R \cap iR = \{0\}$, то $w|x| = 0$, т. е. $x = v|x|$. Далее $\|x\xi\| = \||x|\xi\|$ для всех $\xi \in H$, значит, v — изометрия на $e = \mathrm{supp}\, x$ и, следовательно, $v^*v \geqslant e$. Так как $e = \mathrm{supp}\, x = u^*u \in R$, то $e = u^*u = v^*v + w^*w + i(v^*w - w^*v) = v^*v + w^*w \geqslant v^*v \geqslant e$, т. е. $w^*w = 0$ или $u = v \in \mathrm{R}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 4.2. Так как унитарный оператор u в полярном разложении $(1+x)=u|1+x|$ принадлежит R, то в силу сказанного в начале доказательства теоремы имеем

$$\tau((x+1)^*(x+1))=\tau(|x+1|u^*u|x+1|)=$$
$$=\tau(|x+1|^2)=\tau(u|x+1|^2u^*)=\tau((x+1)(x+1)^*),$$

т. е. $\tau(x^*x+x+x^*+1)=\tau(xx^*+x+x^*+1)$. Так как $\|x+x^*\|\leqslant\|x\|+\|x^*\|<1$ и элемент $x+x^*$ лежит в $R_{SA}=A$, то $x+x^*+1\in A^+$. Поэтому в силу свойства 1) следа последнее равенство перепишется в виде

$$\tau(x^*x)+\tau(x+x^*+1)=\tau(xx^*)+\tau(x+x^*+1),$$

отсюда $\tau(x^*x)=\tau(xx^*)$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 4.2 показывает, что если JW-алгебра A является эрмитовой частью W^*-алгебры, то определение следа на JW-алгебре A согласуется с определением следа на W^*-алгебрах.

Теорема 4. 3. Пусть R — вещественная W^*-алгебра, $\mathcal{U}=R+iR$ — ее обертывающая W^*-алгебра, τ — нормальный след на JW-алгебре $A=R_{SA}$. Тогда τ можно продолжить до нормального следа τ_1 на W^*-алгебре $\mathcal{U}$. Если τ — точный след, то τ_1 также точен. Если след τ конечен (полуконечен), то τ_1 конечен (полуконечен).

Доказательство. Пусть $x=a+ib\in\mathcal{U}^+$, a, $b\in R$. В силу следствия предложения 3.5 $a\in R^+=A^+$. Положим $\tau_1(x)=\tau(a)$. Так как $R\cap iR=\{0\}$, то этим корректно определена функция τ_1: $\mathcal{U}^+\to[0,+\infty]$, удовлетворяющая условиям

1) $\tau_1(x+y)=\tau_1(x)+\tau_1(y)$ для всех x, $y\in\mathcal{U}^+$;

2) $\tau_1(\lambda x)=\lambda\tau_1(x)$ для всех $x\in\mathcal{U}^+$, $\lambda\in R$, $\lambda\geqslant 0$.

Покажем, что τ_1 — след, т. е. $\tau_1(x^*x)=\tau_1(xx^*)$ для всех $x\in\mathcal{U}$. Пусть $x=a+ib$, a, $b\in R$. Тогда

$$x^*x=(a^*-ib^*)(a+ib)=a^*a+b^*b+i(a^*b-b^*a).$$

По определению τ_1: $\tau_1(x^*x)=\tau(a^*a)+\tau(b^*b)$. Аналогично, $\tau_1(xx^*)=\tau(aa^*)+\tau(bb^*)$. Так как a, $b\in R$, то в силу теоремы 4. 2 $\tau_1(x^*x)=\tau_1(xx^*)$, т. е. τ_1 — след на $\mathcal{U}$.

Предположим, что след τ точен и $\tau_1(x)=0$ для $x=a+ib\in\mathcal{U}^+$. Тогда $a\in A^+$ и $\tau(a)=0$. Отсюда в силу точности τ следует, что $a=0$, т. е. $x=ib\in\mathcal{U}^+$. Из леммы 4 (ii) § 3 следует, что $ib=0$, а значит, $x=0$. Поэтому след τ_1 — точный.

Если τ — конечный след, то, по построению, τ_1 — также конечный след. Докажем нормальность τ_1. Пусть сеть $\{a_\alpha+ib_\alpha\}\subset\mathcal{U}^+$

монотонно возрастает к $a+ib \in \mathcal{U}^+$, где a_α, b_α, $a, b \in R$. В силу следствия предложения 3. 5 сеть $\{a_\alpha\} \subset A^+$ монотонно возрастает к a. Так как след τ нормален, то $\tau_1(a_\alpha + ib_\alpha) = \tau(a_\alpha) \uparrow \tau(a) = \tau_1(a+ib)$, т. е. τ_1 — нормальный след.

Наконец, допустим, что след τ полуконечен. В силу [137; гл. V, лемма 2. 13] существует центральный проектор $z \in \mathcal{U}$, такой, что τ_1 полуконечен на $z\mathcal{U}$ и $\tau_1(x) = +\infty$ для всех $x \in (1-z)\mathcal{U}^+$, $x \neq 0$, Допустим, что $1-z \neq 0$. Тогда $1-z = a_0 + ib_0$ где $a_0, b_0 \in R$, $a_0 \in A^+$, так как $1-z \geqslant 0$. Так как z — центральный проектор и $R \cap iR = \{0\}$, то $a_0 \in Z_A$. Для любого ненулевого элемента $y \in A^+$, $y \leqslant a_0$, имеем $(1-z)y = a_0 y + ib_0 y \neq 0$, и поэтому $\tau(a_0 y) = \tau_1((1-z)y) = +\infty$. С другой стороны, $\tau(a_0 y) = \tau(y^{1/2} a_0 y^{1/2}) \leqslant \|a_0\| \tau(y)$. Следовательно, $\tau(y) = +\infty$ для всех ненулевых $y \in A^+$, $y \leqslant a_0$. Это противоречит полуконечности τ. Отсюда $1-z=0$, т. е. τ_1 — полуконечный след. Теорема доказана.

Следствие. Пусть A — обратимая JW-алгебра с нормальным следом τ, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$ — ее обертывающая W^*-алгебра. Тогда след τ можно продолжить до нормального следа τ_1 на $\mathcal{U}$. Если след τ точен (конечен, полуконечен), то след τ_1 также точен (конечен, полуконечен).

Доказательство. В силу леммы 1 § 3 достаточно рассмотреть два случая:

1) A — эрмитова часть W^*-алгебры;
2) A — эрмитова часть вещественной W^*-алгебры.

В первом случае утверждение очевидно, во втором доказано в теореме 4.3.

Замечание. В последнем следствии обратимость JW-алгебры A существенна. В самом деле, если A — спин-фактор счетной размерности, то C^*-алгебра B, порожденная A, является простой и сепарабельной (C^*-алгебра канонических антиперестановочных соотношений [173; гл. 3]) и имеет единственный след $\tau(\tau(1)=1)$, продолжающий канонический след τ_0 на A. Для каждого состояния ρ на B пусть π_ρ — ГНС-представление B в гильбертовом пространстве H_ρ с циклическим вектором $\xi_\rho \in H_\rho$, т. е $\rho(x) = (\pi_\rho(x)\xi_\rho, \xi_\rho)$, $x \in B$. Так как B — простая C^*-алгебра, то π_ρ является изоморфизмом и $\pi_\rho(A)$ порождает $\pi_\rho(A)''$ как W^*-алгебру, т. е. $\mathcal{U}(\pi_\rho(A)) = \pi_\rho(A)''$. Известно, что C^*-алгебра B канонических антиперестановочных соотношений имеет представления типов I_∞, II_1, II_∞ и III. Таким образом, в зависимости от состояния ρ спин-фактор $\pi_\rho(A)$ изоморфный A может порождать все типы W^*-алгебр. В частности, след τ_0 на спин-факторе $\pi_\rho(A)$ не всегда можно продолжить до следа на обертывающей W^*-алгебре. Однако, если в качестве состояния ρ на B, по которому строится ГНС-представление π_ρ, взять след τ, то $\pi_\tau(A)''$ является инъективным W^*-фактором типа II_1 и единственный след на $\pi_\tau(A)''$ есть продолжение следа τ_0 на $\pi_\tau(A)$ [139, 155].

§ 5. Критерии типов JW-алгебр

Полученные в предыдущем параграфе результаты позволяют установить критерии типов JW-алгебр в терминах существования нормальных следов на этих алгебрах.

Теорема 5.1. *JW-алгебра A модулярна тогда и только тогда, когда она обладает разделяющим семейством нормальных конечных следов.*

Доказательство. Пусть A — модулярная JW-алгебра. В силу предложения 2.11 на A существует точный нормальный центрозначный след Φ: $A \to Z_A$. Если $\{\varphi_\nu\}$ — разделяющее семейство нормальных состояний на A, которое существует в силу следствия теоремы 1. 3, то легко видеть, что $\{\tau_\nu = \varphi_\nu \circ \Phi\}$ является разделяющим семейством конечных следов на A. Обратно, пусть A обладает разделяющим семейством нормальных конечных следов $\{\tau_\nu\}$. Если A имеет тип I_2, то модулярность A очевидна. Поэтому в силу теоремы 3. 8 можно предположить, что A — обратимая JW-алгебра. Из следствия теоремы 4. 3 вытекает, что все τ_ν можно продолжить до конечных нормальных следов на обертывающей W^*-алгебре $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$, причем из самого способа продолжения следов (см. доказательство теоремы 4. 3) видно, что полученное семейство нормальных конечных следов является разделяющим для W^*-алгебры $\mathcal{U}$. Следовательно, $\mathcal{U}$ — конечная W^*-алгебра [137; гл. V, теорема 2. 4], т.е. решетка проекторов $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ в W^*-алгебре $\mathcal{U}$ модулярна [137; гл. V, теорема 1.37]. Так как решетка $\mathcal{P}_A$ проекторов JW-алгебры A является правильной подрешеткой в $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ (в силу слабой замкнутости A), то решетка $\mathcal{P}_A$ — также модулярна, т. е. A — модулярная JW-алгебра. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 5.1 непосредственно вытекает следующий результат.

Предложение 5.2. *Обратимая JW-алгебра A модулярна в том и только в том случае, когда ее обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}$ конечна.*

Теперь рассмотрим локально-модулярный случай.

Предложение 5.3. Если обратимая JW-алгебра A локально-модулярна, то ее обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}$ полуконечна.

Доказательство. По определению локальная модулярность A означает, что в A существует модулярный проектор e с центральным носителем, равным $\mathbf{1}$. Полуконечность $\mathcal{U}$ означает существование в $\mathcal{U}$ конечного проектора с центральным носителем $\mathbf{1}$. Поэтому предложение 5.3 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Пусть A — обратимая JW-алгебра:

а) проектор $e \in A$ модулярен в A тогда и только тогда, когда он конечен в W^*-алгебре $\mathcal{U}$;

б) если $z_0(a)$ $(z_1(a))$ означает центральный носитель элемента $a \in A$ относительно JW-алгебры A (относительно W^*-алгебры A), то $z_0(a) = z_1(a)$ для любого $a \in A$.

Доказательство. Если $A = \mathcal{U}_{SA}$, то оба утверждения очевидны. Поэтому в силу леммы 1 из § 3 можно предположить, что $R \cap iR = \{0\}$, где $R = R(A)$.

а) Если проектор e конечен в $\mathcal{U}$, то модулярность e в A очевидна (см. теорему 5.1). Обратно, пусть проектор e модулярен в A. Тогда JW-алгебра eAe является модулярной и совпадает с эрмитовой частью вещественной W^*-алгебры eRe, причем $e\mathcal{U}e = eRe + ieRe$. Поэтому разделяющее семейство конечных нормальных следов на eAe можно продолжить по теореме 4.2 до разделяющего семейства нормальных конечных следов на $e\mathcal{U}e$, т. е. e — конечный проектор в $\mathcal{U}$.

б) Пусть $a \in A$, $z_0 = z_0(a)$, $z_1 = z_1(a)$. Очевидно, что $z_1 \leqslant z_0$. Рассмотрим отображение $\Psi\colon \mathcal{U} \to R$, построенное в следствии предложения 3.5. Так как $R + iR = \mathcal{U}$, $R \cap iR = \{0\}$, то $z_1 = x + iy$, где x, y — центральные элементы в R, причем $x = \Psi(z_1)$. В силу следствия из 3.5 $0 \leqslant x \leqslant z_0 = \Psi(z_0)$. Далее, так как $z_1 a = a = xa + iya$, то из $R \cap iR = \{0\}$ следует, что $a = xa$. Но $x \in R_{SA} = A$, т. е. $x \in Z_A$. Следовательно, по свойству центрального носителя $z_0 \leqslant x$, т. е. $x = z_0$. Так как $z_1 = z_0 + iy \leqslant z_0$, то $-iy \geqslant 0$, значит, $iy \in (iR)^+$. Из леммы 4 § 3 следует, что $iy = 0$, т. е. $z_1 = z_0$. Лемма доказана.

Предложение 5.4. Пусть A — локально модулярная JW-алгебра. Тогда для любого ненулевого модулярного проектора $e \in A$ существует полуконечный нормальный след τ_e на A, такой, что $0 < \tau_e(e) < +\infty$, и носитель $s(\tau_e)$ этого следа не превосходит центрального носителя $z(e)$ проектора e.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 5.1, можно сразу предположить, что JW-алгебра A обратима. Так как A — локально-модулярная JW-алгебра, то ее обертывающая

W^*-алгебра $\mathcal{U}$ полуконечна. В силу леммы 1 проектор e конечен в $\mathcal{U}$. Из [116; лемма 2.5.3] следует существование на $\mathcal{U}$ полуконечного нормального следа τ, такого, что $0 < \tau(e) < +\infty$. Положим $\tau_e(x) = \tau(z(e)x)$, где $z(e)$ — центральный носитель e в A и $\mathcal{U}$, $x \in A$. Очевидно, τ_e — нормальный след на A и $0 < \tau_e(e) = \tau(e) < +\infty$. Нужно лишь показать полуконечность τ_e. Пусть $q \in \mathcal{P}_A$ — произвольный проектор, $\tau_e(q) \neq 0$. Тогда $p = z(e)q \neq 0$. Так как $p \leqslant z(e)$, то в силу предложения 4 из [121; с. 158] проекторы e и p связаны, т. е. существуют ненулевые эквивалентные проекторы $p_1 \leqslant p$ и $e_1 \leqslant e$. Значит $\tau_e(p_1) = \tau_z(e_1) \leqslant \tau_e(e) < +\infty$ и $0 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant q$, т. е. для любого $q \in \mathcal{P}_A$ существует ненулевой проектор $p_1 \leqslant q$ с $\tau_e(p_1) < +\infty$. Следовательно, τ_e — полуконечный след, и по построению видно, что $s(\tau_e) \leqslant z(e)$. Предложение доказано.

Теорема. 5.5. JW-алгебра A локально-модулярна тогда и только тогда, когда на ней есть точный нормальный полуконечный след.

Доказательство. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на A. Для любого ненулевого проектора $e \in A$ существует проектор $q \leqslant e$ с $\tau(q) < +\infty$. Тогда qAq — JW-алгебра, обладающая точным нормальным конечным следом, и поэтому модулярна, т. е. q — модулярный проектор. Следовательно, всякий, ненулевой проектор в A мажорирует ненулевой модулярный проектор, т. е. A — локально-модулярная JW-алгебра.

Обратно, пусть A — локально-модулярная JW-алгебра, $\{\tau_i\}$ — максимальное семейство полуконечных нормальных следов на A с ортогональными носителями. Положим $\tau(x) = \sum \tau_i(x)$, $x \in A^+$. Как и для W^*-алгебр [137; гл. V. лемма 2. 12], нетрудно показать, что τ — полуконечный нормальный след на A, причем $s(\tau) = \sum s(\tau_i)$. Покажем, что τ — точный след, т. е. $s(\tau) = 1$. Если это не так, то в силу локальной модулярности A существует ненулевой модулярный проектор $e \leqslant 1 - s(\tau)$. В силу предложения 5. 4 существует ненулевой полуконечный нормальный след τ_e на A с $s(\tau_e) \leqslant z(e) \leqslant 1 - s(\tau)$, т. е. $s(\tau_e)$ ортогонален всем $s(\tau_i)$, что противоречит максимальности семейства (τ_i). Поэтому $s(\tau) = 1$. Теорема доказана.

Теорема 5. 6. JW-алгебра A чисто немодулярна тогда и только тогда, когда на ней нет ненулевых полуконечных нормальных следов.

Доказательство. Если τ — нормальный полуконечный след на чисто немодулярной JW-алгебре A с носителем $s(\tau)$, то JW- подалгебра $s(\tau)A$ обладает точным нормальным полуконечным следом τ и поэтому локально-модулярна. Следовательно, $s(\tau) = 0$, т. е. $\tau \equiv 0$.

Обратно, пусть на JW-алгебре A нет нормальных полуконечных следов и $A = fA + hA$ — разложение A на локально-модулярную и чисто немодулярную части по центральным проекторам f, h, $f + h = 1$ (предложение 2.7). Тогда в силу теоремы 5. 5 на fA есть точный нормальный полуконечный след τ. Положив $\tau_0(x) = \tau(fx)$, $x \in A^+$, получим нормальный полуконечный след τ_0 на A с носителем f. Поэтому $f = 0$, т. е. A — чисто немодулярная JW-алгебра. Теорема доказана.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ I

§ 1. Понятия JW- и JBW-алгебр были впервые введены в работах Альфсена, Шульца, Штермера [11, 166], хотя предварительные исследования в этом направлении уже имелись в работах Янссена [177—180]. Теоремы 1.1, 1.2, 1.5 и 1.6, а также предложение 1.7 доказаны в [11], а теоремы 1.3 и 1.4 — в [166]. Ослабленный вариант теоремы 1.4 для JB-алгебр (теорема Гельфанда — Наймарка) получен в работе [11] (см. также [162]). Материалы этого параграфа подробно изложены в книге [155] (см. также монографии [81, 121]). Из других важных аспектов теории йордановых банаховых алгебр отметим связь с теорией самодуальных конусов в гильбертовых пространствах [46—50, 81], связь с некоммутативной спектральной теорией [6, 8, 10], исследования по геометрии пространств состояний JB- и C^*-алгебр [7, 9, 14, 82, 127]. Порядковые свойства JB-алгебр изучались в работах [45, 57, 62], их автоморфизмы и дифференцирования — в работах [142—143], идеалы и смежные вопросы — в [51, 168, 169], тензорные произведения — в статьях [67, 154]. Аналоги некоторых аспектов теории C^*-алгебр развивались в работах [63—65, 110, 111, 153, 170—172], связь йордановой и лиевой структур в операторных алгебрах изучалась в [115]. В недавно вышедшей книге Упмайера [141] рассмотрена связь JB-алгебр с теорией голоморфных функций. Более подробную библиографию по теории JB-алгебр и обзор других результатов можно найти в книгах [81, 155].

§ 2. Все результаты этого параграфа принадлежат Топпингу [138], который на случай JW-алгебр перенес и многие другие результаты из структурной теории W^*-алгебр и, в частности, построил теорию сравнения проекторов (теорию размерности) в JW-алгебрах. Следует отметить, что вся эта теория без труда обобщается на случай произвольных JBW-алгебр [169]. В такой общей форме она изложена в книге [155]. Обобщение предложения 2.1 на произвольные JB-алгебры получено в [58].

§ 3. Основные результаты этого параграфа получены Штёрмером [158—161]. Бесконечномерные спин-факторы впервые были исследованы Топпингом [138] и Штёрмером [159, 161]. Абстрактное определение спин-фактора введено Топпингом [139] (см. также [101]). Теорема 3.7 принадлежит Топпингу [139]. Штёрмер [159] доказал, что JBW-фактор имеет тип I_2 тогда и только тогда, когда он является спин-фактором. Спин-факторы малой размерности изучались в работах [112, 113, 154]. В [129, 130] доказано, что всякая JBW-алгебра типа I разлагается в прямую сумму JBW-алгебр типа I_n вида $L^\infty(\Omega, \mu, M)$, где M—JBW-фактор типа I_n. Представление JBW-алгебр типа I_n в виде $C(X, M)$, где X — компактное хаусдорфово пространство, рассматривается в книге [155], в которой отдельная глава посвящена изучению спин-факторов. Предложение 3.9 о двупорожденной JBW-алгебре A_0 частично (без свойства обратимости A_0) доказано в [152].

§ 4. Понятие конечного следа на JW-алгебре ввел Топпинг [138]. Различные понятия следа применялись в работах [46, 81, 95, 178]. Теорема 4.1 доказана в работе Педерсена и Штёрмера [109]; ранее она частично была доказана в [16]. Позже Бердикулов [55] распространил этот результат для произвольных (не обязательно конечных) следов на JBW-алгебрах. Свойства следов на спин-факторах исследованы в [139]. Теоремы 4.2 и 4.3 доказана Ш. А. Аюповым [24] (см. также [163], [25]).

§ 5. Все основные результаты этого параграфа принадлежат Ш. А. Аюпову [24]. Если JW-алгебра A является эрмитовой частью W^*-алгебры, то они совпадают с классическими результатами теории W^*-алгебр [74, 116, 137]. Другое доказательство утверждения б) в лемме для произвольных JW-алгебр приведено в [159] (лемма 8.1). Если учесть, что чисто исключительная JBW-алгебра $C\left(X, M_3^8\right)$ модулярна и обладает разделяющим семейством нормальных конечных следов (точным нормальным центрозначным следом), то станет очевидной верность теорем 5.1, 5.5 и 5.6 для произвольных JBW-алгебр. Классификация JBW-алгебр, основанная на существовании нормальных следов, была предложена в [81]. Обобщением понятия конечного следа является понятие G-инвариантного состояния на JBW-алгебре A с группой G йордановых автоморфизмов. Состояние φ на A называется G-инвариантным, если $\varphi(ga) = \varphi(a)$ для всех $g \in G$, $a \in A$. В частности, если G — группа всех внутренних автоморфизмов (т. е. алгебраически порождена автоморфизмами вида U_s, где s пробегает все симметрии в A), то G-инвариантными состояниями являются в точности следы на A. По аналогии с теоремой 5.1 JBW-алгебру A с группой йордановых автоморфизмов G, т. е. йорданову динамическую систему (A, G), назовем G-конечной, если на A существует разделяющее семейство нормальных G-инвариантных состояний. Аналогично можно определить G-полуконечные, G-атомические и т. д. йордановы динамические системы [16, 42 — 44, 77, 78]. Например, в [42] доказано, что JBW-алгебра A модулярна тогда и только тогда, когда для любого внутреннего автоморфизма α и произвольного $a \in A$ существует сильный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha^k(a)$.

ГЛАВА II

КЛАССИФИКАЦИЯ JBW-ФАКТОРОВ

§ 1. Связь между типами JW-алгебры и ее обертывающей W^*-алгебры

Имея классификацию по типам JW- и W^*-алгебр, естественно рассмотреть вопрос о связи между типом JW-алгебры A и типом ее обертывающей W^*-алгебры $\mathcal{U}(A)$. Как мы увидим позже, установление этой связи имеет решающее значение для полной классификации JW-факторов.

В частном случае, когда A является эрмитовой частью W^*-алгебры, т. е. $A = \mathcal{U}(A)_{SA}$, эти типы полностью совпадают, как было доказано в § 2 первой главы. Однако вопрос становится нетривиальным, если рассмотреть произвольную JW-алгебру. Первый результат в этом направлении принадлежит Штёрмеру, который доказал следующее.

Теорема 1.1. Обратимая JW-алгебра A имеет тип I в том и только в том случае, когда ее обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(A)$ имеет тип I.

В предыдущей главе мы получили некоторые результаты, касающиеся этого вопроса в случае модулярных и локально-модулярных JW-алгебр. В настоящем параграфе приведем полное решение рассматриваемого вопроса. Имеет место следующий результат.

Теорема 1.2. Обратимая JW-алгебра A имеет тип $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, I_∞, II_1, II_∞ или III в том и только в том случае, когда ее обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$ имеет соответствующий тип.

Замечание. В теоремах 1.1 и 1.2 обратимость JW-алгебры A существенна. В самом деле, как было показано в замечании после теоремы 4.3 в главе I, если A — спин-фактор счетной размерности (JW-фактор типа I_2), то ее обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(A)$ может иметь тип I_∞, II_1, II_∞ и III.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1.2, приведем два вспомогательных результата.

Предложение 1.3. Пусть JW-алгебра A не имеет ненулевых абелевых проекторов. Тогда W^*-алгебра $\mathcal{U}=\mathcal{U}(A)$ также не содержит ненулевых абелевых проекторов.

Доказательство. В силу теоремы 3.8 из главы I A является обратимой. Если $A = \mathcal{U}_{SA}$, то утверждение очевидно. Поэтому достаточно рассмотреть случай чисто вещественной JW-алгебры A. Пусть $\mathcal{U} = e\mathcal{U} + (1-e)\mathcal{U}$ — разложение $\mathcal{U}$ на подалгебру $e\mathcal{U}$ — типа I и подалгебру $(1-e)\mathcal{U}$ без ненулевых абелевых проекторов, где $e \in Z_{\mathcal{U}}$. Нужно доказать, что $e = 0$. Допустим противное, т. е. $e \neq 0$. Так как e — центральный проектор, то $e\mathcal{U}$ является слабо замкнутым двусторонним идеалом в $\mathcal{U}$ и поэтому $e\mathcal{U} \cap A$ — слабо замкнутый йорданов идеал в A. Поэтому в A существует центральный проектор e_1, такой, что $e\mathcal{U} \cap A = e_1 A$. Так как $e_1 \leqslant e$, то $e_1\mathcal{U} = e_1(e\mathcal{U})$ — W^*-алгебра типа I. Но, очевидно, $e_1\mathcal{U} = \mathcal{U}(e_1 A)$ — W^*-алгебра, порожденная JW-алгеброй $e_1 A$, которая в силу условия теоремы не содержит ненулевых абелевых проекторов. В силу теоремы 1.1 $e_1 = 0$, т. е. $e\mathcal{U} \cap A = \{0\}$. Следовательно, к центральному проектору $e \in \mathcal{U}$ применимо предложение 3.6 гл. I. Поэтому существуют центральный проектор $g \in A$, $g \geqslant e$ и йорданов изоморфизм $\psi: (e\mathcal{U})_{SA} \to gA$. Так как $e\mathcal{U}$ имеет тип I, то в ней существует абелев проектор $p \neq 0$, т. е. $p(e\mathcal{U})p$ — коммутативная алгебра. Тогда $\psi(p) \leqslant g$ и $\psi(p)A\psi(p)$ — коммутативная алгебра, т. е. $\psi(p)$ — абелев проектор в A и, очевидно, $\psi(p) \neq 0$. Противоречие показывает, что $e = 0$. Предложение доказано.

Предложение 1.4. Если JW-алгебра A собственно немодулярна, то W^*-алгебра $\mathcal{U}$ собственно бесконечна, т. е. не содержит ненулевых центральных конечных проекторов.

Доказательство. Если e — центральный конечный проектор в $\mathcal{U}$, то, очевидно, $e\mathcal{U} \cap A$ является модулярной JW-алгеброй. Отсюда, как и в предыдущем предложении, следует, что $e\mathcal{U} \cap A = \{0\}$. Кроме того, по тем же соображениям, что и в предложении 1.3, достаточно рассмотреть случай чисто вещественной JW-алгебры A. Применяя предложение 3.6 к проектору e, найдем центральный проектор $g \in A$, $g \geqslant e$, и йорданов изоморфизм $\Phi: gA \to (e\mathcal{U})_{SA}$. Так как g — немодулярный проектор, то из предложения 2.4 гл. I следует существование бесконечной последовательности $\{g_i\}$ ортогональных проекторов, любые два из которых связаны через симметрию в gA. Тогда $\{\Phi(g_i)\}$ — бесконечная последовательность ортогональных проекторов в $e\mathcal{U}$, любые два из которых связаны через симметрию (и тем более унитарно эквивалентны) в $e\mathcal{U}$. Это противоречит конечности e. Следовательно, $e = 0$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1.2.

(i) Если A — обратимая JW-алгебра типа $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, то в силу предложения 5.2 $\mathcal{U}$ — конечная W^*-алгебра, а по теореме 1.1 $\mathcal{U}$ имеет тип I.

Обратно, пусть $\mathcal{U}$ — конечная W^*-алгебра типа I. В силу предложения 5.2 A — модулярная JW-алгебра и по теореме 2.8 гл. I существует центральный проектор $e \in A$, такой, что eA имеет тип $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, $(1-e)A$ — тип II_1. Так как $(1-e)\mathcal{U}$ является обертывающей W^*-алгеброй для $(1-e)A$, то в силу предложения 1.3 $(1-e)\mathcal{U}$ не содержит ненулевых абелевых проекторов. Так как $\mathcal{U}$ имеет тип I, то $1-e=0$, т. е. A имеет тип $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$.

(ii) Пусть A имеет тип I_∞. Так как A обратима, то по теореме 1.1, $\mathcal{U}$ имеет тип I. В силу предложения 1.4 $\mathcal{U}$ собственно бесконечна, т. е. имеет тип I_∞.

Обратно, пусть $\mathcal{U}$ имеет тип I_∞. Если e — центральный модулярный проектор в A, то в силу леммы 1 (§ 5, гл. I) e является центральным конечным проектором в $\mathcal{U}$ и поэтому $e=0$. Следовательно, A — собственно немодулярная JW-алгебра. По теореме 1.1, A имеет тип I, т. е. A — JW-алгебра типа I_∞.

(iii) Пусть A — JW-алгебра типа II_1. Согласно предложению 5.2 (гл. I), $\mathcal{U}$ — конечная W^*-алгебра, а в силу предложения 1.3 она имеет тип II_1.

Обратно, пусть $\mathcal{U}$ — W^*-алгебра типа II_1. В силу предложения 5.2 A — модулярная JW-алгебра и, согласно 2.8, существует центральный проектор $e\in A$, такой, что eA имеет тип $\mathrm{I}_{\mathrm{fin}}$, $(1-e)A$ — тип II_1. По предположению, A — обратимая JW-алгебра и поэтому eA — обратимая JW-алгебра типа I. По теореме 1.1 ее обертывающая W^*-алгебра $e\mathcal{U}=\mathcal{U}(eA)$ имеет тип I. Следовательно, $e=0$, т. е. A имеет тип II_1.

Прежде чем продолжить доказательство теоремы 1.2, приведем еще один вспомогательный результат.

Пусть $\mathcal{U}$ — произвольная W^*-алгебра, K — множество всех нормальных состояний на $\mathcal{U}$. Напомним, что на ограниченных (по норме) подмножествах $\mathcal{U}$ слабая и ультраслабая топологии совпадают и задаются семейством преднорм $\{|\omega(x)|, \omega\in K\}$, $x\in\mathcal{U}$. На ограниченных подмножествах $\mathcal{U}$ сильная и ультрасильная топологии также совпадают и определяются системой преднорм $\{[\omega(x^2)]^{1/2}, \omega\in K\}$, $x\in\mathcal{U}$ (подробности см. [137; гл. V, лемма 2.5]). Ниже, говоря об этих топологиях на JW-алгебре A или на ее обертывающей вещественной $*$-алгебре $R(A)$, мы будем подразумевать, что они индуцированы из обертывающей W^*-алгебры $\mathcal{U}(A)$.

Предложение 1.5. Пусть A — немодулярная JW-алгебра, $R=R(A)$ — ее обертывающая вещественная слабозамкнутая $*$-алгебра. Тогда отображение $x\to x^*$ разрывно в сильной топологии на единичном шаре в R.

Доказательство. Так как 1 — немодулярный проектор, то существует бесконечная последовательность $\{g_i\}$ ортогональных проекторов в A, любые два из которых связаны через симметрию (предложение 2.4). Пусть $g_1=s_ig_is_i$, $i=1, 2, \ldots$, где s_i — симметрии в A. Рассмотрим последовательность $\{t_i=s_ig_i\}$ в R. Имеем

$$t_i t_i^* = s_i g_i s_i = g_1, \quad t_i^* t_i = g_i s_i^2 g_i = g_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Если $\omega \in K$ — произвольное нормальное состояние на $\mathcal{U}(A)$, то $\sum \omega(g_i) = \omega(\sum g_i) \leqslant \omega(1) = 1$. Следовательно, $\omega(t_i^* t_i) = \omega(g_i) \to 0$ при $i \to \infty$, т. е. $t_i \to 0$ сильно. В то же время $\omega\left(t_i t_i^*\right) = \omega(g_1)$ для всех $i = 1, 2, \ldots$, т. е. $\left\{t_i^*\right\}$ не сходится сильно к 0. Так как $\|t_i\| = \|s_i g_i\| \leqslant 1$, то утверждение доказано.

Продолжим доказательство теоремы 1.2 и докажем сначала утверждение для типа III.

(iv) Пусть A — JW-алгебра типа III. Так как A обратима, то достаточно рассмотреть случай, когда A — чисто вещественная JW-алгебра. Тогда $\mathcal{U} = R + iR$ в силу теоремы 3.4 (гл. I). Рассмотрим отображение Ψ: $x + iy \to x$ из $\mathcal{U}$ в R, где $x, y \in R$. В силу следствия предложения 3.5 (гл. I) Ψ — положительное линейное отображение и ультраслабо (и значит, слабо) непрерывно на ограниченных подмножествах $\mathcal{U}$. Далее, очевидно, $\Psi(xuy) = x\Psi(u)y$ для всех $x, y \in R$, $u \in \mathcal{U}$, в силу соотношения $R \cap iR = \{0\}$. Предположим, что $\mathcal{U}$ — не типа III. Тогда в $\mathcal{U}$ существует ненулевой центральный проектор z, такой, что $z\mathcal{U}$ — полуконечная W^*-алгебра, и поэтому обладает точным нормальным полуконечным следом τ [137; гл. V, теорема 2.15].

Пусть $a \in z\mathcal{U}$ — положительный элемент с $\tau(a^2) < +\infty$. Так как $\mathcal{U} = R + iR$, то $a^2 = x_0 + iy_0$, где $x_0, y_0 \in R$. Тогда $x_0 \in R_{SA}^+ = A^+$. Существуют ненулевой спектральный проектор $e \in A$ для x_0 и положительное число λ, такие, что $e \leqslant \lambda x_0$. Для любого $t \in eRe$ имеем

$$tt^* = tet^* \leqslant \lambda t x_0 t^* = \lambda t \Psi(a^2) t^* = \lambda \Psi(ta^2 t^*) = \lambda \Psi((ta)(ta)^*).$$

Пусть $\{t_\alpha\} \subset eRe \subset z\mathcal{U}$, $\|t_\alpha\| \leqslant 1$ — произвольная сеть, сильно сходящаяся к нулю. В силу [137; гл. V, лемма 2.27] отображение $x \to ax^*$ сильно непрерывно на ограниченных подмножествах $z\mathcal{U}$, так как $\tau(a^2) < +\infty$. Следовательно, $(t_\alpha a)^* = at_\alpha^* \to 0$ сильно, т. е. $(t_\alpha a)(t_\alpha a)^* \to 0$ слабо. Так как Ψ слабо непрерывно на ограниченных подмножествах $\mathcal{U}$, то $\Psi((t_\alpha a)(t_\alpha a)^*) \to 0$ слабо. Следовательно, ввиду неравенства $0 \leqslant t_\alpha t_\alpha^* \leqslant \lambda \Psi((t_\alpha a) \times (t_\alpha a)^*)$ имеем, что $t_\alpha t_\alpha^* \to 0$ слабо, т. е. $t_\alpha^* \to 0$ сильно. Таким образом, отображение $t \to t^*$ сильно непрерывно на единичном шаре в eRe.

С другой стороны, так как A имеет тип III, то JW-алгебра eAe немодулярна. В силу предложения 1.5 отображение $t \to t^*$ разрывно в сильной топологии на единичном шаре из $R(eAe) \subset eRe$. Противоречие показывает, что $\mathcal{U}$ имеет тип III.

Обратно, пусть $\mathcal{U}$ — W^*-алгебра типа III, $f \in A$ — центральный проектор, такой, что fA — локально-модулярна, $(1-f)A$ чисто немодулярна (предложение 2.7 гл. I). В силу предложения 5.3 $f\mathcal{U} = \mathcal{U}(fA)$ — полуконечная W^*-алгебра и поэтому $f = 0$, т. е. A имеет тип III.

(v) Пусть, наконец, A — JW-алгебра типа II_∞. Тогда в силу предложения 1.3. $\mathcal{U}$ не содержит ненулевых абелевых проекторов, в силу предложения 5.3. (гл. I) — полуконечна, в силу предложения 1.4 — собственно бесконечна, т. е. $\mathcal{U}$ имеет тип II_∞.

Обратно, пусть $\mathcal{U}$ — W^*-алгебра типа II_∞, $A = fA + (1-f)A$ — разложение A на локально-модулярную и чисто немодулярную части по центральному проектору e. Так как $(1-f)\mathcal{U} = \mathcal{U}((1-f)A)$ имеет тип III в силу (iv), то $1 - f = 0$, т. е. A локально-модулярна. Из предложения 1.4 вытекает, что A не содержит центральных модулярных проекторов, кроме нуля, т. е. собственно немодулярна. Так как A обратима, то в силу теоремы 1.1 она не может содержать ненулевых абелевых проекторов, т. е. имеет тип II. Следовательно, JW-алгебра A имеет тип II_∞. Теорема 1.2 полностью доказана.

Рассмотрим коммутант A' JW-алгебры A в $B(H)$. Очевидно, A' — W^*-алгебра и ее коммутант $(A')'$ совпадает, как отмечалось в § 3 главы I, с обертывающей W^*-алгеброй $\mathcal{U}(A)$. Поэтому из доказанной теоремы и из [137; гл. V, следствие 2.24] вытекает следующий результат.

Следствие. Пусть A — обратимая JW-алгебра. Тогда

(i) A имеет тип I тогда и только тогда, когда A' имеет тип I;

(ii) A имеет тип II тогда и только тогда, когда A' имеет тип II;

(iii) A имеет тип III тогда и только тогда, когда A' имеет тип III.

§ 2. JBW-факторы типа I

Рассмотрим вопрос о классификации JBW-факторов с точностью до изоморфизма. В силу теоремы 1.4 из главы I всякий JBW-фактор, кроме исключительной алгебры M_3^8, является специальным и изоморфен некоторому JW-фактору. Поэтому вопрос фактически редуцируется к классификации JW-факторов. В этом параграфе мы дадим полное описание с точностью до изоморфизма JW-факторов типа I.

JW-факторы типа I_2 — это в точности спин-факторы, полное описание которых дано в теореме 3.7 первой главы. Поэтому достаточно описать обратимые JW-факторы. Следует отметить, что если JW-фактор изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, то наша задача, очевидно, сводится к классификации W^*-факторов и в рамках теории JW-алгебр считается решенной. Поэтому мы подробнее рассмотрим случай JW-факторов, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебр, и покажем, что и в этом случае наша проблема частично редуцируется к классификации W^*-факторов. Ясно, что если JW-фактор не изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, то он является чисто вещественным. Обратное, как мы показали в примере 1 § 3 первой главы, вообще говоря, неверно. Поэтому для выделения среди чисто вещественных JW-факторов тех, которые не изоморфны эрмитовой части W^*-алгебры, нам необходима следующая лемма.

Лемма 1. Чисто вещественный JW-фактор A не изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры тогда и только тогда, когда его обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(A)$ является W^*-фактором.

Доказательство. Необходимость. Пусть JW-фактор A не изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры. Предположим, что $\mathcal{U}(A)$ не является W^*-фактором. Тогда в силу следствия предложения 3.6 главы I существует минимальный проектор p в центре $\mathcal{U}(A)$, такой, что A изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры $p\mathcal{U}(A)$ — противоречие.

Достаточность. Пусть $\mathcal{U}(A)$ является W^*-фактором и предположим, что JW-фактор A изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, т. е. существует йорданов изоморфизм φ между эрмитовой частью W^*-алгебры $\mathcal{B}$ и JW-фактором A. Положив для $x = a + ib \in \mathcal{B}: \varphi_1(x) = \varphi(a) + i\varphi(b)$, $a, b \in \mathcal{B}_{SA}$, получим C^*-изоморфизм φ_1 из $\mathcal{B}$ на $A + iA \subset \mathcal{U}(A)$. Так как $\mathcal{U}(A)$ — W^*-фактор, то φ_1 является либо $*$-изоморфизмом, либо $*$-антиизоморфизмом [158; теорема 3.3]. В обоих случаях $A + iA = \varphi_1(\mathcal{B})$ является $*$-подалгеброй в $\mathcal{U}(A)$. Для любых $a, b \in A$ имеем $ab \in A + iA$, т. е. $ab = x + iy$, $x, y \in A$. Следовательно, $ab - x = iy \in R(A) \cap iR(A) = \{0\}$, т. е. $ab = x = x^* = ba$. Это означает, что A — абелева JW-алгебра, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Теперь приведем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 2.1. Всякий JBW-фактор типа I принадлежит одному из следующих классов (с точностью до изоморфизма):

(i) $B(H)_{SA}$ — алгебра всех ограниченных самосопряженных операторов на вещественном гильбертовом пространстве H;

(ii) $B(H)_{SA}$ — алгебра всех ограниченных самосопряженных операторов на комплексном гильбертовом пространстве H;

(iii) $B(H)_{SA}$ — алгебра всех ограниченных самосопряженных операторов на кватернионном гильбертовом пространстве H;

(iv) спин-факторы;

(v) исключительная алгебра M_3^8 эрмитовых 3×3 матриц над числами Кэли.

Более того, все эти классы попарно не пересекаются, за исключением матричных алгебр $M_2(\boldsymbol{R})_{SA}$, $M_2(\boldsymbol{C})_{SA}$ и $M_2(\boldsymbol{H})_{SA}$, которые также являются спин-факторами.

Доказательство. Пусть A—JBW-фактор типа I. Предположим, что он не изоморфен спин-фактору или алгебре M_3^8. Тогда в силу теоремы 1.4 и предложения 2.9 из главы I можно считать, что A является JW-фактором типа I_n на комплексном гильбертовом пространстве ($n \geqslant 3$). В частности, A обратим. Если A изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, то эта W^*-алгебра, будучи W^*-фактором типа I (см. § 2 главы I), изоморфна $B(H)$ для некоторого комплексного гильбертова пространства H, т. е. A изоморфен $B(H)_{SA}$, и мы имеем случай (ii). Предположим, что A не изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры. Тогда A является чисто вещественным JW-фактором, т. е. $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$, причем в силу предыдущей леммы $\mathcal{U}(A) = R(A) + iR(A)$ является W^*-фактором. В силу теоремы 1.1 W^*-фактор $\mathcal{U}(A)$ имеет тип I и поэтому можно считать, что

$$\mathcal{U}(A) = B(H) = R(A) + iR(A),$$

где H — комплексное гильбертово пространство. Согласно предложению 3.5 главы I отображение $\alpha : B(H) \to B(H)$, определенное как $\alpha(x + iy) = (x - iy)^* = x^* + iy^*$ $(x, y \in R(A))$, является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом $B(H)$ и, в частности, ультраслабо непрерывно. Поэтому существует сопряженно-линейная изометрия $j : H \to H$, такая, что $\alpha(x) = j^{-1}x^*j$, $x \in B(H)$ [160]. Так как $A = R(A)_{SA}$, то

$$A = \{x \in B(H)_{SA} : \alpha(x) = x\} = \{x \in B(H)_{SA} : xj = jx\}. \qquad (1)$$

Так как α^2 — тождественное отображение, то j^2 является скалярным кратным единичного оператора в $B(H)$, т. е. $j^2 = \lambda 1$, где $|\lambda| = 1$. Так как j коммутирует с j^2, то $j\lambda = \lambda j$. Но так как j — сопряженно-линейный оператор, то $j\lambda = \bar{\lambda} j$. Следовательно, $\lambda = \bar{\lambda}$, т. е. $\lambda = \pm 1$.

Сначала рассмотрим случай $\lambda = 1$, т. е. $j^2 = 1$. Положим $K = \{\xi \in H : j\xi = \xi\}$. Тогда K — вещественное гильбертово пространство, $H = K \oplus iK$ и $j(\xi + i\eta) = \xi - i\eta$ для $\xi, \eta \in K$. В силу соотношений (1) $x \in A$ в том и только в том случае, когда $x^* = x$ и x оставляет инвариантным подпространство K, т. е. $(x \in A) \Longleftrightarrow x|_K \in B(K)_{SA}$. Так как каждый оператор $x \in B(H)$ полностью определяется своим сужением на K, то $A \cong B(K)_{SA}$ и мы имеем случай (i).

Пусть теперь $\lambda = -1$, т. е. $j^2 = -1$. Положим $k = ij$. Легко видеть, что $i (= i1)$, j, k удовлетворяют таблице умножения кватернионов, и H можно рассмотреть как векторное пространство над телом кватернионов $\mathbf{H}$. Кроме того, операторы i, j, k изометричны и косоэрмитовы относительно вещественной части скалярного произведения в H. Таким образом, H — кватернионное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\xi\,|\,\eta)_H = \operatorname{Re}(\xi\,|\,\eta) - (\operatorname{Re}(i\xi\,|\,\eta))\,i - (\operatorname{Re}(j\xi\,|\,\eta))\,j - (\operatorname{Re}(k\xi\,|\,\eta))k.$$

В силу соотношений (1) элементы A — это в точности самосопряженные H-линейные операторы. Таким образом, мы имеем случай (iii), т. е. A попадает в один из классов, перечисленных в теореме 2.1.

Теперь покажем, что $M_2(\boldsymbol{R})_{SA}$, $M_2(\boldsymbol{C})_{SA}$ и $M_2(\boldsymbol{H})_{SA}$ являются спин-факторами. Положим

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ s_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix},\ s_5 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда легко проверить, что $s_m \circ s_n = 0$ при $m \neq n$, и спин-система $S_R = \{s_1, s_2\}$ порождает $M_2(\boldsymbol{R})_{SA}$, спин-система $S_C = \{s_1, s_2, s_3\}$ порождает $M_2(\boldsymbol{C})_{SA}$, спин-система $S_H = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ порождает $M_2(\boldsymbol{H})_{SA}$. Следовательно, все эти матричные алгебры являются спин-факторами. Отметим здесь же, что алгебра $M_2(\boldsymbol{O})_{SA} = M_2^8$ 2×2 матриц над числами Кэли $\boldsymbol{O}$ также является спин-фактором, который порождается соответствующей спин-системой из девяти симметрий.

Наконец, дизъюнктность классов изоморфных JBW-факторов, перечисленных в теореме 2.1 за указанным исключением, доказывается рассмотрением пары ортогональных минимальных идемпотентов e, f в A. Нетрудно видеть, что JBW-алгебра $U_{e+f}A = \{(e+f)A(e+f)\}$ изоморфна $M_2(\boldsymbol{R})_{SA}$, $M_2(\boldsymbol{C})_{SA}$, $M_2(\boldsymbol{H})_{SA}$, A и M_2^8 соответственно в случаях (i), (ii), (iii), (iv) и (v).

В заключение параграфа приведем один вспомогательный результат, касающийся алгебр типа I, который мы используем в дальнейшем.

Лемма 2. Пусть R — вещественная $*$-алгебра операторов на комплексном гильбертовом пространстве H, такая, что всякий самосопряженный оператор из R является скалярным кратным единичного оператора, т. е. $R_{SA} = \{\lambda\mathbf{1},\ \lambda \in \boldsymbol{R}\}$. Тогда R изоморфна либо $\boldsymbol{R}$, либо $\boldsymbol{C}$, либо телу кватернионов $\boldsymbol{H}$. При этом C^*-алгебра, порожденная R в $B(H)$, изоморфна либо $\boldsymbol{C}$, либо $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$, либо алгебре $M_2(\boldsymbol{C})$.

Доказательство. Покажем сначала, что R не содержит ненулевых топологических делителей нуля. Отсюда будет вытекать, что R изоморфно либо $\boldsymbol{R}$, либо $\boldsymbol{C}$, либо $\boldsymbol{H}$ (см., например, [80, 88]). Пусть a — ненулевой оператор в R; предположим, что существует последовательность $\{b_n\} \subset R$, такая, что $b_n a \to 0$, либо $ab_n \to 0$ равномерно. Пусть, например, $b_n a \to 0$. Тогда $a^* b_n^* b_n a = (b_n a)^* (b_n a) \to 0$. По условию, $b_n^* b_n = \alpha_n \mathbf{1}$, $\alpha_n \in \boldsymbol{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\alpha_n a^* a \to 0$, т. е. $\alpha_n = \|b_n\|^2 \to 0$, т. е.

$\|b_n\| \to 0$. Аналогично из $ab_n \to 0$ следует, что $b_n \to 0$. Это значит, что R не содержит ненулевых топологических делителей нуля, т. е. $R \cong \mathbf{R}$, либо $\mathbf{C}$, либо $\mathbf{H}$. Если $\mathcal{B}$ — C^*-алгебра, порожденная R, то в силу конечномерности R $\mathcal{B} = R + iR$. Если $R \cong \mathbf{R}$, то $\mathcal{B} \cong \mathbf{C}$; если $R \cong \mathbf{C}$, то размерность $\mathcal{B}$ над $\mathbf{C}$ равна либо 1, либо 2: в первом случае $\mathcal{B}$ изоморфна $\mathbf{C}$, во втором $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$. Пусть, наконец, $R \cong \mathbf{H}$. Так как размерность R как вещественного пространства равна 4, то размерность $\mathcal{B}$ не больше 8, т. е. комплексная размерность $\mathcal{B}$ не превосходит 4. А так как алгебра $\mathbf{H}$ и вместе с ней C^*-алгебра $\mathcal{B}$ некоммутативны, то $\mathcal{B} \cong M_2(\mathbf{C})$. Лемма доказана.

§ 3. JW-факторы и инволютивные антиавтоморфизмы W^*-алгебр

После того как в предыдущем параграфе полностью описаны JBW-факторы типа I, задача о классификации JBW-факторов сводится к классификации JW-факторов непрерывного типа, т. е. не содержащих ненулевых абелевых проекторов. Общий метод построения таких JW-факторов дается в следующей теореме.

Теорема 3.1. (i) Пусть $\mathcal{U}$ — W^*-фактор непрерывного типа α — инволютивный *-антиавтоморфизм $\mathcal{U}$. Тогда множество $A =$ $= \{x \in \mathcal{U}_{SA} : \alpha(x) = x\}$ является непрерывным JW-фактором, не изоморфным эрмитовой части W^*-алгебры, причем обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(A)$ совпадает с $\mathcal{U}$.

(ii) Обратно, для произвольного непрерывного JW-фактора A, не изоморфного эрмитовой части W^*-алгебры, существует единственный инволютивный $*$-антиавтоморфизм α W^*-фактора $\mathcal{U}(A)$, такой, что $A = \{x \in \mathcal{U}(A)_{SA} : \alpha(x) = x\}$.

Доказательство. (i). Рассмотрим множество

$$R = \{x \in \mathcal{U} : \alpha(x) = x^*\}.$$

Очевидно, R является вещественным линейным подпространством в $\mathcal{U}$. Если $x, y \in R$, т. е. $\alpha(x) = x^*$, $\alpha(y) = y^*$, то $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x) = y^*x^* = (xy)^*$, т. е. $xy \in R$. Кроме того, $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$, следовательно, R — вещественная $*$-подалгебра в $\mathcal{U}$. Так как инволюция и всякий $*$-антиавтоморфизм в W^*-алгебре непрерывны в слабой топологии [137; гл. III, следствия 3.9 и 3.10], то R замкнута в слабой топологии. Кроме того, если $x = iy$, $x, y \in R$, то $x^* = \alpha(x) = \alpha(iy) = i\alpha(y) = iy^* = (-iy)^* =$ $= -x^*$, т. е. $x^* = 0$. Значит $x = 0$, т. е. $R \cap iR = \{0\}$. Итак, R — вещественная W^*-алгебра. Следовательно, $A = R_{SA} =$ $= \{x \in \mathcal{U}_{SA} : \alpha(x) = x\}$ является чисто вещественной JW-алгеброй, поскольку $R(A) \subset R$, $R \cap iR = \{0\}$.

Далее, для любого $x \in \mathcal{U}$ имеем

$$x = \frac{x + \alpha(x^*)}{2} + i\,\frac{x - \alpha(x^*)}{2i},$$

причем

$$\alpha\left(\frac{x + \alpha(x^*)}{2}\right) = \frac{\alpha(x) + x^*}{2} = \left(\frac{x + \alpha(x^*)}{2}\right)^*,$$

$$\alpha\left(\frac{x - \alpha(x^*)}{2i}\right) = \frac{\alpha(x) - x^*}{2i} = \left(\frac{x - \alpha(x^*)}{2i}\right)^*,$$

так как $\alpha(\alpha(x)) = x$. Следовательно,

$$\frac{x + \alpha(x^*)}{2} \in R, \quad \frac{x - \alpha(x^*)}{2i} \in R,$$

т. е. $\mathcal{U} = R + iR$.

Теперь покажем, что A — JW-фактор. Пусть e — центральный проектор в A. Для любого косоэрмитова элемента $b \in R$ (т. е. $b^* = -b$) элемент $ab - ba$ является, очевидно, эрмитовым, т. е. $eb - be \in R_{\mathrm{SA}} = A$. Следовательно, $e(eb - be) = (eb - be)e$, т. е. $eb + be = 2ebe$. Умножая это равенство справа на e, получаем $eb = ebe$. Отсюда $eb = be$, т. е. e коммутирует со всеми косоэрмитовыми элементами из R. Так как всякий элемент из R представим в виде $a + b$, где $a \in R_{\mathrm{SA}} = A$, $b \in R$, $b^* = -b$, то e коммутирует со всеми элементами из R. Следовательно, e принадлежит центру алгебры $\mathcal{U} = R + iR$. Но $\mathcal{U}$ — W^*-фактор, т. е. $e = 0$, либо 1. Итак, всякий центральный проектор в A равен либо 0, либо 1, т. е. A — чисто вещественный JW-фактор. Докажем, что A не содержит минимальных проекторов. Предположим, что q — минимальный проектор в A. Тогда $qAq = \{\lambda q,\ \lambda \in R\}$. Так как $\{qRq\}_{\mathrm{SA}} = qAq$, то qRq является вещественной $*$-алгеброй операторов в $B(H)$, в которой всякий самосопряженный оператор имеет вид λq, $\lambda \in R$. В силу леммы 2 из предыдущего параграфа qRq как вещественная $*$-алгебра изоморфна либо R, либо C, либо Q. Поэтому W^*-фактор $q\mathcal{U}q = qRq + iqRq$ изоморфен либо C, либо $M_2(C)$. В частности, в $q\mathcal{U}q$, а значит, и в $\mathcal{U}$, есть минимальный проектор. Противоречие показывает, что JW-фактор A не содержит минимальных проекторов, т. е. непрерывен. Поэтому в силу предложения 2.10 главы I в A существуют четыре ортогональных проектора e_1, e_2, e_3, e_4, любые два из которых связаны через симметрию, причем $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 1$. Это значит, что для любых $i, j = 1, 2, 3, 4$ существует симметрия $s \in A$, такая, что $e_j = se_i s$, т. е. $e_j \in Re_i R$. Поэтому $1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \in Re_j R$ для любого $i = 1, 2, 3, 4$. Кроме того, очевидно, $Re_i R$ является двусторонним идеалом в R. Следовательно. $Re_i R = R$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. По теореме Мартиндейла из теории йордановых алгебр

[68; гл. III, теорема 6], R является совершенной *-алгеброй, т. е. пара (R, σ), где σ — вложение R_{SA} в R — является унитальной специальной универсальной обертывающей для йордановой алгебры $A = R_{SA}$ (подробнее см. [68; гл. II, п. 4]). В частности, R алгебраически порождается йордановой алгеброй A. Отсюда $R(A) = R$ и, следовательно, $\mathcal{U}(A) = R(A) + iR(A) = R + iR = \mathcal{U}$. Итак, A — чисто вещественный JW-фактор, у которого обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(A) = \mathcal{U}$ является W^*-фактором. По лемме 1 из предыдущего параграфа, JW-фактор A не изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры. Этим доказана первая часть теоремы 3.1.

(ii) Пусть A — непрерывный JW-фактор, не изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры. Так как A — не типа I_2, то он является обратимым и чисто вещественным. По лемме 1 из предыдущего параграфа $\mathcal{U}(A)$ является W^*-фактором. Так как $\mathcal{U}(A) = R(A) + iR(A)$ и $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$, то в силу предложения 3.5 главы I отображение $\alpha(a + ib) = a^* + ib^*$ $(a, b \in R(A))$ является инволютивным *-антиавтоморфизмом W^*-фактора $\mathcal{U}(A)$, причем, очевидно, что $A = \{x \in \mathcal{U}(A)_{SA} : \alpha(x) = x\}$. Осталось доказать единственность такого инволютивного *-антиавтоморфизма. Пусть β — другой инволютивный *-антиавтоморфизм, такой, что

$$A = \{x \in \mathcal{U}(A)_{SA} : \beta(x) = x\}.$$

Положим $\theta = \alpha \circ \beta$. Тогда, очевидно, θ является автоморфизмом W^*-алгебры $\mathcal{U}(A)$, который тождественно действует на A. Так как $R(A)$ — унитальная специальная универсальная обертывающая для A, то всякий йорданов автоморфизм A единственным образом продолжается до вещественного *-автоморфизма $R(A)$ [68; гл. II, теорема 1]. Следовательно, θ действует тождественно на $R(A)$ и, очевидно, на $\mathcal{U}(A) = R(A) + iR(A)$, т. е. $\theta = \alpha \circ \beta$ — тождественное преобразование. Поэтому $\beta = \alpha^{-1} = \alpha$ в силу инволютивности α. Теорема 3.1 полностью доказана.

Следствие. Пусть A_1, A_2 — непрерывные JW-факторы, не изоморфные эрмитовой части W^*-алгебры, θ — йорданов изоморфизм между A_1 и A_2. Тогда θ можно единственным образом продолжить до *-изоморфизма обертывающих W^*-факторов $\mathcal{U}(A_1)$ и $\mathcal{U}(A_2)$.

Доказательство. Как показано в доказательстве теоремы 3.1, вещественная W^*-алгебра $R(A_k)$ является унитальной специальной универсальной обертывающей для йордановой алгебры A_k $(k = 1, 2)$, и поэтому изоморфизм θ между A_1 и A_2 можно единственным образом продолжить до вещественного *-изоморфизма θ_1 между $R(A_1)$ и $R(A_2)$. Так как $R(A_k) \cap iR(A_k) = \{0\}$ $(k = 1, 2)$, то, положив

$$\theta_2(x+iy)=\theta_1(x)+i\theta_1(y),\quad x,\ y\in R(A_1),$$

мы корректно определим комплексный $*$-изоморфизм θ_2 между $\mathcal{U}(A_1)=R(A_1)+iR(A_1)$ и $\mathcal{U}(A_2)=R(A_2)+iR(A_2)$, который и будет искомым. Утверждение доказано.

Последний результат дает возможность определить тип III_λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, для JW-факторов типа III, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры. Пусть A — JW-фактор типа III, не изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры. Тогда, по лемме 1 в § 2, $\mathcal{U}(A)$ является W^*-фактором, который в силу теоремы 1.2 имеет тип III. Отсюда и из предыдущего следствия вытекает корректность следующего определения.

Определение. Пусть A — JW-фактор типа III, не изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры. Будем говорить, что A имеет тип III_λ, если W^*-фактор $\mathcal{U}(A)$ имеет тип III_λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, в смысле теории W^*-алгебр [96].

Приведем пример, показывающий, что на факторе Кригера (т. е. скрещенном произведении абелевой W^*-алгебры с ее эргодическим автоморфизмом) всегда существует канонический инволютивный $*$-антиавтоморфизм.

Пример 1. Пусть N — абелева W^*-алгебра в $B(H)$, $\gamma: G\to\mathrm{Aut}(N)$ — эргодическое действие счетной дискретной группы G на N, и $\mathcal{U}=W^*(N,G)$ — скрещенное произведение N с группой G, действующее в гильбертовом пространстве $L_2(G,H)$ всех суммируемых H-значных функций на G [137; гл. V]. Известно, что существует канонический изоморфизм π между N и W^*-подалгеброй в $\mathcal{U}$, причем $\mathcal{U}$ порождается операторами вида $\pi(a)$ $(a\in N)$ и $u(g)$ $(g\in G)$, где

$$(\pi(a)\xi)(h)=\gamma_h^{-1}(a)\,\xi(h),\quad (u(g)\xi)(h)=\xi(g^{-1}h),$$
$$\xi=\xi(h)\in L_2(G,H),\ g,\ h\in G. \tag{1}$$

Каждый элемент $x\in\mathcal{U}$ можно представить в виде

$$x=\sum_{g\in G}\pi(x(g))\,u(g),$$

где $x(\cdot)$ — N-значная функция на G. В зависимости от свойств N и действия γ группы G, $\mathcal{U}$ может быть W^*-фактором любого заданного типа (т. е. I, II_1, II_∞ и III_λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$). Рассмотрим отображение $\alpha:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$, задаваемое как

$$\alpha: x=\sum_{g\in G}\pi(x(g))\,u(g)\to\alpha(x)=\sum_{g\in G}\pi\left(\gamma_g\left(x\left(g^{-1}\right)\right)u(g)\right),$$

т. е. $\alpha: x(g)\to x'(g)=\gamma_g\left(x\left(g^{-1}\right)\right)$. Покажем, что α является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом $\mathcal{U}$. Линейность α очевидна.

Далее, так как α преобразует функцию $x'(g)=\gamma_g(x(g^{-1}))$ в функцию $\gamma_g(x'(g^{-1}))=\gamma_g\left(\gamma_g^{-1}(x(g))\right)=x(g)$, то $\alpha\circ\alpha$ — тождественное отображение, т. е. α — инволютивное отображение. Теперь заметим, что из определения (1) действия операторов $\pi(a)$ и $u(g)$ вытекает, что $\pi\left(\gamma_g(x(g^{-1}))\right)u(g)=u(g)\pi(x(g^{-1}))$. Поэтому действие преобразования α можно записать в виде

$$\alpha\left(\sum_{g\in G}\pi(x(g))u(g)\right)=\sum_{g\in G}u(g)\pi(x(g^{-1})),$$

а так как суммирование производится по всем g из группы G, то в последней сумме можно вместо g записать g^{-1}. Окончательно действие α на $\mathcal{U}$ запишется в виде

$$\alpha\left(\sum_{g\in G}\pi(x(g))u(g)\right)=\sum_{g\in G}u(g^{-1})\pi(x(g)). \qquad (2)$$

Покажем, что $\alpha(xy)=\alpha(y)\alpha(x)$, $\alpha(x^*)=\alpha(x)^*$ для всех $x, y\in\mathcal{U}$. В силу линейности α эти соотношения достаточно проверить на элементах вида $x=\pi(a)u(g)$, $y=\pi(b)u(h)$, где $a, b\in N$; $g, h\in G$. В силу (1) и (2) имеем

$$\alpha(\pi(a)u(g))=u(g^{-1})\pi(a)=\pi\left(\gamma_g^{-1}(a)\right)u(g^{-1});$$

аналогично

$$\alpha(\pi(b)u(h))=\pi\left(\gamma_h^{-1}(b)\right)u(h^{-1}).$$

Следовательно, учитывая коммутативность N, получаем

$$\alpha(\pi(b)u(h)\pi(a)u(g))=\alpha\left(\pi(b)u(h)\pi(a)u(h^{-1})u(h)u(g)\right)=$$
$$=\alpha(\pi(b\gamma_h(a)u(hg))=u((hg)^{-1}\pi(\gamma_h(a)b).$$

С другой стороны,

$$\alpha(\pi(a)u(g))\alpha(\pi(b)u(h))=u(g^{-1})\pi(a)u(h^{-1})\pi(b)=$$
$$=u(g^{-1})u(h^{-1})u(h)\pi(a)u(h^{-1})\pi(b)=$$
$$=u((hg)^{-1})\pi(\gamma_h(a))\pi(b)=u((hg)^{-1})\pi(\gamma_h(a)b),$$

т. е. $\alpha(x)\alpha(y)=\alpha(yx)$. Кроме того, так как $u(g)^*=u(g^{-1})$ в силу (1), то

$$\alpha(\pi(a)u(g))^*=(u(g^{-1})\pi(a))^*=\pi(a^*)u(g);$$
$$\alpha((\pi(a)u(g))^*)=\alpha(u(g^{-1})\pi(a^*))=\alpha(u(g^{-1})\pi(a^*)u(g))\times$$
$$\times u(g^{-1}))=\alpha\left(\pi\left(\gamma_g^{-1}(a^*)\right)u(g^{-1})\right)=u(g)\pi\left(\gamma_g^{-1}(a^*)\right)=$$
$$=\pi(a^*)u(g),$$

т. е. $\alpha(x)^* = \alpha(x^*)$. Следовательно, α является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом W^*-фактора $\mathcal{U} = W^*(N, G)$.

Приведенный пример допускает следующее обобщение.

Пример 2. Пусть $\mathcal{U} = W^*(N, G)$ — скрещенное произведение необязательно коммутативной W^*-алгебры N на группу G. Известно, что и в этом случае всякий элемент из $\mathcal{U}$ можно представить в виде

$$x = \sum_{g \in G} \pi(x(g))\, u(g).$$

Если α — некоторый антиавтоморфизм W^*-алгебры N, коммутирующий с действием группы G, то по аналогии с (2), положив

$$\bar{\alpha}\left(\sum_{g \in G} \pi(x(g))\, u(g)\right) = \sum_{g \in G} u(g^{-1})\, \pi(\alpha(x(g))), \tag{3}$$

получим $*$-антиавтоморфизм $\bar{\alpha}$ W^*-алгебры $\mathcal{U}$, причем, если α имеет период $2n$ ($n = 1, 2, \ldots$), то $\bar{\alpha}$ имеет такой же период. Это легко проверить по той же схеме, что и в примере 1, который является частным случаем, когда N — коммутативная W^*-алгебра, α — тождественное преобразование N. В частности, если α инволютивный (т. е. периода 2) $*$-антиавтоморфизм N, то $\bar{\alpha}$ является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом $\mathcal{U} = W^*(N, G)$.

Теорема 3.2. Существуют JW-факторы типа II_1, II_∞, III, не изоморфные эрмитовой части W^*-алгебры.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = W^*(N, G)$ — фактор Кригера, рассмотренный в примере 1. Как там отмечалось, $\mathcal{U}$ может иметь типы II_1, II_∞, III. И пусть α — канонический инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\mathcal{U}$, построенный в том же примере. Положим

$$A = \{x \in \mathcal{U}_{\mathrm{SA}} : \alpha(x) = x^*\}.$$

Тогда, по теореме 3.1, A является непрерывным JW-фактором, не изоморфным эрмитовой части W^*-алгебры, причем $\mathcal{U}(A) = \mathcal{U}$. В силу теоремы 1.2 A имеет тот же тип, что и W^*-фактор $\mathcal{U}$, т. е. тип II_1, II_∞ или III. Другими словами, A является искомым JW-фактором. Теорема доказана.

Следствие. Для любого $\lambda \in [0, 1]$ существует JW-фактор типа III_λ, не изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры.

Пользуясь конструкцией $*$-антиавтоморфизма α в примере 1, можно выписать явный вид JW-факторов, о которых шла речь в теореме 3.2 и ее следствии. Ввиду важности мы их выделим в качестве отдельного примера.

Пример 3. Пусть $\mathcal{U} = W^*(N, G)$ — W^*-фактор, рассмотренный в примере 1. Представляя элементы $\mathcal{U}$ в виде

$$x = \sum_{g \in G} \pi(x(g))\, u(g),$$

где $x(\cdot)$ — N-значная функция на G, выпишем явный вид элементов JW-фактора $A = \{x \in \mathcal{U}_{SA} : \alpha(x) = x\}$ в теореме 3.2. По определению α, элементу $\alpha(x)$ соответствует N-значная функция $\gamma_g(x(g^{-1}))$, а элементу x^* [137; гл. V] — N-значная функция $\gamma_g(x(g^{-1})^*)$. Поэтому элементам вещественного W^*-фактора

$$R = R(A) = \{x \in \mathcal{U} : \alpha(x) = x^*\}$$

в теореме 3.1 соответствуют элементы x, для которых

$$\gamma_g(x(g^{-1})) = \gamma_g(x(g^{-1})^*),$$

т. е. $x(g) = x(g)^*$ для всех $g \in G$. Таким образом, элементы R — это в точности те $x = \sum_{g \in G} \pi(x(g))u(g)$, для которых $x(g) \in N_{SA}$.

Если, кроме того, $x \in A = R_{SA}$, т. е. $x^* = x$, то $\gamma_g(x(g^{-1})) = x(g)$ для всех $g \in G$. Таким образом,

$$R = \left\{ \sum_{g \in G} \pi(x(g))\, u(g) \in \mathcal{U} : x(g) \in N_{SA}\ \forall g \in G \right\},$$

$$A = \left\{ \sum_{g \in G} \pi(x(g))\, u(g) \in \mathcal{U} : x(g) = \gamma_g(x(g^{-1})) \in N_{SA},\ \forall g \in G \right\},$$

т. е. мы получили явную конструкцию JW-факторов, о которых говорится в теореме 3.2 и ее следствии.

Рассмотрим два непрерывных JW-фактора A_1, A_2, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры, которые по теореме 3.1 определяются заданием пар $(\mathcal{U}_1, \alpha_1)$ и $(\mathcal{U}_2, \alpha_2)$, где $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}(A_k)$ — обертывающая W^*-алгебра для A_k, α_k — инволютивный $*$-антиавтоморфизм $\mathcal{U}_k$, такой, что

$$A_k = \{x \in \mathcal{U}_k : \alpha_k(x) = x = x^*\}, \quad k = 1, 2.$$

Найдем условия изоморфности JW-факторов A_1 и A_2 в терминах пар $(\mathcal{U}_1, \alpha_1)$ и $(\mathcal{U}_2, \alpha_2)$.

Теорема 3.3. *JW-факторы A_1 и A_2 изоморфны тогда и только тогда, когда существует $*$-изоморфизм θ между $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, такой, что $\alpha_2 \circ \theta = \theta \circ \alpha_1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A_1 и A_2 изоморфны. Тогда в силу следствия теоремы 3.1 изоморфизм между ними можно единственным образом продолжить до $*$-изоморфизма θ между $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$. Рассмотрим отображение $\alpha_1 \circ \theta^{-1} \circ \alpha_2 \circ \theta$ из $\mathcal{U}_1$ в $\mathcal{U}_2$. Оно, очевидно, является $*$-автоморфизмом $\mathcal{U}_1$, сужение которого на A_1 действует тождественным образом. В самом деле, если $x \in A_1$, то $\theta(x) \in A_2$, т. е. $\alpha_2(\theta(x)) = \theta(x)$, и поэтому $\theta^{-1} \circ \alpha_2 \circ \theta(x) = x$, а значит, $\alpha_1 \circ \theta^{-1} \circ \alpha_2 \circ \theta(x) = \alpha_1(x) = x$. В силу следствия теоремы 3.1 $\alpha_1 \circ \theta^{-1} \circ \alpha_2 \circ \theta$ обязано совпадать с тождественным отображением $\mathcal{M}_1$ на себя, т. е. $\alpha_2 \circ \theta = (\alpha_1 \circ \theta^{-1})^{-1} = \theta \circ \alpha_1$.

Достаточность. Пусть $\alpha_2 \circ \theta = \theta \circ \alpha_1$, т. е. $\alpha_2 = \theta \circ \alpha_1 \circ \theta^{-1}$. Тогда

$$A_1 = \{x \in \mathcal{M}_1 : x = x^* = \alpha_1(x)\},$$

$$A_2 = \{y \in \mathcal{M}_2 : y = y^* = \theta \circ \alpha_1 \circ \theta^{-1}(y)\}.$$

Это значит, что $x \in A_1$ в том и только в том случае, когда $\theta(x) \in A_2$. Следовательно, сужение θ на A_1 является изоморфизмом между A_1 и A_2. Теорема доказана.

Следствие. Пусть A, B — непрерывные JW-факторы, не изоморфные эрмитовой части W^*-алгебры. Предположим, что они получаются из W^*-фактора $\mathcal{M}$ с помощью инволютивных $*$-антиавтоморфизмов α и β, т. е.

$$A = \{x \in \mathcal{M} : x = x^* = \alpha(x)\},$$

$$B = \{x \in \mathcal{M} : x = x^* = \beta(x)\}.$$

Тогда A и B изоморфны в том и только в том случае, когда $*$-антиавтоморфизмы α и β сопряжены, т. е. $\beta = \theta^{-1} \circ \alpha \circ \theta$ для некоторого $*$-автоморфизма θ W^*-алгебры $\mathcal{M}$.

Таким образом, полная классификация JW-факторов сводится к классификации W^*-факторов и к следующей проблеме.

Проблема. Описать классы сопряженных инволютивных $*$-антиавтоморфизмов данного W^*-фактора.

Из теоремы 2.1 вытекает, что всякий W^*-фактор типа I имеет не более двух классов сопряженных $*$-антиавтоморфизмов. В следующем параграфе мы приведем решение этой проблемы для случая инъективных W^*-факторов типа II и III.

§ 4. Инволютивные *-антиавтоморфизмы инъективных W^*-факторов

Пусть $\mathcal{M}$ — W^*-алгебра с сепарабельным предсопряженным $\mathcal{M}_*$; $\mathrm{Aut}\, A$ — группа всех ее $*$-автоморфизмов с топологией, порожденной преднормами вида $\theta \to \|\varphi \circ \theta\|_*$, $\varphi \in \mathcal{M}_*$, $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, где $\|\cdot\|_*$ — норма в банаховом пространстве $\mathcal{M}_*$, $\mathrm{Int}(\mathcal{M})$ — группа всех внутренних автоморфизмов $\mathcal{M}$, $\mathrm{Ant}(\mathcal{M})$ — множество всех $*$-антиавтоморфизмов $\mathcal{M}$, $A(\mathcal{M}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{A}nt(\mathcal{M})$.

Напомним [97, 133], что W^*-фактор $\mathcal{M}$ в $B(H)$ называется инъективным, если существует проекция P из $B(H)$ на $\mathcal{M}$ с $\|P\| = 1$, $P(1) = 1$. Это эквивалентно тому, что $\mathcal{M}$ — аппроксимативно конечномерен, т. е. существует возрастающая последовательность $\{\mathcal{U}_n\}$ конечномерных W^*-подалгебр $\mathcal{U}$, содержащих $\mathbf{1}$, такая, что $\bigcup_n \mathcal{U}_n$ слабо плотно в $\mathcal{U}$. В дальнейшем через R (соответственно $R_{0,1}$, R_λ) будем обозначать единственный с точностью до изоморфизма инъективный W^*-фактор типа II_1 (соответственно II_∞, III_λ (факторы Пауэрса), $0<\lambda<1$) [97]. Через R_∞ обозначим фактор типа III_1 Араки—Вудса, который является единственным с точностью до изоморфизма инъективным W^*-фактором типа III_1 [151].

Из единственности перечисленных инъективных W^*-факторов R, $R_{0,1}$, R_λ, R_∞, а также из инъективности непрерывных факторов Кригера [96, 97] вытекает, что все непрерывные инъективные W^*-факторы — это в точности факторы Кригера, рассмотренные в примере 1 предыдущего параграфа.

Определение. Говорят, что W^*-фактор $\mathcal{U}$ является фактором Мак Дуфф, если он изоморфен тензорному произведению $\mathcal{U}\times R$.

Так как тензорное произведение двух факторов Кригера снова является фактором Кригера, то из единственности с точностью до изоморфизма фактора Кригера типа II_1, II_∞ и III_λ, $\lambda\neq 0$, вытекает

Предложение 4.1. Все факторы Кригера типа II_1, II_∞ и III_λ, $\lambda\neq 0$ являются факторами Мак Дуфф.

На самом деле можно показать, что факторы Кригера типа III_0 также являются факторами Мак Дуфф [71; предложение 2.1].

Определение. Пусть $\mathcal{U}$ — W^*-алгебра, H — подгруппа группы $A(\mathcal{U})$. Два элемента α, $\beta\in A(\mathcal{U})$ называются H-эквивалентными, если существует $\theta\in H$, такой, что $\beta=\theta\circ\alpha\circ\theta^{-1}$.

Основной результат, который используется при классификации инволютивных $*$-антиавтоморфизмов инъективных W^*-факторов,— это следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть α и β — два инволютивных $*$-антиавтоморфизма фактора Мак Дуфф $\mathcal{U}$ с сепарабельным предсопряженным. Тогда α и β $\overline{\mathrm{Int}(\mathcal{U})}$-эквивалентны в том и только в том случае, когда $\alpha\circ\beta\in\overline{\mathrm{Int}(\mathcal{U})}$.

Так как для инъективного W^*-фактора R типа II_1 выполняется равенство $\overline{\mathrm{Int}(R)}=\mathrm{Aut}(R)$ [117], то из теоремы 4.2 вытекает.

Теорема 4.3. Любые два инволютивных $*$-антиавтоморфизма инъективного W^*-фактора типа II_1 сопряжены.

Для рассмотрения оставшихся случаев нам необходимо напомнить понятия потока весов и фундаментального гомоморфизма.

Пусть $\mathcal{U}$ — бесконечный W^*-фактор с сепарабельным $\mathcal{U}_*$. Тогда (подробнее см. [98, 113]) существуют абелева W^*-алгебра $N_{\mathcal{U}}$, отображение $p_{\mathcal{U}}$ из множества $W_{\mathrm{Int}}(\mathcal{U})$ (нормальных полуконечных интегрируемых весов на $\mathcal{U}$) в множество проекторов W^*-алгебры $N_{\mathcal{U}}$ и поток (гладкий поток весов) $F^{\mathcal{U}}: R_+^* \to \mathrm{Aut}(N_{\mathcal{U}})$, такие, что $F^{\mathcal{U}}(\lambda)\, p_{\mathcal{U}}(\varphi) = p_{\mathcal{U}}(\lambda\varphi)$ для всех $\lambda \in R_+^*$, $\varphi \in W_{\mathrm{Int}}(\mathcal{U})$, где $R_+^* = (0, +\infty)$.

Обозначим через $\mathrm{Aut}(F^{\mathcal{U}})$ группу автоморфизмов $N_{\mathcal{U}}$, коммутирующих с образом $F^{\mathcal{U}}$, т. е.

$$\mathrm{Aut}(F^{\mathcal{U}}) = \left\{\sigma \in \mathrm{Aut}(N_{\mathcal{U}}) : \sigma \circ F^{\mathcal{U}}(\lambda) = F^{\mathcal{U}}(\lambda) \circ \sigma \,\forall \lambda > 0\right\}.$$

Для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$ преобразование $\varphi \to \varphi \circ \alpha^{-1}$ класса интегрируемых весов бесконечной кратности [133; п. 9. 18] определяет единственный элемент $\mathrm{mod}(\alpha)$ в $\mathrm{Aut}(F^{\mathcal{U}})$, такой, что

$$\mathrm{mod}(\alpha)\, p_{\mathcal{U}}(\varphi) = p_{\mathcal{U}}(\varphi \circ \alpha^{-1}). \qquad (1)$$

Это определение $\mathrm{mod}(\alpha)$ обобщается для $\alpha \in A(\mathcal{U}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{U}) \cup \mathrm{Ant}(\mathcal{U})$ с помощью следующей леммы.

Лемма. Пусть Φ — точный нормальный полуконечный вес на W^*-алгебре $\mathcal{U}$. Если $\alpha \in \mathrm{Ant}(\mathcal{U})$, то группа модулярных автоморфизмов $\mathcal{U}$, ассоциированная с весом $\Phi \circ \alpha^{-1}$, совпадает с

$$\sigma_t^{\Phi\circ\alpha^{-1}} = \alpha \circ \sigma_{-t}^{\Phi} \circ \alpha^{-1},\ t \in R.$$

Доказательство. Известно, что $\mathcal{I}_\Phi = \{x \in \mathcal{U} : \Phi(x^*x) < \infty\}$ является левым идеалом в $\mathcal{U}$, а $\mathcal{M}_\Phi = \mathcal{I}_\Phi^* \mathcal{I}_\Phi \subset \mathcal{I}_\Phi \cap \mathcal{I}_\Phi^*$ — подалгеброй в $\mathcal{U}$. Так как $\left\{\alpha \circ \sigma_{-t}^{\Phi} \circ \alpha^{-1}\right\}_{t \in R}$ является параметризованной группой автоморфизмов $\mathcal{U}$, оставляющей вес $\varphi \circ \alpha^{-1}$ инвариантным, то доказательство леммы завершается проверкой того, что относительно этой группы вес $\Phi \circ \alpha^{-1}$ удовлетворяет условию Кубо—Мартина—Швингера для любой пары элементов из $\mathcal{M}_{\Phi\circ\alpha^{-1}}$.

Определение. Гомоморфизм mod из $A(\mathcal{U})$ в $\mathrm{Aut}(F^{\mathcal{U}})$, определенный формулой (1), называется фундаментальным гомоморфизмом.

Приведем результат, анонсированный в работе [98].

Предложение 4. 4. Пусть $\mathcal{U}$ — бесконечный непрерывный фактор Кригера. Тогда фундаментальный гомоморфизм mod индуцирует изоморфизм фактор-группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\mathrm{Int}(\mathcal{M})$ на группу $\mathrm{Aut}\left(F^{\mathcal{M}}\right)$.

Теорема 4.5. Пусть $\mathcal{M}$ — бесконечный непрерывный фактор Кригера. Тогда фундаментальный гомоморфизм mod индуцирует биекцию между классами сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов $\mathcal{M}$ и классами сопряженности инволютивных автоморфизмов потока $F^{\mathcal{M}}$.

Набросок доказательства. Сначала покажем, что если α и β — два инволютивных $*$-антиавтоморфизма $\mathcal{M}$, то они сопряжены в том и только в том случае, когда инволютивные автоморфизмы $\mathrm{mod}(\alpha)$ и $\mathrm{mod}(\beta)$ сопряжены некоторым автоморфизмом потока $F^{\mathcal{M}}$. В самом деле, так как mod является гомоморфизмом, то необходимость последнего условия очевидна. Обратно, так как в силу предложения 4.4 сужение mod на $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ является сюрьективным отображением, то можно сразу предположить, что $\mathrm{mod}(\alpha)=\mathrm{mod}(\beta)$, т. е. $\mathrm{mod}(\alpha\circ\beta)=1$. Следовательно, из предложения 4.4 вытекает, что $\alpha\circ\beta\in\overline{\mathrm{Int}(\mathcal{M})}$, а в силу теоремы 4.2 α и β сопряжены. Таким образом mod взаимно однозначно отображает классы сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов $\mathcal{M}$ в множество классов сопряженности инволютивных автоморфизмов $F^{\mathcal{M}}$. При этом получается отображение «на». Это вытекает из того, что для любого антиавтоморфизма α W^*-фактора $\mathcal{M}$, такого, что $\alpha^2\in\overline{\mathrm{Int}(\mathcal{M})}$, существует инволютивный $*$-антиавтоморфизм β W^*-фактора $\mathcal{M}$, такой, что $\mathrm{mod}(\alpha)=\mathrm{mod}(\beta)$. Теорема доказана.

Теперь опишем классы инволютивных $*$-антиавтоморфизмов инъективных W^*-факторов типа II_∞ и III_λ, $\lambda\neq 0$.

Предварительно сформулируем два предложения, которые получаются непосредственным обобщением на случай антиавтоморфизмов предложений IV.1.2 и IV.1.3 из [99]. Используемые в формулировках понятия эквивалентности весов, инварианта $S(\mathcal{M})$ и обобщенного следа можно найти в [96, 99, 133].

Предложение 4.6. Пусть $\mathcal{M}$ — W^*-фактор типа II_∞ с сепарабельным предсопряженным. Тогда отображение $\lambda\in\boldsymbol{R}_+^*\to F^{\mathcal{M}}(\lambda)\in\mathrm{Aut}\left(F^{\mathcal{M}}\right)$ является изоморфизмом. Для любого $\alpha\in A(\mathcal{M})$ и любого точного нормального полуконечного следа τ на $\mathcal{M}$ имеем

$$\tau\circ\alpha^{-1}=\mathrm{mod}(\alpha)\,\tau,$$

где $\mathrm{mod}(\alpha)=F^{\mathcal{M}}(\lambda)$ мы отождествили с $\lambda\in\boldsymbol{R}_+^*$.

Предложение 4.7. (*i*) Если $\mathcal{U}$ — W^*-фактор типа III_λ $(0<\lambda<1)$ с сепарабельным предсопряженным, то отображение $\lambda \in \boldsymbol{R}_+^* \to F^{\mathcal{U}}(\lambda) \in \operatorname{Aut}(F^{\mathcal{U}})$ является гомоморфизмом из $\boldsymbol{R}_+^*$ на $\operatorname{Aut}(F^{\mathcal{U}})$ с ядром $\boldsymbol{S}(\mathcal{U}) \cap \boldsymbol{R}_+^*$. Для любого обобщенного следа Φ имеем $\Phi \circ \alpha^{-1} \sim \lambda\Phi$, где $\operatorname{mod}(\alpha) = F^{\mathcal{U}}(\lambda)$.

(ii) Если $\mathcal{U}$ имеет тип III_1, то $\operatorname{mod}(\alpha) = 1$ для любого $\alpha \in A(\mathcal{U})$.

Таким образом, в силу предложения 4.6 группа автоморфизмов потока весов на W^*-факторе $R_{0,1}$ (инъективном W^*-факторе типа II_∞) топологически изоморфна мультипликативной группе $\boldsymbol{R}_+^*$. Поскольку единственным инволютивным (т. е. периода 2) элементом группы $\boldsymbol{R}_+^*$ является 1, то из теоремы 4.5 вытекает

Теорема 4.8. Любые два инволютивных $*$-антиавтоморфизма инъективного W^*-фактора типа II_∞ сопряжены.

Пусть R_∞ — фактор Араки — Вудса типа III_1. Из предложений 4.4 и 4.7 вытекает, что $\operatorname{Int}(R_\infty) = \operatorname{Aut}(R_\infty)$, и, следовательно, имеет место

Теорема 4.9. Любые два инволютивных $*$-антиавтоморфизма инъективного W^*-фактора типа III_1 сопряжены.

Наконец, пусть R_λ, $0<\lambda<1$, — инъективный W^*-фактор типа III_λ. В силу предложения 4.7 группа автоморфизмов потока весов $\mathcal{U}$ топологически изоморфна группе

$$\boldsymbol{R}_+^*/\boldsymbol{S}(\mathcal{U}) \cap \boldsymbol{R}_+^* \cong \boldsymbol{R}_+^*/\{\lambda^n\}_{n\in \boldsymbol{Z}},$$

где $\boldsymbol{Z} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. В этой группе ровно два инволютивных элемента: 1 и $\sqrt{\lambda}$ по модулю $\{\lambda^n\}_{n\in \boldsymbol{Z}}$. Поэтому из теоремы 4.5 вытекает

Теорема 4.10. Существует ровно два класса сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов инъективного W^*-фактора типа III_λ, $0<\lambda<1$.

Таким образом, канонический инволютивный $*$-антиавтоморфизм фактора Кригера, построенный в примере 1 § 3, является единственным с точностью до сопряженности инволютивным $*$-антиавтоморфизмом в случае инъективных W^*-факторов типа II_1, II_∞ и III_1, а также одним из антиавтоморфизмов фактора R_λ $(0<\lambda<1)$ — именно тем, который соответствует элементу 1 в группе $\boldsymbol{R}_+^*/_{\{\lambda^n\}_{n\in \boldsymbol{Z}}}$.

Построим пример инволютивного $*$-антиавтоморфизма W^*-фактора R_λ, соответствующего $\sqrt{\lambda}$ по модулю $\{\lambda^n\}_{n\in \boldsymbol{Z}}$.

Пример. Пусть $\Omega = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_{+}^{*} \subset \boldsymbol{R}^{2}$, μ — мера на Ω, индуцированная мерой Лебега на $\boldsymbol{R}^2$. И пусть

$$G = \left\{ (a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\boldsymbol{Q}) \,|\, a > 0 \right\},$$

где $\boldsymbol{Q}$ — поле рациональных чисел. Действие группы G на Ω, определенное как $(a, b)(x, y) = \left(ax + b, \frac{1}{a} y\right)$ для всех $(a, b) \in G$, $(x, y) \in \Omega$, сохраняет меру μ, свободно и эргодично. Так как группа G разрешима, то скрещенное произведение $W^*(N, G)$, где $N = L^\infty(\Omega, \mu)$ изоморфно $R_{0,1}$.

Определим однопараметрическую группу β автоморфизмов (Ω, μ), положив

$$\beta_s(x, y) = (x, sy), \ (x\, y) \in \Omega, \ s \in \boldsymbol{R}_{+}^{*}.$$

Так как β коммутирует с действием группы G, то, как и в примере 2 § 3, β можно продолжить до однопараметрической группы (также обозначаемой β) автоморфизмов $R_{0,1} = W^*(N, G)$. В силу предложения 4.6 $\operatorname{mod}_{R_{0,1}}(\beta_s) = s$. В самом деле, если τ — канонический точный нормальный полуконечный след на $W^*(N, G)$, то для $x = \sum_{g \in G} \pi(a(g))\, u(g) \in W^*(N, G)^+$ имеем

$$\tau\left(\beta_s^{-1}(x)\right) = \tau\left(\sum_{g \in G} \pi\left[\beta_{s^{-1}}(a(g))\right] u(g)\right) =$$

$$= \int_{\Omega} \pi\left[\beta_{s^{-1}}(a(e))\right](x, y)\, d\mu(x, y) = \int_{\Omega} \pi(a(e))(x, s^{-1}y)\, d\mu(x, y) =$$

$$= s \int_{\Omega} \pi(a(e))(x, y)\, d\mu(x, y) = s\tau\left(\sum_{g \in G} \pi(a(g))\, u(g)\right) = s\tau(x),$$

где e — единичный элемент группы G. Следовательно, $\operatorname{mod}_{R_{0,1}}(\beta_s) = s$.

Пусть α — канонический инволютивный $*$-антиавтоморфизм $W^*(N, G)$, построенный в примере 1 § 3, т. е.

$$\alpha\left(\sum_{g \in G} \pi(a(g))\, u(g)\right) = \sum_{g \in G} u(g^{-1})\, \pi(a(g)).$$

Для $s \in \boldsymbol{R}_{+}^{*}$ преобразование $\alpha_s = \beta_s \circ \alpha$ является антиавтоморфизмом $R_{0,1}$, коммутирующим с действием β, причем $\operatorname{mod}_{R_{0,1}}(\alpha_s) = s$.

Для $\lambda \in (0, 1)$ рассмотрим инъективный W^*-фактор R_λ, являющийся скрещенным произведением $R_{0,1}$ с автоморфизмом $\beta_{\lambda^{-1}}$.

Пусть π — каноническое вложение $R_{0,1}$ в R_λ, $v \in R_\lambda$ — унитарный оператор, такой, что $\pi(\beta_{\lambda-1}(x)) = v^*\pi(x)v = \mathrm{Ad}\, v(\pi(x))$, $x \in R_{0,1}$. И пусть E — каноническое условное ожидание из R_λ на $R_{0,1}$, определенное как $E\left(\sum_{g\in G}\pi(x(g))u(g)\right) = \pi(x(e))$. Через Φ обозначим обобщенный след на R_λ, заданный как $\Phi = \tau\circ\pi^{-1}\circ E$, где τ — точный нормальный полуконечный след на $R_{0,1}$. Поскольку для любого $s \in R_+^*$ антиавтоморфизм α_s коммутирует с $\beta_{\lambda-1}$, то, как отмечалось в примере 2 § 3, α_s можно продолжить до антиавтоморфизма α_s W^*-фактора R_λ так, что для всех $\sum_{n\in Z}\pi(x_n)v^n \in R_\lambda$ имеем

$$\overline{\alpha}_s\left(\sum_{n\in Z}\pi(x_n)v^n\right) = \sum_{n\in Z} v^{-n}\pi(\alpha_s(x_n)),$$

при этом $\mathrm{mod}(\overline{\alpha}_s) = s$ по модулю $\{\lambda^n\}_{n\in Z}$. В самом деле, $\Phi\circ\overline{\alpha}_s^{-1} = \tau\circ\pi\circ E\circ\overline{\alpha}_s^{-1} = \tau\circ\alpha_s^{-1}\circ\pi^{-1}\circ E = s\tau\circ\pi^{-1}\circ E = s\Phi$. Отсюда в силу предложения 4.7 $\mathrm{mod}(\overline{\alpha}_s) = s$.

Положим $s = \lambda^{-1/2}$. Согласно $\alpha^2_{\lambda-1/2}(x) = \beta_{\lambda^{-1}}(x)$ для всех $x \in R_{0,1}$ имеем $\overline{\alpha}^2_{\lambda-1/2} = \mathrm{Ad}\, v$, так как по построению $\alpha_s(v) = v^*$ для всех $s \in R_+^*$. Отсюда следует существование унитарного $w \in R_\lambda$, такого, что $v^* = w\overline{\alpha}_{\lambda-1/2}(w^*)$. Тогда $\gamma = \mathrm{Ad}\, w\circ\overline{\alpha}_{\lambda-1/2}$ является инволютивным $*$-антиавтоморфизмом R_λ с $\mathrm{mod}(\gamma) = \sqrt{\lambda}$ по модулю $\{\lambda^n\}_{n\in Z}$.

В заключение отметим, что в оставшемся случае инъективных W^*-факторов типа III_0 нет полной классификации инволютивных $*$-антиавтоморфизмов. Известно, что для инъективного W^*-фактора типа III_0 поток весов является полным инвариантом при изоморфизме [96, 97]. С помощью теоремы 4.5 можно показать, что для любого n, $1\leqslant n\leqslant\infty$, существует инъективный W^*-фактор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве и имеющий ровно n классов сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов [70, 71].

§ 5. Классификация инъективных JW-факторов типа II_1, II_∞ и III_λ, $0<\lambda\leqslant 1$

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, позволяют полностью описать класс JW-факторов типа II_1, II_∞ и III_λ, $0<\lambda\leqslant 1$, у которых обертывающая W^*-алгебра является инъективной.

Пусть A — непрерывный JW-фактор, изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры $\mathcal{U}$. Очевидно, $\mathcal{U}$ является W^*-фактором. Если при этом $\mathcal{U}$ — инъективный W^*-фактор, то JW-фактор A будем называть **и н ъ е к т и в н ы м** JW-фактором. Если, кроме того, $\mathcal{U}$ имеет тип III_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то будем говорить, что JW-фактор A имеет тип III_λ. Таким образом, определение типа III_λ, данное в § 3 для JW-факторов, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры, мы расширили для случая произвольных JW-факторов типа III.

Пусть теперь A — непрерывный JW-фактор, не изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры. Тогда из леммы 1 § 2 и следствия теоремы 3.1 вытекает корректность следующего определения.

Определение. JW-фактор A назовем инъективным, если его обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(A)$ является инъективным W^*-фактором.

Из единственности с точностью до изоморфизма инъективных W^*-факторов типа II_1, II_∞, III_λ, $0<\lambda\leqslant 1$ [97, 151], следствия теоремы 3.3 и результатов предыдущего параграфа вытекает следующая теорема, которая дает полное описание всех инъективных JW-факторов.

Теорема 5.1. (i) С точностью до изоморфизма существуют в точности два инъективных JW-фактора типа II_1: один изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, другой — не изоморфен;

(ii) с точностью до изоморфизма существуют в точности два инъективных JW-фактора типа II_∞. один изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, другой — не изоморфен;

(iii) с точностью до изоморфизма существуют в точности три инъективных JW-фактора типа III_λ, $0<\lambda<1$: один из них изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, два других — не изоморфны;

(iv) с точностью до изоморфизма существуют в точности два инъективных JW-фактора типа III_1: один изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, другой — не изоморфен.

Следует отметить, что все инъективные JW-факторы, о которых говорится в этой теореме, нами явно выписаны в предыдущих параграфах. Именно, инъективные JW-факторы типа II_1, II_∞, III_λ, $0<\lambda<1$, III_1, изоморфные эрмитовой части W^*-алгебры, — это в точности эрмитовы части факторов Кригера, т. е. R_{SA}, $(R_{0,1})_{SA}$, $(R_\lambda)_{SA}$, $0<\lambda<1$, $(R_\infty)_{SA}$ соответственно. Инъективные JW-факторы типа II_1, II_∞, III_1, не изоморфные эрмитовой части W^*-алгебры, а также один из инъективных JW-факторов типа III_λ, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры (а именно тот, который соответствует антиавтоморфизу α W^*-фактора R_λ с $\mathrm{mod}\,(\alpha)=1$), построены в примере 3 §3. Наконец, другой инъективный JW-фактор типа III_λ, не изоморфный эрмитовой части W^*-алгебры, — это JW-фактор

$$A=\{x\in R_\lambda:\ x=x^*=\gamma(x)\},$$

где γ — инволютивный $*$-антиавтоморфизм R_λ с $\mathrm{mod}\,(\gamma)=\sqrt{\lambda}$, построенный в примере предыдущего параграфа.

Что касается инъективных JW-факторов типа III_0, то, как мы отмечали в конце § 4, можно построить счетное число попарно неизоморфных инъективных JW-факторов типа III_0, у которых обертывающие W^*-факторы изоморфны.

В связи с определением инъективного JW-фактора отметим, что было бы интересно дать внутреннее определение инъективности JW-фактора, не использующее обертывающую W^*-алгебру. Рассмотрим следующие условия:

а) JW-фактор A аппроксимативно конечномерен, т. е. существует возрастающая последовательность конечномерных JW-подалгебр $\{A_n\}$ в A, содержащих единицу, и таких, что $\bigcup\limits_n A_n$ слабо плотно в A;

б) JW-фактор A инъективен;

в) существует проекция P из $B(H)_{SA}$ на A, такая, что $\|P\|=1$, $P(1)=1$.

Известно [97], что для W^*-факторов аналоги этих условий эквивалентны. Отсюда, в частности, следует, что если JW-фактор A изоморфен эрмитовой части W^*-алгебры, то условия а), б), в) эквивалентны. Что касается JW-факторов, не изоморфных эрмитовой части W^*-алгебры, то имеет место следующий результат.

Предложение 5.2. Для JW-фактора A, не изоморфного эрмитовой части W^*-алгебры, имеют место импликации а) $\Longrightarrow$ б) $\Longrightarrow$ в). Если A имеет тип II_1, то б) $\Longrightarrow$ а).

Доказательство. Пусть выполнено а). Тогда последовательность W^*-алгебр $\{\mathcal{U}(A_n)\}$ возрастает и $\bigcup\limits_n \mathcal{U}(A_n)$ слабо плотно в $\mathcal{U}(A)$. Следовательно, $\mathcal{U}(A)$ является аппроксимативно конечномерным и, значит, инъективным W^*-фактором, т. е. A — инъективный JW-фактор. Пусть выполнено б), т. е. $\mathcal{U}(A)$ — инъективный W^*-фактор. Тогда существует проекция P_0 из $B(H)$ на $\mathcal{U}(A)$, $\|P_0\|=1$, $P_0(1)=1$. Если α — инволютивный $*$-антиатоморфизм $\mathcal{U}(A)$, такой, что $A=\{x\in\mathcal{U}(A):\ x=x^*=\alpha(x)\}$ (см. предложение 3.5 гл. I), то отображение $\Psi(x)=\frac{1}{2}(x+\alpha(x))$, $x\in\mathcal{U}(A)_{SA}$, является, очевидно, проекцией из $\mathcal{U}(A)_{SA}$ на A, причем $\|\Psi\|=1$, $\Psi(1)=1$. Если P_1 — сужение проекции P_0 на $B(H)_{SA}$, то отображение $P=\Psi\circ P_1$ является проекцией из $B(H)_{SA}$ на A, причем $\|P\|=1$, $P(1)=1$, т. е. имеет место в). Пусть, наконец, A имеет тип II_1. Если выполнено б), то в силу теоремы 1.2 $\mathcal{U}(A)$ является инъективным W^*-фактором типа II_1. Так как отсюда следует аппроксимативная конечномерность $\mathcal{U}(A)$, то по теореме 2.9 из [163], вещественный W^*-фактор $R(A)$ является аппроксимативно конечномерным, т. е. существует возрастающая последовательность R_n конечномерных вещественных W^*-подалгебр в $R(A)$, содержащих 1, такая, что $\bigcup_n R_n$ слабо плотно в $R(A)$. Положив $A_n = (R_n)_{SA}$, получим возрастающую последовательность JW-алгебр $\{A_n\}$, участвующих в определении аппроксимативной конечномерности A. Предложение доказано.

Проблема. Верна ли импликация в) $\Longrightarrow$ а), т. е. эквивалентны ли условия а), б), в)?

В частности: (i). Верна ли импликация в) $\Longrightarrow$ б), т. е. можно ли в) принять за определение инъективности JW-фактора A?

(ii) Верна ли импликация б) $\Longrightarrow$ а), т. е. являются ли все JW-факторы в теореме 5.1 (ii)—(iv) аппроксимативно конечномерными?

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ II

§ 1. Основной результат — теорема 1.2 — доказана Ш. А. Аюповым [24] (см. также [25, 27]). Теорема 1.1 принадлежит Штёрмеру [159, 161]; другими методами она доказана также в книге [155] (теорема 7.4.3).

§ 2. При доказательстве основной теоремы 2.1 мы придерживались работы [7]. Ранее она была доказана в статьях [159] и [11; § 8]. Доказательство ее приведено также в [155] (теорема 5.3.8). Лемма 1 впервые доказана в работе [33] (см. также [34, 36]). Лемма 2 принадлежит Штёрмеру [159].

§ 3. В приведенной форме теорема 3.1 доказана Ш. А. Аюповым [26, 33, 34, 36]. В других, менее детальных формах эта теорема приводится в работах Штёрмера [160, 161], а также в книге [155; гл. 7]. Теорема 3.2 доказана в [34, 36]. При изложении примеров мы придерживались работ [137; гл. V] и [70, 71]. Теорема 3.3 доказана в [34]; она была обобщена Штёрмером [165] на произвольные JW-алгебры (не факторы).

§ 4. Этот параграф является конспективным изложением результатов Джиордано [69—71]. Теорема 4.3 доказана им совместно с Джонсом [72] и независимо, другими методами, получена также Штёрмером [163]. Случай инъективных W^*-факторов типа II_∞ рассмотрен в работе [128]. При переходе к общим (не инъективным) факторам картина становится более сложной. Штёрмер доказал, что для любого натурального n существует W^*-фактор типа II_1 с сепарабельным предсопряженным, имеющий ровно n классов сопряженности инволютивных $*$-антиавтоморфизмов [165; предложение 5.2]. Аналог теоремы 4.10 для σ-конечных

W^*-факторов типа III_λ $(0<\lambda<1)$ получен Стаси [132]. Описание антиавтоморфизмов W^*-алгебр (без классификации с точностью до сопряженности) получено в работе Штёрмера [160].

§ 5. Результаты этого параграфа принадлежат Ш. А. Аюпову [31, 34, 36]. В работах Ш. М. Усманова [145, 146] рассмотрено строение σ-конечных JW-факторов типа III_λ, $0\leqslant\lambda<1$. Вопросы, связанные с существованием проекций из $B(H)$ или W^*-алгебры $\mathcal{U}(A)$ на JW-алгебру A, и свойства таких проекций исследованы в [114, 164, 176]. К этому кругу вопросов примыкают исследования по условным математическим ожиданиям на JW-алгебрах [17, 19, 53, 54, 56]. В связи с проблемой описания JW-подалгебр, на которые существует условное математическое ожидание, отметим работы [152, 174], где предлагаются различные подходы к построению йорданова аналога теории Томиты — Такесаки.

ГЛАВА III

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

§ 1. Упорядоченные йордановы алгебры

В настоящем параграфе будут приведены определение и основные свойства упорядоченных йордановых алгебр — OJ-алгебр. Теория OJ-алгебр была развита в монографии [121], где собственно был подготовлен весь аппарат для доказательства теоремы о реализации OJ-алгебр. Однако в монографии [121] был доказан лишь частный случай теоремы о реализации OJ-алгебр, когда подалгебра ограниченных элементов OJ-алгебры является эрмитовой частью W^*-алгебры. Это объяснялось в первую очередь тем, что для JW-алгебр не были определены аналоги алгебр измеримых и локально измеримых операторов, играющих важную роль в теории некоммутативного интегрирования. Поскольку JW-алгебра является неассоциативным аналогом W^*-алгебр, то естественно возникает вопрос о возможности определения понятий измеримости и локальной измеримости самосопряженного оператора относительно JW-алгебры A, которые в частном случае, когда $A = \mathcal{U}_{SA}$($\mathcal{U}$ — W^*-алгебра), совпадают с понятиями измеримости и локальной измеримости относительно W^*-алгебры $\mathcal{U}$.

В настоящей главе мы определим такие понятия и докажем, что множество $S(A)$ всех самосопряженных операторов, локально измеримых относительно JW-алгебры A, образует OJ-алгебру. Это первый основной результат главы. Второй основной результат — это теорема о представлении абстрактных OJ-алгебр в виде прямой суммы OJ-алгебры локально измеримых самосопряженных операторов и OJ-алгебры неограниченных функций на гиперстоуновском компакте со значениями в исключительной йордановой алгебре M_3^8. Эта теорема является в некотором смысле неограниченным вариантом теоремы 1.4 главы I.

Приведем некоторые сведения из теории OJ-алгебр (подробности читатель найдет в главе III монографии [121]).

Пусть E — йорданова алгебра над полем $\boldsymbol{R}$. Йорданова подалгебра $E_0 \subset E$ называется **сильно ассоциативной**, если в ней любые два элемента операторно коммутируют (см. § 1 гл. I), т. е. $(a \circ c) \circ b = a \circ (c \circ b)$ для всех $a, b \in E_0$, $c \in E$. Семейство элементов $M \subset E$ назовем **совместным**, если йорданова подалгебра $J(M)$, порожденная этим семейством, сильно ассоциативна. Если два элемента a, $b \in E$ совместны, то это обозначается как $a \leftrightarrow b$. В общем случае из попарной совместности элементов некоторого семейства $M \subset E$ не следует совместность всего семейства M, т. е. из $a \leftrightarrow b$, $\forall a, b \in M$ не следует, что $J(M)$ — сильно ассоциативная подалгебра в E. Однако, если йорданов алгебра E не содержит ниль элементов (т. е. из $x^n = 0$ для $x \in E$ и некоторого $n = 2, 3, \ldots$, следует, что $x = 0$), то такая импликация верна. Именно, имеет место следующий результат (см. [41]).

Предложение 1.1. Пусть E — йорданова алгебра без ниль элементов над полем нулевой характеристики, $M \subset E$ — попарно совместное семейство элементов. Тогда йорданова подалгебра $J(M)$, порожденная семейством M, сильно ассоциативна.

Из этого предложения, в частности, вытекает, что если E — формально вещественная йорданова алгебра $\left(\text{т. е. } x_1^2 + \cdots + x_k^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0\right)$, то любое попарно совместное семейство элементов в E совместно.

Определение. Частичный порядок $\geqslant$ на йордановой алгебре E назовем согласованным с алгебраическими операциями, если

1) $x \geqslant y \Longrightarrow x + z \geqslant y + z$ для всех $z \in E$;
2) $x \geqslant y \Longrightarrow \lambda x \geqslant \lambda y$ для всех $\lambda \in R_+$;
3) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leftrightarrow y \Longrightarrow x \circ y \geqslant 0$;
4) $x^2 \geqslant 0$ для всех $x \in E$.

Определение. Йорданову алгебру E с единицей $\mathbf{1}$ назовем OJ-алгеброй, если на ней задан порядок, согласованный с алгебраическими операциями, и выполнены следующие два условия:

(I) если $\{x_\alpha\}$ — возрастающая, ограниченная сверху сеть положительных элементов из E, то существует $x = \sup x_\alpha$, причем $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех α;

(II) всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в E является решеткой относительно индуцированного порядка.

Пример 1. Всякое полуполе [12, 13] и, в частности, алгебра измеримых функций на некотором измеримом пространстве, являются примерами ассоциативных OJ-алгебр.

Предложение 1.2. Всякая OJ-алгебра является формально вещественной йордановой алгеброй.

Доказательство. В силу аксиомы 4) OJ-алгебры достаточно проверить, что если $x^2 = 0$, $x \in E$, то $x = 0$. Для любого натурального $n = 1, 2, \ldots$ в силу аксиомы 4) имеем $\left(\frac{n}{2} x \pm \mathbf{1}\right)^2 \geqslant 0$, т. е. $\pm nx \leqslant \mathbf{1}$. Рассмотрим максимальную сильно ассоциативную подалгебру $E_0 \subset E$, содержащую элемент x. Тогда элементы $\pm nx, \mathbf{1}, n = 1, 2, \ldots$ принадлежат E_0. Так как E_0 является векторной решеткой (аксиома (II) OJ-алгебры), то в E_0 определены $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x^+ + x^-$ и имеет место неравенство $n|x| \leqslant \mathbf{1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{n|x|\}_{n=1}^{\infty}$ в E возрастает и ограничена сверху элементом **1**. В силу аксиомы (I) OJ-алгебры существует $z = \sup_n n|x|$. Тогда

$$|x| + z = |x| + \sup_n n|x| = \sup_n (n+1)|x| = z,$$

т. е. $|x| = 0$. Следовательно, $x = 0$. Предложение доказано.

Следствие. Пусть E_0 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра OJ-алгебры E. Если элемент $a \in E$ совместен со всеми элементами E_0, то $a \in E_0$.

Доказательство. Рассмотрим множество $M = E_0 \cup \{a\}$, все элементы которого по условию попарно совместны. В силу предложений 1.1 и 1.2 йорданова подалгебра $J(M)$ сильно ассоциативна и содержит E_0. Из максимальности E_0 следует, что $J(M) = E_0$, т. е. $a \in E_0$.

С помощью этого утверждения доказывается следующая теорема [121; гл. III, § 3, теоремы 1 и 2].

Теорема 1.3. Пусть E—OJ-алгебра, E_0 — максимальная сильно ассоциативная подалгебра E. Тогда E_0 с индуцированными алгебраическими операциями и частичным порядком является полуполем. Если E_1 — другая максимальная сильно ассоциативная подалгебра E, то пересечение $E_0 \cap E_1$ является правильным подполуполем как в E_0, так и в E_1.

Пример 2. Всякая JBW-алгебра A и, в частности, JW-алгебра являются OJ-алгебрами. В самом деле, свойства 1), 2), 4) OJ-алгебры для A вытекают из теоремы 1.1 главы I. Далее в силу непрерывности умножения относительно топологии нормы всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 в A замкнута и, следовательно, изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных действительных функций на компакте X (теорема 1.2 гл. I). Отсюда вытекает выполнение аксиом 3) и (II) OJ-алгебры. Наконец, аксиома (I) OJ-алгебры вытекает из монотонной полноты JBW-алгебры (теорема 1.3 гл. I) и непрерывности операции умножения в слабой топологии (теорема 1.5 гл. I).

В примере 2 по существу доказано, что во всякой JB-алгебре выполнены все аксиомы OJ-алгебры за исключением, быть может, аксиомы (I).

Определение. Элемент x OJ-алгебры E называется (порядково) ограниченным, если $-\lambda\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \lambda\mathbf{1}$ при некотором $\lambda \in \boldsymbol{R}_+$.

Если A — JBW-алгебра, то из неравенств $-\|x\|\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \|x\|\mathbf{1}$ вытекает, что в OJ-алгебре все элементы ограничены. Обратно, если E — произвольная OJ-алгебра, B — совокупность всех ограниченных элементов E, то из теоремы 1.1 главы I вытекает

Теорема 1.4. *Множество B является подалгеброй в OJ-алгебре E, и относительно нормы*

$$\|x\| = \inf\{\lambda > 0: -\lambda\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \lambda\mathbf{1}\}$$

B является монотонно полной JB-алгеброй.

Примеры OJ-алгебр, содержащих неограниченные элементы, будут приведены ниже.

Определение. Семейство идемпотентов $\{e_\lambda, \lambda \in \boldsymbol{R}\}$ в OJ-алгебре назовем спектральным, если

1) $e_\lambda \leqslant e_\mu$ при $\lambda \leqslant \mu$;

2) $\inf e_\lambda = 0$, $\sup e_\lambda = 1$;

3) $e_\lambda = \sup\limits_{\mu<\lambda} e_\mu$ для всех $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Из условия 1) вытекает, что любые два идемпотента из спектрального семейства сравнимы и, значит, совместны. Поэтому существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра E_1, содержащая данное спектральное семейство. Так как E_1 является условно полной векторной решеткой, то $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство (разложение единицы) в E_1. Предположим, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$ сходится в E_1 в смысле Фрейденталя [66; теорема IV. 10. 1], т. е. существует элемент $x \in E_1$, для которого $\{e_\lambda\}$ является спектральным семейством. В этом случае будем говорить, что x является интегралом от $\{e_\lambda\}$ и записывать его как $x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$. Проверим корректность такого определения. Пусть E_2 — другая максимальная сильно ассоциативная подалгебра, содержащая $\{e_\lambda\}$ и $E_0 = E_1 \cap E_2$. В силу теоремы 1.3 E_0 является правильной подрешеткой и в E_1, и в E_2, и вместе со спектральным семейством $\{e_\lambda\}$ она содержит и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$, являющийся порядковым пределом линейных комбинаций элементов этого семейства. Следовательно, интегралы от $\{e_\lambda\}$, вычисленные в E_1 и в E_2, совпадают с интегралом, вычисленным в E_0 т. е. равны между собой. Поэтому определение интеграла от семейства $\{e_\lambda\}$ не зависит от выбора максимальной сильно ассоциативной подалгебры, содержащей $\{e_\lambda\}$. Аналогично, для каждого элемента x, рассматриваемого как элемент некоторой максимальной сильно ассоциативной подалгебры $E_1 \subset E$, существует спектральное семейство $\{e_\lambda\}$, не зависящее от E_1, такое, что $x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$.

Из сказанного и из свойств спектрального разложения в условно полных векторных решетках с единицей [66] вытекает следующий результат.

Теорема 1.5 (Спектральная теорема). Для каждого элемента x OJ-алгебры E существует в точности одно спектральное семейство $\{e_\lambda\}$, такое, что $x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda de_\lambda$, причем $\{e_\lambda\}$ содержится во всякой максимальной сильно ассоциативной подалгебре, содержащей x, т. е. $x\leftrightarrow y$ тогда и только тогда, когда $e_\lambda\leftrightarrow y$ для всех $\lambda\in\boldsymbol{R}$. Элемент x положителен тогда и только тогда, когда $e_\lambda=0$ при $\lambda<0$; элемент x ограничен тогда и только тогда, когда существует число $\lambda_0>0$, такое, что $e_\lambda=0$ при $\lambda<-\lambda_0$, $e_\lambda=1$ при $\lambda>\lambda_0$.

Легко видеть, что спектральная теорема для JBW-алгебр (теорема 1.6 гл. I) является частным случаем спектральной теоремы для OJ-алгебр.

Как отмечалось при доказательстве предложения 1.2, для любого $x\in E$ определены $x^+=x\vee 0$ — положительная часть, $x^-=(-x)\vee 0$ — отрицательная часть, $|x|=x^++x^-$ — модуль элемента x, вычисленные относительно произвольной максимальной сильно ассоциативной подалгебры, содержащей x. Если $\{e_\lambda\}$ спектральное семейство для элемента x, то

$$x^+=\int\limits_0^{+\infty}\lambda de_\lambda,\quad x^-=-\int\limits_{-\infty}^{0}\lambda de_\lambda,\quad |x|=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|de_\lambda .$$

§ 2. OJ-алгебра локально измеримых операторов, присоединенных к JW-алгебре

Этот параграф посвящен построению основных примеров OJ-алгебр, наиболее часто встречающихся в приложениях к некоммутативному интегрированию и играющих основную роль в теореме о представлении OJ-алгебр.

Предварительно приведем некоторые сведения из теории замкнутых операторов в гильбертовых пространствах.

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, T — линейный оператор, действующий в H, $D(T)$ — область определения T (ее всегда можно предполагать линейным подпространством в H). Оператор T называется **замкнутым**, если его график $\Gamma(T)=\{\{\xi, T\xi\}\subset H\times H,\ \xi\in H\}$ замкнут в $H\times H$. Очевидно, всякий ограниченный оператор в H замкнут. Если T — незамкнутый оператор, но замыкание $\overline{\Gamma(T)}$ его графика в $H\times H$ есть график некоторого линейного оператора S, то говорят, что T **допускает замыкание**, а S называется **замыканием** T.

Пусть T — произвольный линейный оператор с плотной областью, т. е. $\overline{D(T)}=H$. Через D^* обозначим множество всех $\xi\in H$, для которых существуют $\eta\in H$, такие, что $(T\xi,\xi)=(\xi,\eta)$ для всех $\xi\in D(T)$. Оператор T^*, действующий в H по формуле $T^*\xi=\eta$, $\xi\in D^*$, называется **сопряженным** к оператору T.

Оператор T^* всегда линеен и его график есть ортодополнение в $H \times H$ множества всех пар $\{iT\xi, -i\xi\}$, $\xi \in D(T)$. Поэтому T^* — всегда замкнутый линейный оператор. Оператор T в H, для которого $\overline{D(T)} = H$, $T^* = T$, называется самосопряженным. В частности, всякий самосопряженный оператор замкнут.

В дальнейшем будем рассматривать только операторы с плотной областью определения.

Оператор T называется положительно определенным (обозначается $T \geqslant 0$), если $(T\xi, \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in D(T)$.

Отметим, что если T — замкнутый линейный оператор, то $T^*T \geqslant 0$.

Говорят, что ограниченный оператор $S \in B(H)$ коммутирует с линейным оператором T в H, если $S(D(T)) \subset D(T)$ и $ST\xi = TS\xi$ для всех $\xi \in D(T)$.

Важную роль в теории самосопряженных операторов играет следующая теорема.

Теорема 2.1 (Спектральная теорема). Для всякого самосопряженного оператора T в H существует единственное семейство проекторов $\{E(\lambda), -\infty < \lambda < +\infty\}$ в H, обладающее свойствами:

1) $E(\lambda) \leqslant E(\mu)$ при $\lambda \leqslant \mu$;

2) $E(\lambda)$ коммутируют со всеми $S \in B(H)$, коммутирующими с T, и, наоборот, если S коммутирует со всеми $E(\lambda)$, $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, то S коммутирует с T;

3) $\inf E(\lambda) = 0$, $\sup E(\lambda) = 1$;

4) $\sup\limits_{\mu<\lambda} E(\mu) = E(\lambda)$, т. е. $E(\lambda)\xi$ — непрерывная слева функция для всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, $\xi \in H$;

5) $\xi \in D(T)$ тогда и только тогда, когда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 d\, \|E(\lambda)\xi\|^2 < +\infty$, и в этом случае имеет место формула

$$T\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)\,\xi, \quad \text{т. е.} \quad T = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda). \qquad (1)$$

Семейство $\{E(\lambda)\}$ называется спектральным семейством проекторов для T, а формула (1) — спектральным разложением самосопряженного оператора T.

Теперь, следуя работам [84, 125], введем понятие измеримости оператора относительно W^*-алгебры. Предварительно отметим, что в силу спектральной теоремы для любого $T \geqslant 0$ существует единственный оператор $S \geqslant 0$, такой, что $S^2 = T$, который обозначается $\sqrt{T}$ или $T^{1/2}$ $\Big($достаточно взять $D(S) = \Big\{\xi \in H\colon \int\limits_0^{+\infty} \lambda \times$ $\times d\,\|E(\lambda)\xi\|^2 < +\infty\Big\}$ и положить $S\xi = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\lambda}\, dE(\lambda)\xi\Big)$. Оператор $|T| = \sqrt{T^*T}$ называется модулем оператора T.

Определение. Оператор T в H называется присоединенным к W^*-алгебре $\mathcal{U}$ в $B(H)$ (обозначается $T\eta\mathcal{U}$), если он коммутирует с каждым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{U}$ W^*-алгебры $\mathcal{U}$.

Нетрудно проверить, что если T — ограниченный оператор, то $T\eta\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда $T\in\mathcal{U}$, а если T — самосопряженный оператор, то $T\eta\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда все его спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ лежит в $\mathcal{U}$. В дальнейшем операторы в H будем обозначать строчными буквами $a, b, c, \ldots$ $\ldots, x, y, \ldots$, а спектральные проекторы $E(\lambda)$ через e_λ — по аналогии с OJ-алгебрами.

Определение [84, 125]. Замкнутый оператор $x\eta\mathcal{U}$ называется измеримым (относительно $\mathcal{U}$), если проектор $\mathbf{1}-e_\lambda$ конечен в $\mathcal{U}$ для некоторого $\lambda>0$, где $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство для оператора $|x|$.

Измеримые операторы подробно изучены в работе Сигала [125], где он, в частности, показал, что в множестве $M(\mathcal{U})$ всех измеримых операторов можно ввести алгебраические операции, относительно которых $M(\mathcal{U})$ является *-алгеброй.

Определение [84]. Оператор x в H называется локально измеримым (относительно $\mathcal{U}$), если в $\mathcal{U}$ существует последовательность центральных проекторов $\{q_n\}$, возрастающая к единице, и такая, что операторы $q_n x$ измеримы для любого $n=1, 2, \ldots$.

Множество $S(\mathcal{U})$ локально измеримых операторов изучалось в работе Йедона [84], где показано, что $S(\mathcal{U})$ является монотонно полной *-алгеброй. Кроме того, Йедон ввел в $S(\mathcal{U})$ топологию локальной сходимости по мере следующим образом.

Пусть $Z_{\mathcal{U}}$ — центр W^*-алгебры $\mathcal{U}$. В силу [125; 1.4] существуют компактное хаусдорфово пространство Ω, регулярная борелевская мера μ на Ω, *-изоморфизм $\Phi: Z_{\mathcal{U}}$ на $L^\infty(\Omega, \mu)$, и функция размерности D, отображающая решетку $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ проекторов из $\mathcal{U}$ в множество неотрицательных μ-измеримых функций на Ω (принимающих значения из $[0, +\infty]$) и удовлетворяющая известным условиям $1-9$ из [125; определение 1.4].

Определение [84]. Топология t локальной сходимости по мере на $S(\mathcal{U})$ — это инвариантная относительно сдвигов топология, задаваемая следующей базой окрестностей нуля:

$$N_{K,\lambda}=\left\{x\in S(\mathcal{U})\,|\,\exists e\in\mathcal{P}_{\mathcal{U}}: \|xe\|\leqslant\lambda,\ \mu(K\cap[D(\mathbf{1}-e)>\lambda])\leqslant\lambda\right\},$$

где K — подмножество Ω с $\mu(K)<+\infty$, $\lambda>0$. Здесь $[D(\mathbf{1}-e)>$ $>\lambda]$ означает множество таких $\omega\in\Omega$, что $D(\mathbf{1}-e)(\omega)>\lambda$.

Йедон доказал [84; теорема 3.3], что относительно этой топологии t операции сложения, умножения на число и произведения операторов из $S(\mathcal{U})$ непрерывны по совокупности аргументов, инволюция $x \to x^*$ также t-непрерывна, множества $S(\mathcal{U})_{SA} = \{x \in S(\mathcal{U}) : x = x^*\}$ и $S(\mathcal{U})^+ = \{x \in S(\mathcal{U}) : x \geqslant 0\}$ t - замкнуты. Кроме того, доказано [84; теорема 3.4], что пространство $S(\mathcal{U})$ полно в равномерности, порожденной топологией t. Последовательность операторов $\{x_n\}$ в $S(\mathcal{U})$ сходится локально по мере к оператору $x \in S(\mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда $(1 - e_\lambda^n) \xrightarrow{t} 0$ для любого $\lambda > 0$, где $\{e_\lambda^n\}$ — спектральное семейство оператора $|x - x_n|$ [84; § 3]. Отсюда, в частности, следует, что всякий локально измеримый оператор есть t-предел последовательности ограниченных операторов, т. е. элементов из $\mathcal{U}$. Другими словами, $S(\mathcal{U})$ совпадает с t-пополнением $\mathcal{U}$.

Замечание 1. Пусть $x \in S(\mathcal{U})_{SA}$ и $\{e_\lambda\}$ — его спектральное семейство. Из того, что всякий элемент $S(\mathcal{U})$ можно t-аппроксимировать ограниченными операторами, из t-непрерывности умножения в $S(\mathcal{U})$ и спектральной теоремы следует, что оператор $y \in S(\mathcal{U})$ коммутирует с x относительно умножения в $S(\mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда y коммутирует со всеми его спектральными проекторами $\{e_\lambda\}$.

Теперь рассмотрим вещественное линейное пространство $E = S(\mathcal{U})_{SA}$ всех самосопряженных операторов из $S(\mathcal{U})$. Оно, очевидно, является йордановой алгеброй относительно умножения $x \circ y = 1/2(xy + yx)$. Оказывается, в этой йордановой алгебре, как и для случая JW-алгебр (см. § 2 гл. I), совместность и операторная коммутируемость совпадают и означают просто коммутируемость операторов.

Лемма. Пусть $x, y \in E$. Следующие условия эквивалентны:

а) $[x, y] = 0$, где $[x, y] = xy - yx$;

б) $x \leftrightarrow y$;

в) $\{x, z, y\} = 0$ для всех $z \in E$, где

$$\{x, z, y\} = (x \circ z) \circ y - x \circ (z \circ y);$$

г) $\{x, x, y\} = 0$.

Доказательство. Из очевидного тождества $\{a, b, c\} = 1/4 [b, [a, c]]$, $a, b, c \in E$ вытекает импликация а) $\Longrightarrow$ б). Импликация б) $\Longrightarrow$ в) $\Longrightarrow$ г) очевидна. Наконец, импликация г) $\Longrightarrow$ а) доказывается совершенно аналогично предложению 2.1 главы I, если воспользоваться спектральной теоремой 2.1. Лемма доказана.

Следствие. Для йордановых подалгебр в E понятия ассоциативности и сильной ассоциативности совпадают и означают коммутативность относительно обычного умножения операторов в $S(\mathcal{U})$.

Введем в E естественный порядок: $x \geqslant y$ означает, что $x - y \geqslant 0$. Непосредственно видно, что он согласован с алгебраическими операциями в смысле определения в § 1. В самом деле, свойства 1) и 2) вытекают из определения. Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leftrightarrow y$, то в силу леммы $xy = yx$. Отсюда $x \circ y = xy = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{y} = (\sqrt{x}\sqrt{y})^*(\sqrt{x}\sqrt{y}) \geqslant 0$, так как операторы $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ также коммутируют. Следовательно, выполнено свойство 3). Свойство 4) очевидно, так как $x^2 = x^*x \geqslant 0$ для любого $x \in E = S(\mathcal{U})_{SA}$.

Покажем, что E — OJ-алгебра. Выполнение аксиомы (I) OJ-алгебры вытекает из монотонной полноты $S(\mathcal{U})$ [84; теорема 3.5] и t-непрерывности умножения в $S(\mathcal{U})$. Чтобы доказать выполнение аксиомы (II) OJ-алгебры, учитывая, что E — упорядоченное векторное пространство, достаточно показать для любого $x \in E$ существование $x \vee 0$ относительно любой максимальной сильно ассоциативной подалгебры $E_0 \subset E$. Так как совместность элементов E эквивалентна их коммутируемости в $S(\mathcal{U})$ (лемма), то E_0 является эрмитовой частью некоторой максимальной коммутативной *-подалгебры в $S(\mathcal{U})$. Непосредственно проверяется, что если $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ — спектральное разложение самосопряженного оператора x, то искомым элементом $x \vee 0$ является $\int\limits_{0}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. Доказана

Теорема 2.2. Йорданова алгебра $E = S(\mathcal{U})_{SA}$ является OJ-алгеброй, полной в топологии t локальной сходимости по мере. Подалгебра ограниченных элементов E совпадает с JW-алгеброй $\mathcal{U}_{SA}$.

Теперь приступим к реализации основной задачи этого параграфа — получению аналогичной конструкции OJ-алгебр для произвольных JW-алгебр.

Определение. Пусть A—JW-алгебра в $B(H)$. Самосопряженный оператор x в H назовем п р и с о е д и н е н н ы м к A (обозначим $x\eta A$), если все его спектральные проекторы принадлежат A.

Как уже отмечалось, если $A = \mathcal{U}_{SA}$, то условия $x\eta A$ и $x\eta\mathcal{U}$ эквивалентны, так как $x^* = x$. Очевидно, что если $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$ — обертывающая W^*-алгебра для A, то из $x\eta A$ следует, что $x\eta\mathcal{U}$. Далее, если самосопряженный оператор x ограничен и $x\eta A$, то $x \in A$; это вытекает из слабой замкнутости JW-алгебры A и из того, что всякий ограниченный самосопряженный оператор x

есть предел по норме линейных комбинаций своих спектральных проекторов.

Определение. Самосопряженный оператор x в H, присоединенный к JW-алгебре A, назовем:

измеримым (относительно A), если существует число $\lambda > 0$, такое, что проектор $\mathbf{1} - e_\lambda$ модулярен, где $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство для $|x|$;

локально измеримым, если в A существует возрастающая к $\mathbf{1}$ последовательность центральных проекторов $\{q_n\}$, таких, что все операторы $q_n x$ измеримы, $n = 1, 2, \ldots$.

Через $\mathscr{A}(A)$ обозначим множество всех самосопряженных операторов в H, присоединенных к JW-алгебре A. Через $M(A)$ ($S(A)$) будем обозначать совокупность самосопряженных операторов, измеримых (локально измеримых) относительно A.

Замечание 2. Если JW-алгебра A модулярна, то, очевидно, всякий самосопряженный оператор, присоединенный к A, измерим и, тем более, локально измерим, т. е. $M(A) = S(A) = \mathscr{A}(A)$.

Теорема 2.3. Пусть A — обратимая JW-алгебра, $\mathscr{U} = \mathscr{U}(A)$ — ее обертывающая W^*-алгебра. И пусть x — самосопряженный оператор в H, присоединенный к A, т. е. $x \in \mathscr{A}(A)$. Тогда

а) $x \in M(A)$ тогда и только тогда, когда $x \in M(\mathscr{U})$;

б) $x \in \boldsymbol{S}(A)$ тогда и только тогда, когда $x \in \boldsymbol{S}(\mathscr{U})$.

Доказательство. Так как $x\eta A$, то $x\eta\,\mathscr{U}$. Поэтому утверждение а) вытекает из того, что проектор в обратимой JW-алгебре A модулярен тогда и только тогда, когда он конечен в W^*-алгебре $\mathscr{U} = \mathscr{U}(A)$ (лемма 1 § 5 гл. I).

Докажем утверждение б). Так как $Z_A \subset Z_{\mathscr{U}}$, то из а) вытекает, что если $x \in \boldsymbol{S}(A)$, то $x \in S(\mathscr{U})$. Докажем обратное, т. е. если $x\eta A$, $x \in \boldsymbol{S}(\mathscr{U})$, то $x \in \boldsymbol{S}(A)$. В силу теоремы 3.8 из гл. I достаточно рассмотреть два случая:

(i) $A = \mathscr{U}_{SA}$;

(ii) A — чисто вещественная JW-алгебра.

В первом случае утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим лишь случай чисто вещественной JW-алгебры. Пусть $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство для $|x|$. Тогда, по определению, существует последовательность проекторов $\{q_n\} \subset Z_{\mathscr{U}}$, возрастающая к единице, такая, что операторы $q_n x$ измеримы относительно $\mathscr{U}$, $n = 1, 2, \ldots$. Это значит, что проектор $q_n e^{\perp}_{\lambda_n}$ является конечным в $\mathscr{U}$ при некотором $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема будет доказана, если мы построим аналогичную последовательность проекторов $\{p_n\}$ в Z_A.

Так как $q_n \in Z_{\mathcal{U}}$, то, как уже отмечалось (см. доказательство предложения 1. 3 гл. II), в A существует центральный проектор r_n, такой, что $q_n \mathcal{U} \cap A = r_n A$. Из $r_n \leqslant q_n$ следует, что $r_n e^{\perp}_{\lambda n}$ — модулярный проектор в A, $n=1,2,\ldots$. Так как $q_n \uparrow 1$, то последовательность $\{r_n\} \subset Z_A$ возрастает. Пусть $r_0 = \sup r_n$. Тогда $\left(q_n r_0^{\perp} \mathcal{U}\right) \cap A = \{0\}$ и к проектору $q_n r_0^{\perp} \in Z_{\mathcal{U}}$ применимо предложение 3.6 гл. I. Поэтому $\left(q_n r_0^{\perp} \mathcal{U}\right)_{\mathrm{SA}} = q_n r_0^{\perp} A$, и существуют центральный проектор $s_n \geqslant q_n r_0^{\perp}$ в A и йорданов изоморфизм: $q_n r_0^{\perp} a \to s_n a$ из $\left(q_n r_0^{\perp} \mathcal{U}\right)_{\mathrm{SA}}$ на $s_n A$. Так как $q_n r_0^{\perp} e^{\perp}_{\lambda_n}$ $\left(\leqslant q_n e^{\perp}_{\lambda_n}\right)$ — конечный проектор, то его образ $s_n e^{\perp}_{\lambda_n}$ — модулярный проектор в A, $n=1,2,\ldots$ (см. доказательство предложения 1. 4 гл. II). Далее, так как $q_n r_0^{\perp} \uparrow r_0^{\perp}$, то, как нетрудно видеть, $s_n \uparrow r_0^{\perp}$. Положим $p_n = r_n + s_n$, $n = 1,2,\ldots$. По построению, $p_n \uparrow 1$, $\{p_n\} \subset Z_A$ и $p_n e^{\perp}_{\lambda_n}$ — модулярные проекторы, $n = 1,2,\ldots$. Теорема доказана.

Таким образом, $S(A)$ является подмножеством в $S(\mathcal{U})_{\mathrm{SA}}$, $M(A)$ — подмножеством в $M(\mathcal{U})_{\mathrm{SA}}$. Мы покажем, что на самом деле $S(A)$ является OJ-подалгеброй в OJ-алгебре $S(\mathcal{U})_{\mathrm{SA}}$.

Определение. JW-алгебра A (или W^*-алгебра $\mathcal{U}$) называется счетно-разложимой, если в ней любое ортогональное семейство проекторов не более чем счетно. Проектор e в A (или в $\mathcal{U}$) называется счетно-разложимым, если алгебра eAe $(e \mathcal{U} e)$ — счетно-разложима.

Предложение 2.4. Если обратимая JW-алгебра A имеет счетно-разложимый центр, то W^*-алгебра $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$ также имеет счетно-разложимый центр.

Доказательство. По тем же соображениям, что и в теореме 2.3, достаточно рассмотреть случай чисто вещественной JW-алгебры A. Пусть $\{p_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ — ортогональное семейство проекторов в $Z_{\mathcal{U}}$. Множество индексов Γ разобьем на два семейства:

$$\Gamma_1 = \{\alpha \in \Gamma;\ p_\alpha \mathcal{U} \cap A \neq \{0\}\};\ \Gamma_2 = \{\alpha \in \Gamma:\ p_\alpha \mathcal{U} \cap A = \{0\}\}.$$

Если $\alpha \in \Gamma_1$, то в Z_A существует ненулевой проектор q_α, такой, что $p_\alpha \mathcal{U} \cap A = q_\alpha A$. Так как $q_\alpha \leqslant p_\alpha$, то $\{q_\alpha, \alpha \in \Gamma_1\}$ — ортогональное семейство проекторов в A. Поэтому Γ_1 не более чем счетно.

Пусть $\alpha \in \Gamma_2$, т. е. $p_\alpha \mathcal{U} \cap A = \{0\}$. Применяя предложение 3.6 гл. I, находим в Z_A проектор $r_\alpha \geqslant p_\alpha$, такой, что $(p_\alpha \mathcal{U})_{SA} = p_\alpha A$ является изоморфным образом $r_\alpha A$ при соответствии $r_\alpha a \leftrightarrow p_\alpha a$. Отсюда следует, что $r_\alpha r_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$, α, $\beta \in \Gamma_2$. Так как $r_\alpha \geqslant p_\alpha \neq 0$, то $\{r_\alpha, \alpha \in \Gamma_2\}$ — ортогональное семейство ненулевых проекторов в A. Следовательно, семейство Γ_2 также не более чем счетно. Предложение доказано.

Так как центр всякой JW-алгебры является эрмитовой частью коммутативной W^*-алгебры, то в любой JW-алгебре A существует ортогональное семейство центральных проекторов $\{e_\alpha\}$, $\sum e_\alpha = \mathbf{1}$, таких, что JW-алгебра $e_\alpha A$ имеет счетно-разложимый центр. Учитывая это и предложение 2.4, в дальнейшем будем предполагать, не ограничивая общности, что JW-алгебра A и W^*-алгебра $\mathcal{U}(A)$ имеют счетно-разложимые центры. В этом случае $Z_{\mathcal{U}} \cong L^\infty(\Omega, \mu)$, где меру μ можно считать конечной. При этом топология t локальной сходимости по мере в $S(\mathcal{U})$ метризуема [84; §3].

Пусть $\hat{A}$ означает t-замыкание обратимой JW-алгебры A в t-полной OJ-алгебре $S(\mathcal{U})_{SA}$ (теорема 2. 2). Из t-непрерывности алгебраических операций в $S(\mathcal{U})$ следует, что $\hat{A}$ — йорданова подалгебра в $S(\mathcal{U})_{SA}$. Кроме того, в силу леммы порядок в $\hat{A}$, индуцированный из $S(\mathcal{U})_{SA}$, согласован с алгебраическими операциями. Далее, если сеть положительных операторов $\{x_\alpha\} \subset \hat{A}$ монотонно возрастает и ограничена сверху в $\hat{A}$, то, так как $S(\mathcal{U})_{SA}$ — OJ-алгебра, в ней существует $x = \sup x_\alpha$, причем $xy = yx$, если $x_\alpha y = y x_\alpha$ для всех α. Но, по теореме 3.5 из [84], $x_\alpha \xrightarrow{t} x$. Поэтому $x \in \hat{A}$, т. е. A удовлетворяет аксиоме (I) OJ-алгебры.

Теорема 2.5. $\hat{A}$ является OJ-подалгеброй в OJ-алгебре $S(\mathcal{U})_{SA}$, и множество ограниченных элементов $\hat{A}$ совпадает с A.

Доказательство. В силу сказанного выше достаточно лишь проверить выполнение аксиомы (II) OJ-алгебры и доказать, что множество ограниченных элементов $\hat{A}$ совпадает с A. Как и раньше рассмотрим отдельно два случая.

(*i*) $A = \mathcal{U}_{SA}$. В этом случае $A = S(\mathcal{U})_{SA}$ и утверждени очевидно.

(ii) A — чисто вещественная JW-алгебра. Прежде чем доказывать теорему в этом случае, приведем вспомогательные результаты.

Предложение 2.6. Пусть A — чисто вещественная JW-алгебра, $\mathcal{U}=\mathcal{U}(A)$ ($R=R(A)$) — ее обертывающая W^*-алгебра (вещественная W^*-алгебра). Тогда отображение Ψ: $\mathcal{U}\to \boldsymbol{R}$, определенное как $\Psi(x+iy)=x$ (x, $y\in \boldsymbol{R}$), t-непрерывно.

Доказательство. Так как $R\cap iR=\{0\}$, то отображение τ: $\mathcal{U}\to\mathcal{U}$, определяемое как $\tau(x+iy)=x-iy$ (x, $y\in R$), есть сопряженно-линейный $*$-автоморфизм $\mathcal{U}$, причем $\tau^{-1}=\tau$. Из [156; теорема 5] вытекает, что τ является гомеоморфизмом $\mathcal{U}$ в топологии t. Поэтому утверждение вытекает из равенства $\Psi=$ $=1/2\ (I+\tau)$, где I — тождественное отображение $\mathcal{U}$ в себя.

Следствие. Если последовательность $\{a_n\}\subset A$ t-сходится к $x\in\mathcal{U}$, то $x\in A$.

В самом деле, пусть $x=a+ib$, a, $b\in \boldsymbol{R}$. Так как $a_n\xrightarrow{t}a+ib$, то $a_n-a-ib\xrightarrow{t}0$. В силу предложения 2.6 $a_n-a=\Psi(a_n-a-$ $-ib)\xrightarrow{t}0$, т. е. $a_n\xrightarrow{t}a$. Следовательно, $x=a\in \boldsymbol{R}$. Но $a_n^*=a_n$ для всех $n=1,2,\ldots$. В силу t-непрерывности инволюции в $S(\mathcal{U})$: $x^*=x$, т. е. $x\in \boldsymbol{R}_{SA}=A$.

Вернемся к доказательству теоремы 2.5. Если $x\in\hat{A}\subset S(\mathcal{U})$ ограничен, то $x\in\mathcal{U}$. В силу следствия, $x\in A$, т. е. множество ограниченных операторов из $\hat{A}$ совпадает с A. Проверим аксиому (II) OJ-алгебры для $\hat{A}$. Отметим, что если $x\in\hat{A}$ и $x\geqslant 0$, то $(1+x)^{-1}\in A$. В самом деле, так как $(1+x)\geqslant 1$, то в $S(\mathcal{U})$ существует $(1+x)^{-1}$ и $0\leqslant(1+x)^{-1}\leqslant 1$, т. е. $(1+x)^{-1}\in\mathcal{U}$. Пусть $(1+x)^{-1}=a+ib$, a, $b\in \boldsymbol{R}$. Так как $a+ib\geqslant 0$, то в силу следствия леммы 4 §3 гл. I $a\geqslant 0$, т. е. $a\in A^+$. Пусть $\{x_n\}\subset A$ и $x_n\xrightarrow{t}x\in\hat{A}$. Тогда $(1+x_n)(a+ib)\xrightarrow{t}1$. В силу следствия предложения 2.6 $(1+x_n)a-1\xrightarrow{t}0$, т. е $(1+x)a=1$. Аналогично $a(1+x)=1$, т. е. $(1+x)^{-1}=a\in A$. Чтобы доказать аксиому (II), необходимо показать, что для любого $x\in\hat{A}$ элемент $x\vee 0$ принадлежит $\hat{A}$. Так как $x\vee 0=x^+=\frac{|x|+x}{2}$, $|x|=(x^2)^{1/2}$, достаточно установить, что, если $x\in\hat{A}$, $x\geqslant 0$, то $x^{1/2}\in\hat{A}$.

Пусть $x\in\hat{A}$, $x\geqslant 0$. Как мы показали выше, $(1+x)^{-1}\in A$. Положим $x_0=0$ и далее по индукции

$$x_n = \frac{1}{2}(1+x)^{-1}\left[(1+x)^2 - x + x_{n-1}^2\right], \quad n = 1,2,\ldots . \qquad (2)$$

Очевидно, что $\{x_n\}$ — последовательность коммутирующих операторов в $\hat{A}$. По индукции легко проверить, что эта последовательность возрастает и ограничена сверху элементом $(1+x)$. В силу доказанной для $\hat{A}$ аксиомы (I) OJ-алгебры существует $y = \sup x_n \leqslant 1 + x$ в $\hat{A}$. Переходя в (2) к точной верхней грани, получаем

$$y = \frac{1}{2}(1+x)^{-1}[(1+x)^2 - x + y^2],$$

т. е. $x = (1 + x - y)^2$. Следовательно, элемент $1 + x - y \in \hat{A}$ является положительным квадратным корнем для x, т. е. $x^{1/2} \in \hat{A}$. Теорема 2.5 полностью доказана.

Пусть $x \in \hat{A}$, $\{e_\lambda\}$ — его спектральное разложение в OJ-алгебре $\hat{A}$. Тогда $\{e_\lambda\} \subset A$, т. е. $x \,\eta\, A$. Кроме того, $x \in \hat{A} \subset S(\mathcal{U})$. По теореме 2.3 б), $x \in S(A)$. Обратно, если $x \in S(A)$, то x есть t-предел последовательности $x_n = \int\limits_{-n}^{n} \lambda \, d e_\lambda$ из A и поэтому $x \in \hat{A}$, т. е. $\hat{A} = S(A)$. Доказан следующий результат.

Теорема 2.7. Множество $S(A)$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к обратимой JW-алгебре A, является OJ-подалгеброй в OJ-алгебре $S(\mathcal{U})_{SA}$ и совпадает с замыканием A в $S(\mathcal{U})_{SA}$ в топологии локальной сходимости по мере. Множество ограниченных элементов $S(A)$ совпадает с A.

Определение. Пусть E — OJ-алгебра, $M \subset E$ — некоторое подмножество. M называется нормальным, если для $x, y \in E$ из $0 \leqslant x \leqslant y \in M$ следует, что $x \in M$. В частности, если M — подалгебра и нормальное подмножество, то она называется нормальной подалгеброй.

Например, множество B всех ограниченных элементов произвольной OJ-алгебры E является нормальной OJ-подалгеброй.

Теорема 2.8. Пусть A — произвольная JW-алгебра. Тогда множество $S(A)$ всех самосопряженных операторов, локально измеримых относительно A, является OJ-алгеброй, а множество $M(A)$ измеримых самосопряженных операторов — нормальной OJ-подалгеброй в $S(A)$.

Доказательство. По теореме 3.8 (гл. I) можно отдельно рассмотреть два случая:

(i) A — обратимая JW-алгебра;

(ii) $A = L^\infty(\Omega, \mu, V)$ — алгебра всех существенно ограниченных μ-измеримых функций на Ω со значениями в спин-факторе V, где Ω — локально-компактное хаусдорфово пространство с конечной положительной мерой Радона μ.

Рассмотрим случай (i). Множество $S(A)$ является OJ-алгеброй в силу теоремы 2.7. Поэтому достаточно установить, что $M(A)$ — нормальная OJ-подалгебра в $S(A)$. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$ — обертывающая W^*-алгебра для A. Так как $M(\mathcal{U})$ является $*$-подалгеброй в $S(\mathcal{U})$, то из теоремы 2.3 вытекает, что $M(A)$ — йорданова подалгебра в $S(A)$. Нормальность подалгебры $M(A)$ в $S(A)$ очевидна. Из нормальности легко следует, что в $M(A)$ выполнена аксиома (I) OJ-алгебры. Наконец, аксиома (II) OJ-алгебры для $M(A)$ следует из того, что, если $x \in M(A)$, $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство для x, то $x \vee 0 = \int\limits_0^{+\infty} \lambda\, de_\lambda \in M(A)$. Следовательно, $M(A)$ — нормальная OJ-подалгебра в $S(A)$.

Теперь рассмотрим случай (ii): $A = L^\infty(\Omega, \mu, V)$. Так как A имеет тип I_2, то в силу замечания 2 $M(A) = S(A) = \mathcal{A}(A)$. Далее, так как V — JW-фактор типа I_2, то $\mathcal{A}(V) = S(V) = M(V) = V$. Известно, что для абелевой W^*-алгебры $N = L^\infty(\Omega, \mu) = L^\infty(\Omega, \mu, C)$ — всех существенно ограниченных μ-измеримых комплексных функций на Ω, множества $M(N)$, $S(N)$ и $\mathcal{A}(N)$ совпадают с алгеброй $L^0(\Omega, \mu) = L^0(\Omega, \mu, C)$ всех μ-измеримых комплексных функций на Ω. Совершенно аналогично, только заменяя C на V и учитывая $\mathcal{A}(V) = V$, доказываем, что для $A = L^\infty(\Omega, \mu, V)$ множества $\mathcal{A}(A) = S(A) = M(A)$ совпадают с алгеброй $L^0(\Omega, \mu, V)$ всех μ-измеримых V-значных функций на Ω. Так как порядок и алгебраические операции в $L^0(\Omega, \mu, V)$ поточечны, то аксиомы 1) — 4) OJ-алгебры для $S(A)$ вытекают из соответствующих свойств V. Далее, так как всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в спин-факторе V изоморфна R^2, то максимальные сильно ассоциативные подалгебры в $L^0(\Omega, \mu, V)$ изоморфны $L^0(\Omega, \mu, R^2) = L^0(\Omega, \mu, R) \times L^0(\Omega, \mu, R)$ и поэтому являются векторными решетками, т. е. $S(A)$ удовлетворяет аксиоме (II) OJ-алгебры. Осталось доказать, что $S(A)$ удовлетворяет аксиоме (I) OJ-алгебры. Пусть $\{f_\alpha\}$ — монотонно возрастающая сеть элементов $L^0(\Omega, \mu, V)$, ограниченная сверху элементом f. Отображение $u: \Omega \to V$, $u(\omega) = \|f(\omega)\|_V \mathbf{1}_V$, является, очевидно, центральным элементом алгебры $L^0(\Omega, \mu, V)$, где $\|\cdot\|_V$ — норма в V, $\mathbf{1}_V$ — единица в V. Следовательно, u совместен со всеми элементами в $S(A)$. Далее, $f \leqslant u$, так как $x \leqslant \|x\|_V \mathbf{1}_V$ для всех $x \in V$. Рассмотрим сеть

$\left\{f_\alpha \circ (1+u)^{-1}\right\}$. Эта сеть возрастает и $0 \leqslant f_\alpha \circ (1+u)^{-1} \leqslant u \circ (1+ +u)^{-1} \leqslant 1$, т. е. $\left\{f_\alpha \circ (1+u)^{-1}\right\} \subset L^\infty(\Omega, \mu, V) = A$. Так как A — JW-алгебра, то существует $g = \sup\left\{f_\alpha \circ (1+u)^{-1}\right\} \in A$. Тогда легко видеть, что $g \circ (1+u) = \sup f_\alpha \in L^0(\Omega, \mu, V) = S(A)$ и, так как $1+u$ совместен со всеми элементами $S(A)$, то в $S(A)$ выполнена аксиома (I) OJ-алгебры. Теорема доказана.

§ 3. Универсальные OJ-алгебры. Теорема о вложении OJ-алгебр

В силу спектральной теоремы для OJ-алгебр для всякого элемента x в OJ-алгебре E существует спектральное семейство $\{e_\lambda\}$, такое, что $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. Однако не для всякого спектрального семейства $\{e_\lambda\}$ обязан существовать интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$. Поэтому уместно ввести следующее определение.

Определение. OJ-алгебру E назовем универсальной, если для любого спектрального семейства $\{e_\lambda\}$ в E существует интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$.

Примерами ассоциативных универсальных OJ-алгебр являются универсальные полуполя S_∇ [12, 13] или, что то же самое, — расширенные K-пространства $C_\infty(Q)$ в смысле [66]. Более того, само определение универсальности OJ-алгебры E эквивалентно тому, что всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в E является универсальным полуполем.

Выясним условия, когда OJ-алгебра $S(A)$ локально измеримых самосопряженных операторов, присоединенных к JW-алгебре A, является универсальной. Оказывается, что эти условия довольно прозрачны.

Теорема 3.1. OJ-алгебра $S(A)$ универсальна тогда и только тогда, когда JW-алгебра A модулярна.

Доказательство. Замечание 2 в § 2 показывает, что если A — модулярная JW-алгебра, то для любого спектрального семейства проекторов $\{e_\lambda\}$ в A самосопряженный оператор $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ (присоединенный к A) принадлежит $S(A)$, т. е. $S(A)$ — универсальная OJ-алгебра.

Обратно, пусть OJ-алгебра $S(A)$ универсальна. И допустим, что JW-алгебра является собственно немодулярной. В частности, A — обратимая JW-алгебра. Из предложения 2.4 гл. I следует существование в A бесконечной последовательности $\{f_n\}$ ненулевых попарно ортогональных проекторов, любые два из которых связаны через симметрию. Рассмотрим самосопряженный оператор $x=\sum_{n=1}^{\infty} n f_n$. В силу универсальности, $S(A)$ содержит x. Это значит, что существует последовательность проекторов $\{q_n\}\subset Z_A$, возрастающая к 1, такая, что все $q_n x$ измеримы, $n=1, 2, \ldots$. Так как все f_n попарно эквивалентны, то они имеют общий центральный носитель z [121; предложение 1, с. 157]. Выберем q_{n_0} так, что $zq_{n_0}\neq 0$. Тогда очевидно, что $f_k q_{n_0}\neq 0$ для всех $k=1, 2, \ldots$. Далее, так как $q_n x$ — измеримый оператор, то существует натуральное число k_0, такое, что $q_{n_0}\sum_{n=k_0}^{\infty} f_n=\sum_{n=k_0}^{\infty} q_{n_0} f_n$ является модулярным проектором. Но бесконечная сумма ортогональных ненулевых попарно эквивалентных проекторов $\{q_{n_0} f_n\}_{n=k_0}^{\infty}$ не может быть модулярным проектором (предложение 2.4 гл. I). Противоречие показывает, что A — модулярная JW-алгебра. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\mathcal{U}$ — W^*-алгебра. OJ-алгебра $S(\mathcal{U})_{SA}$ универсальна тогда и только тогда, когда W^*-алгебра $\mathcal{U}$ конечна.

Рассмотренные выше универсальные OJ-алгебры были специальными. Теперь рассмотрим пример исключительной универсальной OJ-алгебры.

Пусть X — произвольный гиперстоуновский компакт, $M=M_3^8\cup\{\infty\}$ — одноточечная компактификация конечномерной JB-алгебры M_3^8 $\left(\dim_R M_3^8=27\right)$. Непрерывное отображение f компакта X в компакт M назовем **допустимым**, если множество $f^{-1}(\infty)$ нигде неплотно в X (сравните с [123]). Через $S=S\left(X, M_3^8\right)$ обозначим множество всех допустимых отображений. Введем в S алгебраические операции. Пусть $f, g\in S$, $Y=f^{-1}\left(M_3^8\right)\cap g^{-1}\left(M_3^8\right)$. Тогда Y всюду плотно в X, $f(x)\in M_3^8$, $g(x)\in M_3^8$ для всех $x\in Y$. На множестве Y определим отображение $f+g$, положив $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $x\in Y$. Так как X — экстремально несвязный компакт, то он является расширением Чеха — Стоуна всякого своего всюду плотного подмножества. Поэтому $f+g$ можно однозначно продолжить до непрерывного отображения (очевидно, допустимого) из X в M. Это отображение назовем суммой $f+g$. Аналогично определяются остальные операции в S. Так как M_3^8 — йорданова алгебра, то S также становится йордановой алгеброй. Порядок в S введем поточечно, т. е. $f \leqslant g$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in f^{-1}\left(M_3^8\right) \cap g^{-1}\left(M_3^8\right)$.

Если в этой конструкции вместо M_3^8 взять числовую прямую $\boldsymbol{R}$, то получим универсальное полуполе $S(X, \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{S}_\nabla$, где ∇-булева алгебра открыто-замкнутых подмножеств X [12].

Теорема 3.2. Йорданова алгебра $S\left(X, M_3^8\right)$ с введенными алгебраическими операциями и порядком является универсальной OJ-алгеброй. Всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра ее изоморфна универсальному полуполю S_∇^3. Центр $S\left(X, M_3^8\right)$ изоморфен полуполю S_∇, а совокупность ограниченных элементов — это JBW-алгебра $C\left(X, M_3^8\right)$ (см. § 1 гл. I).

Доказательство. Из определения алгебраических операций в $\boldsymbol{S} = S\left(X, M_3^8\right)$ ясно, что для $f, g \in \boldsymbol{S}$ условие $f \leftrightarrow g$ означает, что $f(x) \leftrightarrow g(x)$ в M_3^8 для всех $x \in f^{-1}\left(M_3^8\right) \cap g^{-1}\left(M_3^8\right)$. Отсюда и из определения порядка в $\boldsymbol{S}$ вытекает, что алгебраические операции в S и порядок согласованы. Далее, так как всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в M_3^8 изоморфна $\boldsymbol{R}^3$ (а центр M_3^8 есть $\boldsymbol{R}$), то все максимальные сильно ассоциативные подалгебры в S (центр в S) изоморфны $S(X, R^3) = S_\nabla^3$ $\left(S(X, \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{S}_\nabla\right)$. Отсюда, в частности, следует выполнение в $\boldsymbol{S}$ аксиомы (II) OJ-алгебры.

Далее, $-\lambda \mathbf{1} \leqslant f \leqslant \lambda \mathbf{1}$ для некоторого $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda > 0$, тогда и только тогда, когда $f(x) \in M_3^8$ для всех $x \in X$ (здесь $\mathbf{1}$ — отображение, тождественно равное единице алгебры M_3^8). Значит, множество ограниченных элементов S в точности совпадает с JBW-алгеброй $C\left(X, M_3^8\right)$. Выполнение аксиомы (I) OJ-алгебры для $\boldsymbol{S}\left(X, M_3^8\right)$ доказывается совершенно аналогично случаю OJ-алгебры $L^\infty(\Omega, \mu, V)$ (см. теорему 2.8 предыдущего параграфа). Теорема доказана.

Замечания. а) Нетрудно заметить, учитывая конечномерность M_3^8, что йорданова алгебра $S\left(\boldsymbol{X}, M_3^8\right)$ алгебраически изоморфна тензорному произведению $S_\nabla \times M_3^8$;

б) В силу конечномерности M_3^8, исключительная JBW-алгебра $\boldsymbol{C}\left(X, M_3^8\right)$ изоморфна также алгебре $L^\infty\left(\Omega, \mu, M_3^8\right)$, где Ω — локально-компактное хаусдорфово пространство с положительной мерой Радона μ. Из доказательства теорем 2.8 и 3.1 видно, что OJ-алгебра $\boldsymbol{S}\left(X, M_3^8\right)$ изоморфна $L^0\left(\Omega, \mu, M_3^8\right)$.

Теорема 3.3. Пусть E, $\overline{E}$ — OJ-алгебры, B, $\overline{B}$ — соответственно JB-алгебры ограниченных элементов E и $\overline{E}$, $\Phi: B \to \overline{B}$ — йорданов изоморфизм B на $\overline{B}$. Предположим, что выполнено следующее условие:

(*) для любого $a \in E$ со спектральным семейством $\{e_\lambda\}$ $\left(\text{т. е. } a = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda\right)$ в OJ-алгебре $\overline{E}$ существует элемент $\overline{a}$ со спектральным семейством $\{\Phi(e_\lambda)\}$, т. е. $\overline{a} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\Phi(e_\lambda)$. Тогда отображение $\overline{\Phi}: a \to \overline{a}$ является йордановым изоморфизмом из E на нормальную OJ-подалгебру $\overline{E}$, причем $\overline{\Phi}|_B = \Phi$. Если при этом E — универсальная OJ-алгебра, то $\overline{\Phi}(E) = \overline{E}$.

Замечание. Так как Φ: $B \to \overline{B}$ — йорданов изоморфизм, то он отображает всякое спектральное семейство из B в спектральное семейство из $\overline{B}$. Поэтому условие (*) корректно. Это условие, очевидно, выполняется, если $\overline{E}$ — универсальная OJ-алгебра.

Доказательство теоремы 3.2 чисто техническое и приведено в монографии [121] (гл. III, § 8).

Следующие две теоремы являются очевидными следствиями теоремы 3.3 и соответственно теорем 3.1 и 3.2.

Теорема 3.4. Пусть E—OJ-алгебра, у которой JB-алгебра ограниченных элементов изоморфна модулярной JW-алгебре A. Тогда E изоморфна нормальной OJ-подалгебре универсальной OJ-алгебры $S(A)$ самосопряженных операторов, локально измеримых относительно A.

Теорема 3.5. Пусть E — OJ-алгебра, у которой JB-алгебра ограниченных элементов изоморфна JBW-алгебре $C\left(X, M_3^8\right)$. Тогда E изоморфна нормальной OJ-подалгебре универсальной OJ-алгебры $S\left(X, M_3^8\right)$.

§ 4. Представление OJ-алгебр

В этом параграфе мы дадим описание абстрактных OJ-алгебр в виде йордановых алгебр самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве или допустимых M_3^8 -значных отображений, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть E — произвольная OJ-алгебра с разделяющим семейством нормальных состояний на алгебре B своих ограниченных элементов. Существует единственный центральный идемпотент $e \in E$, такой, что

1) JB-алгебра $e \circ B$ изоморфна JW-алгебре A в некотором гильбертовом пространстве H, а сама OJ-алгебра $e \circ E$ изоморфна нормальной OJ-подалгебре OJ-алгебры $\mathbf{S}(A)$ всех локально измеримых самосопряженных операторов в H, присоединенных к JW-алгебре A;

2) JB-алгебра $(1-e) \circ B$ изоморфна JBW-алгебре $C\left(X, M_3^8\right)$, а сама OJ-алгебра $(1-e) \circ E$ изоморфна нормальной OJ-подалгебре OJ-алгебры $\mathbf{S}\left(X, M_3^8\right)$, где X — некоторый гиперстоуновский компакт.

Доказательство. Существование и единственность центрального идемпотента $e \in E$, такого, что $e \circ B \cong A$, $(1-e) \circ B \cong$ $\cong C\left(X, M_3^8\right)$, вытекает из того, что B — JBW-алгебра (теоремы 1.3 и 1.4 гл. I). Поэтому утверждение 2 следует из теоремы 3.5. Утверждение 1) в случае, когда JW-алгебра модулярна, вытекает из теоремы 3.4. Поэтому теорема будет доказана (в силу теоремы 3.3), если мы докажем следующий результат.

Теорема 4.2. Пусть E — OJ-алгебра, B — JB-алгебра ограниченных элементов E, $\Phi : B \to A$ — изоморфизм B на собственно немодулярную JW-алгебру A в гильбертовом пространстве H, $\mathbf{S}(A)$ — OJ-алгебра локально измеримых самосопряженных операторов, присоединенных к A. Тогда выполняется условие $(*)$ теоремы 3.3, т. е. для любого $x \in E$ со спектральным семейством $\{e_\lambda\}$ самосопряженный оператор T в H, определенный спектральным семейством $\{\Phi(e_\lambda)\}$, локально измерим относительно A.

Доказательство. Как отмечалось в предыдущем параграфе, можно считать, что JW-алгебра A и ее обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$ имеют счетно разложимые центры. Кроме того, так как A — собственно немодулярная JW-алгебра, то она обратима и потому при доказательстве отдельных моментов мы будем раздельно рассматривать два случая:

(i) $A = \mathcal{U}_{SA}$;

(ii) A — чисто вещественная JW-алгебра, т. е. $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$.

Далее, рассмотрев при необходимости отдельно x^+ и x^-, можно считать, что $x \geqslant 0$, т. е. T — положительно определенный оператор. Кроме того, очевидно, что $T \eta A$.

Будем доказывать теорему от противного, т. е. предположим, что оператор T не локально измерим.

Пусть сначала A — локально-модулярная JW-алгебра. Тогда обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}$ полуконечна (предложение 5.3 гл. 1).

Обозначим $\Phi\left(e_\lambda\right)$ через g_λ. Пусть z_n — наибольший центральный проектор в $\mathcal{U}$, для которого проектор $z_n g_n^\perp$ является конечным, $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность проекторов $\{g_n\}$ возрастает к $\mathbf{1}$. Следовательно, $\{z_n\}$ — возрастающая последовательность проекторов и так как оператор T не локально измерим относительно W^*-алгебры $\mathcal{U}$ (теорема 2.3 б)), то $\sup z_n \neq 1$. Поэтому можно предположить, что $z_n = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. В противном случае можно перейти к рассмотрению JW-алгебры $z_0 A$, где центральный проектор z_0 определяется следующим образом.

(i) Если $A = \mathcal{U}_{SA}$, то $z_0 = 1 - \sup z_n$.

(ii) Если A — чисто вещественная JW-алгебра и $\left[(1 - \sup z_n)\mathcal{U}\right] \cap \cap A \neq \{0\}$, то существует ненулевой центральный проектор $z_0 \in A$, такой, что $\left[(1 - \sup(z_n)\mathcal{U}\right] \cap A = z_0 A$, причем $z_0 \leqslant 1 - \sup z_n$.

(iii) Если A — чисто вещественная JW-алгебра и $\left[(1 - \sup z_n)\mathcal{U}\right] \cap \cap A = \{0\}$, то положим $z' = 1 - \sup z_n$ и к проектору z' применим предложение 3.6 гл. I. Тогда существуют центральный проектор $z_0 \geqslant z'$, $z_0 \in A$ и йорданов изоморфизм ψ из $(z'\mathcal{U})_{SA} = z'A$ на $z_0 A$, являющийся обратным изоморфизму φ: $z_0 a \to z' a$ из $z_0 A$ на $(z'\mathcal{U})_{SA}$.

Во всех трех случаях, если ограничиться рассмотрением JW-алгебры $z_0 A$, то проектор $zg_n^{\perp}$ является бесконечным проектором в $\mathcal{U}(z_0 A)$ для любого z в центре $\mathcal{U}(z_0 A)$. Итак, сразу будем считать, что $zg_n^{\perp}$ — бесконечный проектор в $\mathcal{U}$ для любого проектора $z \in Z_{\mathcal{U}}$. Поэтому, если D — функция размерности на решетке проекторов $\mathcal{U}$ (по поводу обозначений см. § 2), то $D\left(g_n^{\perp}\right)(\omega) = +\infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$ [125; 4.1].

Пусть n_0 — такое натуральное число, что $g_{n_0} \neq 0$. Так как A — локально-модулярная JW-алгебра, то существует ненулевой модулярный проектор $h_0 \leqslant g_{n_0}$. Положим $k_n = g_{n+1} - g_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $g_{n_0}^{\perp} = \sup \{k_n\}_{n_0}^{\infty}$. Существуют номер n_1 и центральный проектор $y_1 \in Z_{\mathcal{U}}$, такие, что

$$D(y_1, h_0)(\omega) \leqslant D\left(y_1 \sup \{k_n\}_{n_0}^{n_1}\right)(\omega)$$

для почти всех $\omega \in \Omega$, $\mu(y_1) \geqslant \mu(z_0)/2^2$, где $z_0 = z(h_0)$ — центральный носитель проектора h_0 в A, а значит, и в $\mathcal{U}$ (лемма 1 § 5 гл.I). Здесь $\mu(z)$ означает меру подмножества Ω, соответствующего проектору $z \in Z_{\mathcal{U}}$. Рассуждая и дальше таким же образом, построим возрастающую последовательность натуральных чисел $n_0 < n_1 < \ldots$ и убывающую последовательность центральных проекторов $z_0 = y_0 \geqslant y_1 \geqslant \ldots$ со свойствами

$$(1)\ D(y_i h_0)(\omega) \leqslant D\left(y_i \sup \{k_n\}_{n_{i-1}}^{n_i}\right)(\omega)$$

для почти всех $\omega \in \Omega$;

$$(2)\quad \mu(y_i) \geqslant \mu(y_{i-1}) - \mu(z_0)/2^{i+1}, \quad i=1, 2, \ldots .$$

Положим $y = \inf y_i$. Из (2) следует, что $\mu(y) \geqslant \mu(z_0) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(z_0)/2^i = \mu(z_0)/2 > 0$, т. е. y — ненулевой проектор в $Z_{\mathcal{U}}$. Рассмотрим три случая.

(i) $A = \mathcal{U}_{SA}$. В этом случае положим $z = y$.

(ii) A — чисто вещественная JW-алгебра, $y\mathcal{U} \cap A \neq 0$. Тогда существует центральный проектор $z \neq 0$ в A, $z \leqslant y$, такой, что $y\mathcal{U} \cap A = zA$.

(iii) A — чисто вещественная JW-алгебра, $y\mathcal{U} \cap A = \{0\}$. В силу предложения 3.6 гл. I $(y\mathcal{U})_{SA} = yA$ и существуют центральный проектор $z \leqslant y$, $z \in A$, и йорданов изоморфизм ψ: $ya \to za$ из $(y\mathcal{U})_{SA}$ на zA.

Во всех трех случаях построенный ненулевой проектор $z \in Z_A$ обладает в силу (1) свойством

$$(3)\quad D(zh_0)(\omega) \leqslant D\left(z \sup\{k_n\}_n^{n_i}\right)(\omega)$$

для почти всех $\omega \in \Omega$.

Положим $\hat{h}_0 = zh_0$, $h_i = z \sup\{k_n\}_{n_{i-1}}^{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $\hat{h}_0$, h_i — проекторы в A, такие, что $D(\hat{h}_0)(\omega) \leqslant D(h_i)(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, причем $\hat{h}_0 = zh_0$ — модулярный в A (значит, конечный в $\mathcal{U}$) проектор. Из теоремы о сравнении проекторов в JW-алгебре (теорема 2.3 гл. I) и свойств функции размерности D [125; определение 1.4] следует, что в A существуют проекторы $\hat{h}_i \leqslant h_i$, такие, что $\hat{h}_i$ связан с проектором $\hat{h}_0$ через симметрию, и тем более эквивалентен h_0 в смысле W^*-алгебр, $i = 1, 2, \ldots$. Так как $\hat{h}_i \leqslant h_i \leqslant \sup\{k_n\}_{n_{i-1}}^{n_i}$, то все $\hat{h}_i$ попарно ортогональны. Итак, в случае локально-модулярной JW-алгебры A мы построили последовательность $\{\hat{h}_i\}$ проекторов в A со свойством

(4) все $\hat{h}_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, попарно ортогональны и эквивалентны, причем $\hat{h}_i \leqslant g_{n_i} - g_{n_{i-1}}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Теперь рассмотрим случай чисто немодулярной JW-алгебры A и также установим существование последовательности проекторов

$\left\{\hat{h}_i\right\}_0^\infty$ в A со свойством (4). Предварительно докажем одно вспомогательное предложение.

Предложение 4.3. Пусть A — обратимая JW-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

а) A — счетно-разложимая JW-алгебра;

б) на A существует точное нормальное состояние;

в) $\mathcal{U}=\mathcal{U}(A)$ — счетно-разложимая W^*-алгебра.

Доказательство. Если $A=\mathcal{U}_{\mathrm{SA}}$, то утверждение очевидно. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что A — чисто вещественная JW-алгебра.

а) $=>$ б). Если A — счетно-разложимая JW-алгебра, то любое семейство нормальных состояний с попарно ортогональными носителями не более чем счетно. Пусть $\{\rho_n\}$ — максимальное такое семейство, e_n — носитель ρ_n, $n=1, 2, \dots$. Тогда очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e_n = \mathbf{1}$. Положим $\rho(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(x)$, $x \in A$. Тогда ρ является нормальным состоянием с носителем $\mathbf{1}$, т. е. точным.

б) $=>$ в). Пусть ρ — точное нормальное состояние на A. И пусть $\Psi: \mathcal{U} \to R(A)$ — положительное нормальное отображение, построенное в следствии предложения 3.5 гл. I. Положим $\rho_0(x)=\rho(\Psi(x))$ для $x \in \mathcal{U}_{\mathrm{SA}}$ (так как $\Psi(x) \in R(A)_{\mathrm{SA}} = A$); $\rho_1(x+iy)=\rho_0(x)+i\rho_0(y)$, $x, y \in \mathcal{U}_{\mathrm{SA}}$. Легко видеть, что ρ является точным нормальным состоянием на $\mathcal{U}$. В силу [137; гл. II, предложение 3.19] $\mathcal{U}$ является счетно-разложимой W^*-алгеброй.

Импликация в) $=>$ а) очевидна. Предложение доказано.

Следствие 1. Всякий проектор в JW-алгебре мажорирует счетно-разложимый проектор.

Следствие 2. Если $\{e_n\}$ — последовательность счетно-разложимых проекторов в A, то проектор $\sup e_n$ также счетно-разложим.

Вернемся к доказательству теоремы 4.2.

Пусть $z_n \in A$ — центральный носитель проектора $g_n^{\perp}$, $n=1, 2, \dots$. Поскольку A имеет тип III, то $\mathcal{U}$ — W^*-алгебра типа III (теорема 1.2 гл. II). Так как самосопряженный оператор $T=\int_0^{+\infty}\lambda\, dg_\lambda$ не локально измерим, то $\inf z_n \neq 0$. Следовательно, переходя при необходимости к JW-алгебре $(\inf z_n)A$, можно считать, что $z_n = \mathbf{1}$ для всех $n=1, 2, \dots$. Кроме того, очевидно, можно считать, что $k_n = g_{n+1} - g_n \neq 0$ для всех $n=0, 1, 2, \dots$.

В силу следствий 1 и 2 предложения 4.3 и того, что A имеет счетно-разложимый центр, каждый проектор k_n мажорирует счетно-разложимый проектор $r_n \in A$ с тем же центральным носителем $z(k_n)=z(r_n)$, $n=0, 1, 2, \dots$. Пусть $r=\sup r_n$. Проектор r

счетно-разложим (следствие 1). Покажем, что для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ центральный носитель проектора $\sup\{r_i\}_n^\infty$ в JW-алгебре rAr равен r. Пусть $\hat{z}$ — произвольный ненулевой центральный проектор в rAr. Так как центр алгебры rAr совпадает с rZ_A, то существует центральный проектор z в A, такой, что $\hat{z} = zr$. По предложению, проектор $\sup\{k_i\}_n^\infty = g_n^\perp$ имеет центральный носитель $\mathbf{1}$, и следовательно, проектор $k_i z$ отличен от нуля при некотором $i \geqslant n$. Так как $z(k_i) = z(r_i)$, то $r_i z \neq 0$. Но тогда $r_i\hat{z} = (r_i z)r \neq 0$, так как $r \geqslant rz$. В силу произвольности $\hat{z} \in Z_{rAr}$ центральный носитель проектора $\sup\{r_i\}_n^\infty$ в rAr равен r.

Пусть ρ—точное нормальное состояние на rAr, $\hat{z}(\cdot)$ означает центральный носитель в rAr. Так как $\hat{z}\left(\sup\{r_i\}_n^\infty\right) = r$, то, существует натуральное число $n_1 \geqslant 1$, такое, что если $\hat{z}_0 = \hat{z}(r_0)$ $z_1 = z_0\hat{z}\left(\sup\{r_i\}_1^{n_1}\right)$, то $\rho\left(\hat{z}_1\right) \geqslant \rho\left(\hat{z}_0\right)/2$. Продолжая таким образом, построим возрастающую последовательность натуральных чисел $n_0 = 1 < n_1 < \ldots$, такую, что если z_i — центральный носитель проектора $\hat{z}_{i-1}\sup\{r_n\}_{n_{i-1}}^{n_i}$, то

$$\rho(z_i) \geqslant \rho\left(\hat{z}_{i-1}\right) - \rho(z_0)/2^i, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $\hat{z} = \inf z_i$, $h_0 = \hat{z}_r$, $\hat{h}_i = z\sup\{r_n\}_{n_{i-1}}^{n_i}, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots$. Тогда $\rho\left(\hat{z}\right) > 0$ и поэтому $\hat{h}_0, \hat{h}_1, \hat{h}_2, \ldots$ —ненулевые проекторы, имеющие общий центральный носитель $\hat{z}$ в rAr, причем $\hat{h}_i \leqslant \sup\{r_n\}_{n_{i-1}}^{n_i} \leqslant \sup\{k_n\}_{n_{i-1}}^{n_i} = g_{n_i} - g_{n_{i-1}}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Так как A имеет тип III, то rAr также имеет тип III. Следовательно, ее обертывающая W^*-алгебра $\mathcal{U}(rAr)$ является счетно-разложимой W^*-алгеброй типа III и в силу [116; предложение 2.2.14] любые проекторы в ней, имеющие общий центральный носитель, эквивалентны. Следовательно, построенная последовательность проекторов $\left\{\hat{h}_i\right\}_0^\infty$ удовлетворяет условию (4).

Так как всякая JW-алгебра есть сумма локально-модулярной и чисто немодулярной JW-алгебр (предложение 2.7 гл. I), то существование последовательности $\left\{\hat{h}_i\right\}_0^\infty$, удовлетворяющей условию (4), доказано для любой JW-алгебры в предположении $T\bar{\in} S(A)$.

Рассмотрим построенную последовательность $\left\{\hat{h}_i\right\}_0^\infty$. Так как каждый проектор $\hat{h}_i$, $i=1,2,\ldots$ эквивалентен (в смысле W^*-алгебр) проектору $\hat{h}_0$, то в $\mathcal{U}$ существует последовательность $\{v_i\}_1^\infty$ частичных изометрий с начальным проектором $\hat{h}_0$ и конечным проектором $\hat{h}_i$, т. е. $v_i^* v_i = \hat{h}_0$, $v_i v_i^* = \hat{h}_i$, $i = 1,2,\ldots$. Пусть $\mathcal{B}$—наименьшая W^*-подалгебра $\mathcal{U}$, содержащая все v_i, $i=1,2,\ldots$. В силу [137; гл. V, предложение 1.22] $\mathcal{B}$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}(H_1)$ всех ограниченных линейных операторов на некотором гильбертовом пространстве H_1. Пусть Ψ—изоморфизм $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}(H_1)$, $p_i = \Psi\left(\hat{h}_i\right)$, $i = 1,2,\ldots$. Тогда $\{p_i\}$ — последовательность ненулевых ортогональных проекторов в $\mathcal{B}(H_1)$. Пусть $\xi_0 \in H_1$ — произвольный единичный вектор, $q_0 \in B(H_1)$ — проектор на одномерное подпространство в H_1, порожденное вектором ξ_0. В $\mathcal{B}$ существует такой проектор r_0, что $\Psi(r_0) = q_0$. Поскольку q_0—минимальный проектор в $B(H_1)$, то r_0 — минимальный проектор в $\mathcal{B}$. Следовательно, если $y\in\mathcal{B}$, то $r_0 y r_0 = \lambda r_0$, где λ—комплексное число. Поэтому для любого $n = 1,2,\ldots$

$$r_0\left(\sum_{i=1}^n i\hat{h}_i\right) r_0 = \lambda_n r_0,\ \lambda \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^n i\Phi^{-1}\left(\hat{h}_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n n_i \Phi^{-1}\left(g_{n_i} - g_{n_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^n n_i\left(e_{n_i} - e_{n_{i-1}}\right) \leqslant x.$$

По аксиоме (I) OJ-алгебры в E существует элемент

$$\hat{x} = \sup_n\left\{\sum_{i=1}^n i\Phi^{-1}\left(\hat{h}_i\right)\right\}.$$

В силу нормальности оператора U_a на E [121; гл. III, § 5, теорема 4] имеем

$$\left\{\Phi^{-1}(r_0)\,\hat{x}\,\Phi^{-1}(r_0)\right\} = \sup_n\left\{\Phi^{-1}(r_0)\left(\sum_{i=1}^n i\Phi^{-1}\left(\hat{h}_i\right)\right)\Phi^{-1}(r_0)\right\} =$$

$$= \sup_n \Phi^{-1}\left[r_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{ih_i} \right) r_0 \right] = \sup_n \lambda_n \Phi^{-1}(r_0).$$

Последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ возрастает и для любого

$$n = 1, 2, \ldots : \lambda_n \Phi^{-1}(r_0) \leqslant \left\{ \Phi^{-1}(r_0) \hat{x} \Phi^{-1}(r_0) \right\}.$$

Отсюда в силу архимедовости порядка в OJ-алгебре (см. §1) следует, что $\lambda = \sup \lambda_n < +\infty$. Тогда $\left\{ \Phi^{-1}(r_0) \hat{x} \Phi^{-1}(r_0) \right\} = \lambda \Phi^{-1}(r_0)$ и, следовательно, $r_0 \left(\sum_{i=1}^{n} ih_i \right) r_0 \leqslant \lambda r_0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда $q_0 \left(\sum_{i=1}^{n} ip_i \right) q_0 \leqslant \lambda q_0$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, для любого $\xi_0 \in H_1$

$$\sup_n \left\{ \sum_{i=1}^{n} i(p_i \xi_0, \xi_0) \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} i(p_i \xi_0, \xi_0) < +\infty.$$

С другой стороны, рассмотрим в H_1 вектор $\xi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} p_i$. Для него имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} i(p_i \xi_0, \xi_0) = \sum_{i=1}^{\infty} i i^{-2} = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1} = +\infty.$$

Полученное противоречие показывает, что оператор T локально измерим относительно JW-алгебры A. Теорема 4.2, а значит, и теорема 4.1 доказаны.

Следствие. Пусть E—OJ-алгебра с разделяющим семейством нормальных состояний на подалгебре ограниченных элементов. Для того чтобы E можно было вложить в универсальную OJ-алгебру, необходимо и достаточно, чтобы решетка идемпотентов E была модулярной.

Это вытекает из теорем 4.1; 3,1; 3.2 и модулярности решетки идемпотентов в M_3^8 (а значит, и в $S(X, M_3^8)$).

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ III

§ 1. Понятие упорядоченной йордановой алгебры (OJ-алгебры) было впервые введено в работе Т. А. Сарымсакова и Ш. А. Аюпова [120] с целью аксиоматического описания пространства случайных величин в квантовой теории вероятностей [32]. OJ-Алгебры являются неассоциативным аналогом полуполей [12, 13]. Аксиоматика полуполей, в свою очередь, была навеяна исследованиями Л. В. Канторовича и учеников по условно полным векторным решеткам (K-пространствам [66]). Некоммутативные аналоги полуполей рассматривались в работах Т. А. Сарымсакова, М. Ш. Гольдштейна и В. И. Чилина [121, 122, 156]. В этом параграфе приведены необходимые сведения из теории OJ-алгебр, которая подробно изложена в книге [121]. Предложение 1.1 доказано Ш. А. Аюповым и В. Н. Желябиным [41].

§ 2. Измеримые и локально измеримые операторы, присоединенные к W^*-алгебре, подробно исследовались Сигалом [125], Санкараном [118, 119], Йедоном [84, 85] и др. Аналоги этих понятий для JW-алгебр были введены Ш. А. Аюповым, которому принадлежат основные результаты данного параграфа [26, 30].

§ 3. Этот параграф является сокращенным изложением § 8 главы III монографии [121] и включен для замкнутости изложения. Исключением является теорема 3.1, которая доказана в [30].

§ 4. Основной результат (теорема 4.1) получен Ш. А. Аюповым [30]; он является аналогом теоремы о классификации полуполей [12], а также теоремы о вложении K-пространств в расширенные K-пространства [66]. В частном случае, когда все элементы OJ-алгебры E ограничены, эта теорема совпадает с теоремой 1.4 главы I (теорема Гельфанда — Наймарка). Другой частный случай, когда E является эрмитовой частью комплексной $*$-алгебры (O^*-алгебры [122]), был доказан М. Ш. Гольдштейном; именно этот случай приведен в § 7 главы IV в книге [121].

ГЛАВА IV

ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ НЕАССОЦИАТИВНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 1. Веса и следы на JBW-алгебрах

Пусть A — JBW-алгебра. Напомним, что линейное подпространство $J \subset A$ называется квадратичным идеалом (соответственно йордановым идеалом), если $U_a b \in J$ (соответственно $a \circ b \in J$) для любых $a \in J$, $b \in A$.

Определение. Вес на JBW-алгебре A — это отображение $\varphi : A^+ \to [0, +\infty]$, такое, что

(i) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для всех a, $b \in A^+$;

(ii) $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$ для всех $a \in A^+$, $\lambda \in R_+$ в предположении, что $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Возвращаясь к определению следа (см. § 4 гл. I), отметим, что след на JBW-алгебре A — это вес, удовлетворяющий дополнительному условию

(iii) $\varphi(U_s a) = \varphi(a)$ для всех $a \in A^+$, $s \in A$, $s^2 = 1$.

Вес φ называется точным, если $\varphi(a) > 0$ для всех $a \in A^+$, $a \neq 0$; нормальным, если $\sup \varphi(a_\alpha) = \varphi(a)$ для любой сети $\{a_\alpha\}$ в A^+, монотонно возрастающей к $a \in A^+$; полуконечным, если существует сеть $\{b_\alpha\} \subset A^+$, возрастающая к $\mathbf{1}$ и такая, что $\varphi(b_\alpha) < +\infty$ для всех α; ограниченным (конечным), если $\varphi(\mathbf{1}) < +\infty$.

Для веса φ на JBW-алгебре A положим

$$A_\varphi^+ = \{a \in A^+ : \varphi(a) < +\infty\};\ A_\varphi = A_\varphi^+ - A_\varphi^+ = \left\{a - b : a,\ b \in A_\varphi^+\right\};$$

$$A_\varphi^2 = \left\{a \in A : a^2 \in A_\varphi^+\right\}.$$

Предложение 1.1. а) Множество A_φ является нормальной йордановой подалгеброй в A, причем φ однозначно продолжается до линейного функционала на A_φ;

б) A_φ^2 является квадратичным идеалом в A, причем $U_a b \in A_\varphi$ для всех $a \in A_\varphi^2$, $b \in A$;

в) A_φ — квадратичный идеал в A.

Доказательство. а) Очевидно, что A_φ является линейным подпространством в A, причем, если $0 \leqslant a \leqslant b \in A_\varphi^+$, то $a \in A_\varphi^+$, т. е. A_φ нормально (см. § 2 гл. III). Если $x \in A_\varphi$, т. е. $x = a - b$,

$a, b \in A_\varphi^+$, то $x^2 = a^2 - 2a \circ b + b^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$. Из теоремы 1.1 главы I следует, что $0 \leqslant a \leqslant \|a\| 1$ для всех $a \in A^+$. Применяя к этому неравенству положительный оператор $U_{\sqrt{a}}$, получаем $a^2 \leqslant \|a\| a$ для всех $a \in A^+$. Следовательно, $x^2 \leqslant 2(\|a\|a + \|b\|b) \in A_\varphi^+ + A_\varphi^+ \subset A_\varphi^+$, т. е. $x^2 \in A_\varphi^+ \subset A_\varphi$. Это означает, что A_φ — йорданова подалгебра в A. Для $x = a - b \in A_\varphi$ положим $\varphi(x) = \varphi(a) - \varphi(b)$. Из свойств (i) и (ii) веса φ следует, что этим мы корректно определили линейный функционал на A_φ.

б) Из неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ $\left(a, b \in A_\varphi^+\right)$ следует, что A_φ^2 — линейное подпространство в A. Из неравенств $a^2 \leqslant \|a\| a$ $(a \in A^+)$ и $U_a b \leqslant \|b\| U_a 1 = \|b\| a^2$ $(a \in A,\ b \in A^+)$ следует, что $A_\varphi \subset A_\varphi^2$ и A_φ^2 является квадратичным идеалом, причем $U_a b \in A_\varphi$ для всех $a \in A_\varphi^2$, $b \in A$. Из последнего соотношения следует утверждение в). Предложение доказано.

Предложение 1.2. Пусть φ — полуконечный вес на JBW-алгебре $A = L^\infty(\Omega, \mu, M)$, где M — JBW-фактор типа I_n $(n < \infty)$. Тогда существует ортогональное семейство $\{e_\alpha\}$ центральных идемпотентов в A с $\sum e_\alpha = 1$, такое, что $\varphi(e_\alpha) < +\infty$ для всех α, т. е. сужение веса φ на каждой подалгебре $e_\alpha \circ A$ конечно.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что для любого ненулевого идемпотента $e_0 \in A$ существует идемпотент $e \neq 0$, $e \leqslant e_0$, такой, что $\varphi(e) < +\infty$. Переходя к JBW-алгебре $e_0 \circ A$, можно предположить, что $e_0 = 1$. Таким образом, достаточно установить существование ненулевого центрального идемпотента $e \in A$ с $\varphi(e) < +\infty$.

В силу полуконечности φ существует сеть $\{a_\alpha\}$, возрастающая к 1 и такая, что $\varphi(a_\alpha) < +\infty$ для всех α. Пусть $\|\cdot\|_M$ означает норму, 1_M — единицу в JBW-факторе M. Тогда сеть $\{1_M - a_\alpha(\omega)\}$ в M монотонно убывает к нулю для всех $\omega \in \Omega$, за исключением подмножества μ-меры нуль. Так как на JBW-факторах типа I_n $(n < \infty)$ порядковая сходимость совпадает со сходимостью по норме, то сеть $\{f_\alpha(\omega) = \|1_M - a_\alpha(\omega)\|_M\}$ действительных измеримых функций на Ω сходится к нулю μ-почти всюду. По теореме Лузина, существует измеримое подмножество $\Omega_0 \subseteq \Omega$ с $\mu(\Omega_0) > 0$, такое, что $f_\alpha(\omega) \to 0$ равномерно на Ω_0. Следовательно, $f_\beta(\omega) = \|1_M - a_\beta(\omega)\|_M \leqslant 1/2$ для некоторого β и для всех $\omega \in \Omega_0$. Отсюда с учетом свойства нормы в JB-алгебрах (теорема 1.1 гл. I) следует, что $1_M - a_\beta(\omega) \leqslant \frac{1}{2} 1_M$, т. е. $a_\beta(\omega) \geqslant \frac{1}{2} 1_M$ для всех $\omega \in \Omega_0$.

Положим

$$e(\omega)=\begin{cases}\mathbf{1}_M & \text{при } \omega\in\Omega_0,\\ 0 & \text{при } \omega\in\Omega\setminus\Omega_0.\end{cases}$$

Тогда $e=e(\omega)\in A=L^\infty(\Omega,\mu,M)$ является ненулевым центральным идемпотентом, причем $\varphi(e)\leqslant 2\varphi(a_\beta)<+\infty$. Утверждение доказано.

Следующий результат является обобщением теоремы о продолжении следов с JW-алгебры на обертывающую W^*-алгебру (следствие теоремы 4.3 гл. I).

Предложение 1.3. Пусть A — обратимая JW-алгебра, φ — вес на A. Тогда φ можно продолжить до веса φ_1 на обертывающей W^*-алгебре $\mathcal{U}=\mathcal{U}(A)$. Если вес φ нормален (точен, полуконечен, конечен), то вес φ_1 также нормален (точен, полуконечен, конечен). Если φ — след на A, то φ_1 — след на W^*-алгебре $\mathcal{U}$.

Доказательство. В силу леммы 1 из § 3 гл. I достаточно рассмотреть два случая:

$$\text{(i) } A=\mathcal{U}_{SA};$$

$$\text{(ii) } R(A)\cap iR(A)=\{0\}.$$

В первом случае утверждение очевидно. В случае (ii) $\mathcal{U}=\mathcal{U}(A)=R(A)+iR(A)$ (см. § 3 гл. I). Рассмотрим линейное отображение $\Psi\colon\mathcal{U}\to R(A)$, определенное как $\Psi(a+ib)=a$, $a,b\in R(A)$. В силу следствия предложения 3.5 гл. I Ψ нормально и положительно, а в силу леммы 4 § 3 гл. I отображение Ψ точно. Так как $R(A)_{SA}=A$, то, положив

$$\varphi_1(x)=\varphi(\Psi(x)),\quad x\in\mathcal{U}^+,$$

получим вес φ_1 на $\mathcal{U}$. Из свойств отображения Ψ следует, что если вес φ нормален (точен, полуконечен, конечен), то таким же является вес φ_1. Последнее утверждение вытекает из теоремы 4.3 гл. I. Предложение доказано.

Замечание. Доказанное предложение 1.3 вместе с предложением 3.9 гл. I позволяет сводить доказательства утверждений о свойствах весов на JBW-алгебрах к случаю весов на W^*-алгебрах, если в формулировке утверждения участвуют не более двух элементов JBW-алгебры.

Продемонстрируем смысл этого замечания на примере следующей теоремы.

Теорема 1.4. Пусть φ — вес на JBW-алгебре. Следующие условия эквивалентны:

(i) $\varphi(U_s a)=\varphi(a)$ для всех $a\in A^+$ и любой симметрии $s\in A$, т. е. φ — след;

(ii) $\varphi(U_a b^2) = \varphi(U_b a^2)$ для всех $a, b \in A$.

Доказательство. Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) очевидна. Покажем, что (i) $\Longrightarrow$ (ii). Так как достаточно рассмотреть JBW-алгебру, порожденную элементами a, b, $\mathbf{1}$, то в силу предложения 3.9 гл. I можно считать, что A — обратимая JW-алгебра со следом ψ. Согласно предложению 1.3, след φ можно продолжить до следа φ_1 на обертывающей W^*-алгебре $\mathcal{U}(A)$. Из свойств следа на W^*-алгебрах следует, что

$$\varphi(U_a b^2) = \varphi_1(ab^2a) = \varphi_1((ab)(ab)^*) = \varphi_1((ab)^*(ab)) = \\ = \varphi_1(ba^2b) = \varphi(U_b a^2).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если φ — след на JBW-алгебре A, то множество A_φ является йордановым идеалом. В частности, $A_\varphi = \{a \in A: \varphi(|a|) < +\infty\}$.

Доказательство. Пусть $a \in A_\varphi^+$, $b \in A$. Тогда, по теореме 1.4, имеем

$$\varphi(U_b a) = \varphi\left(U_{\sqrt{a}}\, b^2\right) \leqslant \|b\|^2 \varphi(a) < +\infty,$$

т. е. $U_b a \in A_\varphi^+$. Отсюда следует, что $U_b(A_\varphi) \subset A_\varphi$ для всех $b \in A$. В специальных йордановых алгебрах легко проверяется тождество $a \circ b = \frac{1}{2}(U_{b+1}\, a - U_b a - a)$. По теореме Ширшова—Макдональда (см. [68; гл. I, § 9]), оно верно в произвольной йордановой алгебре. Следовательно, $a \circ b \in A_\varphi$ для всех $a \in A_\varphi$, $b \in A$, т. е. A_φ — йорданов идеал. Так как всякий элемент a JBW-алгебры можно представить в виде $a = |a| \circ s$, где s — симметрия в A, то $a \in A_\varphi \Longleftrightarrow |a| \in A_\varphi$, т. е. $A_\varphi = \{a \in A: \varphi(|a|) < \infty\}$. Утверждение доказано.

Следствие 2. Пусть φ — след на JBW-алгебре A. Тогда

1) $\varphi(x) = \varphi(U_e x) + \varphi(U_{1-e} x)$ для всех $x \in A_\varphi$ и всех идемпотентов $e \in A$;

2) $\varphi(a \circ x) \geqslant 0$ для всех $a \in A_\varphi^+$, $x \in A^+$;

3) $|\varphi(a \circ x)| \leqslant \|x\| \varphi(|a|)$ для всех $x \in A$, $a \in A_\varphi$;

4) $\varphi((a \circ b) \circ c) = \varphi(a \circ (b \circ c))$ для всех $a \in A_\varphi$, $b, c \in A$;

5) $\varphi(U_b a) = \varphi(b^2 \circ a)$ для всех $a \in A_\varphi$, $b \in A$, либо $a \in A$, $b \in A_\varphi$.

Доказательство проводится совершенно аналогично случаю конечных следов (теорема 4.1 гл. II). Заметим, что свойства 1)—3) можно доказать, как и в теореме 1.4, сведением к случаю W^*-алгебр.

Следствие 3. Если φ — след на JBW-алгебре A, то $\varphi(|a|) = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |\varphi(a \circ x)|$ для любого $a \in A_\varphi$.

Доказательство. В силу следствия 2 $|\varphi(a\circ x)|\leqslant\varphi(|a|)$ для всех $x\in A$, $\|x\|\leqslant 1$. Если s — симметрия в A, такая, что $|a|=a\circ s$, то $\|s\|=1$ и $\varphi(|a|)=\varphi(a\circ s)$. Утверждение доказано.

Покажем, как предложения 1.2 и 1.3 могут быть использованы для доказательства аналога известного результата Хаагерупа [150] (см. также [133]) о нормальных весах.

Теорема 1.5. Пусть φ — вес на JBW-алгебре A. Следующие условия эквивалентны:

(1) φ вполне аддитивен, т. е. $\varphi(\sum a_i)=\sum\varphi(a_i)$ для произвольного семейства $\{a_i\}$ положительных элементов, для которого определена сумма $\sum a_i$;

(2) φ нормален;

(3) φ слабо полунепрерывен снизу;

(4) $\varphi(a)=\sup\{\psi(a);\ \psi\in F\}$ для любого $a\in A^+$, где F — некоторое семейство положительных нормальных функционалов на A;

(5) $\varphi(a)=\sum\psi_i(a)$ для любого $a\in A^+$, где $\{\psi_i\}$ — некоторое семейство положительных нормальных функционалов на A.

Доказательство. Импликации (5) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) очевидны. Поэтому достаточно доказать импликацию (1) $\Longrightarrow$ (5). В силу теорем 1.4 и 3.8 гл. I и полной аддитивности φ достаточно отдельно рассмотреть два случая:

(i) A — обратимая JW-алгебра;

(ii) $A=L^\infty(\Omega,\mu,M)$, где M — спин-фактор, либо исключительная JBW-алгебра M_3^8.

Рассмотрим случай (i). В силу предложения 1.3 вес φ можно продолжить до веса φ_1 на обертывающей W^*-алгебре $\mathcal{U}(A)$. Если $A=\mathcal{U}(A)_{SA}$, то $\varphi_1=\varphi$. Если $R(A)\cap iR(A)=\{0\}$, то, по построению, $\varphi_1(x)=\varphi(\Psi(x))$. Так как отображение $\Psi\colon\mathcal{U}(A)\to R(A)$ ультраслабо непрерывно (следствие предложения 3.5 гл. I), то φ_1 является вполне аддитивным весом на $\mathcal{U}(A)$. По теореме Хаагерупа для W^*-алгебр [150] (см. также [133]), существует семейство $\{\eta_i\}$ нормальных положительных функционалов на $\mathcal{U}(A)$, такое, что $\varphi_1(a)=\sum\eta_i(a)$ для всех $a\in\mathcal{U}(A)^+$. Положив $\psi_i=\eta_i|_A$, получим, что $\varphi(a)=\sum\psi_i(a)$ для всех $a\in A^+$, т. е. имеет место (5). Утверждение доказано.

Прежде чем доказать импликацию (1) $\Longrightarrow$ (5) в случае (ii), приведем два вспомогательных результата, представляющих самостоятельный интерес.

Предложение 1.6. Пусть φ — произвольный вес на JBW-алгебре A. Следующие условия эквивалентны:

(а) φ — полуконечный вес;

(б) A_φ плотно в A в сильной топологии;

(в) A_φ плотно в A в слабой топологии.

Доказательство. (а)$\Longrightarrow$(б). Если вес φ полуконечен, то существует сеть $\{a_\alpha\} \subset A_\varphi$, возрастающая к $\mathbf{1}$, причем $\varphi(a_\alpha) < +\infty$ для всех α. По теореме 1.5 гл. I, $a_\alpha \to \mathbf{1}$ сильно. Тогда для любого $a \in A$ из непрерывности умножения в сильной топологии на ограниченных подмножествах A вытекает, что $U_{a_\alpha} a \to U_1 a = a$ сильно. В то же время в силу предложения 1.1 в) $\{U_{a_\alpha} a\} \subset A_\varphi$. Следовательно, A_φ сильно плотно в A.

Импликация (б)$\Longrightarrow$(в) очевидна.

(в)$\Longrightarrow$(а). Так как A_φ является квадратичным идеалом и $A_\varphi = A_\varphi^+ - A_\varphi^+$, то в силу [168; лемма 2.2] в A_φ существует возрастающая сеть $\{e_\alpha\}$, $0 \leqslant e_\alpha \leqslant \mathbf{1}$, такая, что для любого $a \in A_\varphi : \|U_{1-e_\alpha} a\| \to 0$ (т. е. $\{e_\alpha\}$ — возрастающая аппроксимативная единица для A [11; лемма 9.1]). В силу монотонной полноты JBW-алгебры (теорема 1.3 гл. I) существует $p = \sup e_\alpha \in A$, причем $e_\alpha \to p$ сильно. В силу непрерывности умножения в сильной топологии сеть $\{U_{1-e_\alpha} a\}$ сильно сходится к $U_{1-p}\, a$. В то же время $\|U_{1-e_\alpha} a\| \to 0$. Следовательно, $U_{1-p}\, a = 0$ для всех $a \in A_\varphi^+$. В силу [11; предложение 2.8] $(1-p) \circ a = 0$ для всех $a \in A_\varphi^+$ и, следовательно, $p \circ a = a$ для всех $a \in A_\varphi = A_\varphi^+ - A_\varphi^+$. Так как умножение слабо непрерывно по каждому аргументу (теорема 1.5 гл. I) и A_φ слабо плотно в A, то $p \circ a = a$ для всех $a \in A$, т. е. $p = \mathbf{1}$. Итак, мы построили сеть $\{e_\alpha\} \subset A_\varphi^+$, возрастающую к $\mathbf{1}$, т. е. вес φ полуконечен. Предложение доказано.

Предложение 1.7. Пусть φ — вес на JBW-алгебре A. Тогда существует идемпотент $p \in A$, такой, что вес φ полуконечен на $U_p(A)$ и $\varphi(x) = +\infty$ для всех положительных $x \in U_{1-p}(A)$, $x \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\bar{A}_\varphi$ — слабое замыкание квадратичного идеала A_φ. Из доказательства предыдущего предложения видно, что A_φ сильно плотно в JBW-алгебре $\bar{A}_\varphi$, причем $p = \sup e_\alpha$ является единицей в $\bar{A}_\varphi$, т. е. $\bar{A}_\varphi = U_p(\bar{A}_\varphi) \subset U_p(A)$. В силу непрерывности умножения по совокупности переменных в сильной топологии, $\bar{A}_\varphi$ также является квадратичным идеалом и, так как $p \in \bar{A}_\varphi$, то $U_p(A) \subset \bar{A}_\varphi$. Следовательно, $\bar{A}_\varphi = U_p(A)$. По построению, вес φ является полуконечным на $U_p(A)$, и $\varphi(x) = +\infty$ для всех $x \in U_{1-p}(A)$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$. Предложение доказано.

Вернемся к доказательству теоремы 1.5. В силу предложения 1.7 импликацию (1)$\Longrightarrow$(5) достаточно доказать для полуконечных весов. В самом деле, допустим, что для полуконечных весов верна импликация (1)$\Longrightarrow$(5). В обозначениях предложения 1.7 существует семейство нормальных положительных функционалов $\{f_i\}_{i\in I_1}$ на $U_p(A)$, таких, что $\varphi(a)=\sum\limits_{i\in I_1} f_i(a)$ для всех $a\in U_p(A)$, $a\geqslant 0$. Далее, так как JBW-алгебра обладает разделяющим семейством нормальных состояний, то существует семейство $\{g_i\}_{i\in I_2}$ нормальных состояний на $U_{1-p}(A)$, таких, что $\sum\limits_{i\in I_2} g_i(a)=+\infty$ для всех $a\in U_{1-p}(A)$, $a\geqslant 0$, $a\neq 0$. Положим $\psi_i(a)=f_i(U_p a)$ при $i\in I_1$, $\psi_i(a)=g_i(U_{1-p}a)$ при $i\in I_2$ для всех $a\in A^+$. Тогда для $I=I_1\cup I_2$ имеем, что $\varphi(a)=\sum\limits_{i\in I}\psi_i(a)$, $a\in A^+$. В самом деле, если $a\in U_p(A)$, то $U_{1-p}a=0$, т. е. $\psi_i(a)=0$ для всех $i\in I_2$. Отсюда $\sum\limits_{i\in I}\psi_i(a)=\sum\limits_{i\in I_1} f_i(U_p a)=\sum\limits_{i\in I_1} f_i(a)=\varphi(a)$. Если $a\bar{\in} U_p(A)$, то в силу предложения 1.7 $\varphi(a)=+\infty$. С другой стороны, $U_{1-p}a\neq 0$, так как при $U_{1-p}a=0$ из [11; предложение 2.8] следует, что $(1-p)\circ a=0$, т. е. $a=a\circ p\in U_p(A)$. Следовательно, если $a\geqslant 0$, $a\bar{\in} U_p(A)$, то $U_{1-p}a\geqslant 0$, $U_{1-p}a\neq 0$. Поэтому $\sum\limits_{i\in I}\psi_i(a)\geqslant\sum\limits_{i\in I_2} g(U_{1-p}a)=+\infty$, т. е. $\varphi(a)=\sum\limits_{i\in I}\psi_i(a)=+\infty$. Итак, мы показали, что $\varphi(a)=\sum\limits_{i\in I}\psi_i(a)$ для любого $a\in A^+$.

Таким образом, в оставшемся случае (ii) достаточно ограничиться рассмотрением полуконечного веса на $A=L^\infty(\Omega,\mu,V)$. В этом случае в силу предложения 1.2 существует семейство центральных идемпотентов $\{e_i\}_{i\in I}\subset A$, таких, что вес φ конечен на $e_i\circ A$ для всех $i\in I$. Положим $\psi_i(a)=\varphi(U_{e_i}a)=\varphi(e_i\circ a)$, $a\in A$. Тогда ψ_i — положительные функционалы на A. Так как вес вполне аддитивен, то все ψ_i являются вполне аддитивными и, следовательно, нормальными функционалами [121; теорема 1, с. 174]. Кроме того, очевидно, $\sum\limits_{i\in I}\psi_i(a)=\sum\limits_{i\in I}\varphi(e_i\circ a)=$ $=\varphi\left(\sum\limits_{i\in I} e_i\circ a\right)=\varphi(a)$ для всех $a\in A^+$, так как $\sum\limits_{i\in I} e_i=1$.

Теорема 1.5 полностью доказана.

§ 2. Пространства L_p

Пусть A — JBW-алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. В силу следствия 3 теоремы 1.4 отображение $a\to\tau(|a|)$ является нормой на A_τ. Пополнение A_τ по норме

$\|\cdot\|_1$ обозначим через $L_1(A, \tau)$, а норму $\|\cdot\|_1$ назовем L_1-нормой.

Предложение 2.1. Для любого $a \in A_\tau$ функционал φ_a, определенный как $\varphi_a(x) = \tau(a \circ x)$, $x \in A$, является нормальным функционалом на A.

Доказательство. Так как $A_\tau = A_\tau^+ - A_\tau^+$, то достаточно рассмотреть случай, когда $a \in A_\tau^+$. В силу следствия 2 (п. 5) теоремы 1.4 имеем

$$\varphi_a(x) = \tau(a \circ x) = \tau\left(U_{\sqrt{a}}\, x\right).$$

Из нормальности оператора $U_{\sqrt{a}}$ и следа τ следует нормальность φ_a. Утверждение доказано.

Следствие. Функционал φ_a положителен тогда и только тогда, когда положителен элемент a.

Доказательство. Если $a \in A_\tau^+$, то из положительности оператора $U_{\sqrt{a}}$ следует положительность функционала $\varphi_a(x) = \tau\left(U_{\sqrt{a}}\, x\right)$. Обратно, если $\varphi_a(x) = \tau(a \circ x) \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$, то, полагая $x = r(a^-)$ (носитель отрицательной части элемента a), получаем $-\tau(a^-) = \tau(a \circ r(a^-)) \geqslant 0$, т. е. $\tau(a^-) \leqslant 0$. Отсюда в силу точности τ и положительности a^- следует, что $a^- = 0$, т. е. $a \geqslant 0$. Следствие доказано.

Пусть N — банахово пространство, предсопряженное к JBW-алгебре A. По теореме 1.3 гл. I, N можно отождествить с пространством всех нормальных функционалов на A.

Теорема 2.2. Банаховы пространства $L_1(A, \tau)$ и N изометрически изоморфны.

Доказательство. В силу предложения 2.1 отображение $a \to \varphi_a$ является вложением A_τ в N, причем это вложение изометрическое, если на A_τ рассматривать L_1-норму (следствие 3 теоремы 1.4). Так как $L^1(A, \tau)$ есть пополнение A_τ по L_1-норме, то теорема будет доказана, если мы покажем, что множество $B = \{\varphi_a, a \in A_\tau\}$ плотно в N. Допустим противное, т. е. $\overline{B} \neq N$. Тогда существует непрерывный линейный функционал $x \in N^* = A$, $x \neq 0$, такой, что $\langle b, x \rangle = 0$ для всех $b \in \overline{B}$. В частности, $\langle \varphi_a, x \rangle = \tau(a \circ x) = 0$ для всех $a \in A_\tau$. Пусть s — симметрия в A, такая, что $|x| = s \circ x$. Тогда в силу следствия 2 (п. 4) теоремы 1.4 имеем

$$\tau(a \circ |x|) = \tau(a \circ (s \circ x)) = \tau((a \circ s) \circ x) = 0,$$

так как $a \circ s \in A_\tau$ (следствие 1 теоремы 1.4). В силу полуконечности следа τ существует сеть $\{b_\alpha\} \subset A_\tau^+$, возрастающая к элементу $|x|$. Тогда из нормальности оператора $U_{\sqrt{a}}$ и нормальности следа вытекает, что $0=\tau(a\circ|x|)=\tau\left(U_{\sqrt{a}}|x|\right)=$ $=\sup\limits_{\alpha}\tau\left(U_{\sqrt{a}}b_\alpha\right)$, т. е. $\tau\left(U_{\sqrt{a}}b_\alpha\right)=0$ для всех α и $a\in A_\tau$. Полагая $a=b_\alpha\in A_\tau^+$, получаем $\tau\left(b_\alpha^2\right)=0$, т. е. $b_\alpha=0$ в силу точности τ. Следовательно, $|x|=\sup b_\alpha=0$, т. е. $x=0$. Противоречие показывает, что $\overline{B}=N$. Теорема доказана.

Из неравенства $|\tau(a)|\leqslant\tau(|a|)=\|a\|_1$ (следствие 2 п. 3 теоремы 1. 4) вытекает, что функционал τ на A_τ является L_1-непрерывным. Поэтому его можно по непрерывности продолжить до линейного функционала на $L_1(A,\tau)$ (продолжение τ также обозначим через τ). Тогда из теоремы 2.2 и следствия предложения 2.1 вытекает следующий результат.

Предложение 2.3. Отображение $a\to\varphi_a$, где $\varphi_a(x)=$ $=\tau(a\circ x)$, $a\in L_1(A,\tau)$, $x\in A$ (или $a\in A$, $x\in L_1(A,\tau)$), является изометрическим и порядковым изоморфизмом между $L_1(A,\tau)$ и N (соответственно между A и $[L_1(A,\tau)]^*$).

Пусть теперь $p\geqslant1$ — действительное число. Рассмотрим неассоциативный аналог пространств L_p. Пусть $A_\tau^p=\{a\in A:\tau(|a|^p)<$ $<+\infty\}$. Ясно, что $A_\tau\subset A_\tau^p$ для любого $p\geqslant1$. Положим $\|a\|_p=$ $=\tau\left(|a|^p\right)^{1/p}$ при $p<+\infty$, $\|a\|_\infty=\|a\|$.

Предложение 2.4. Пусть $1\leqslant p\leqslant+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда

(i) $|\tau(a\circ b)|\leqslant\|a\|_p\|b\|_q$ для любых $a\in A_\tau^p$, $b\in A_\tau^q$ (неравенство Гельдера);

(ii) $\|a+b\|_p\leqslant\|a\|_p+\|b\|_p$ для любых a, $b\in A_\tau^p$;

(iii) $\|a\circ b\|_p\leqslant\|a\|_\infty\|b\|_p$ для любых $a\in A$, $b\in A_\tau^p$;

(iv) $\|a\circ b\|_1\leqslant\|a\|_p\|b\|_q$ для любых $a\in A_\tau^p$, $b\in A_\tau^q$;

(v) $2^{1-p}\|a+b\|_p^p\leqslant\|a\|_p^p+\|b\|_p^p$ для любых a, $b\in A_\tau^p$;

(vi) если $p\geqslant2$, то имеет место неравенство Кларксона:

$$\|a+b\|_p^p+\|a-b\|_p^p\leqslant2^{p-1}\left(\|a\|_p^p+\|b\|_p^p\right),\quad a,\ b\in A_\tau^p;$$

(vii) если $2>p>1$, то имеет место неравенство Маккарти:

$$\left(\|a+b\|_p^q+\|a-b\|_p^q\right)^{1/q}\leqslant2^{1/q}\left(\|a\|_p^p+\|b\|_p^p\right)^{1/p},\quad a,\ b\in A_\tau^p.$$

Доказательство. Поскольку во всех этих соотношениях участвуют только два элемента JBW-алгебры, то в силу замечания перед теоремой 1.4 предыдущего параграфа можно считать, что a и b являются элементами W^*-алгебры с точным нормальным полуконечным следом τ. Но тогда все эти соотношения вытекают из соответствующих соотношений в теории некоммутативных L_p-пространств. Так, соотношения (i)—(iv) для W^*-алгебр известны [85], однако в них участвует ассоциативное произведение операторов ab вместо йорданова произведения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$. Эти соотношения верны и для йорданова произведения, если учесть, что $\|a \circ b\|_p = \left\|\frac{1}{2}\left(ab+ba\right)\right\|_p \leqslant \frac{1}{2}(\|ab\|_p + \|ba\|_p) = \frac{1}{2}(\|ab\|_p + \|(ab)^*\|_p) = \frac{1}{2}(\|ab\|_p + \|ab\|_p) = \|ab\|_p$, поскольку $\|x^*\|_p = \|x\|_p$ для любого x из некоммутативного L_p-пространства [85]. Соотношения (v)—(vii) для W^*-алгебр также известны [100]. Предложение доказано.

Следствие. Отображение $a \to \|a\|_p$ является нормой на A_τ^p, причем имеет место соотношение

$$\|a\|_p = \sup\left\{|\tau(a \circ b)| \,\middle|\, b \in A_\tau^q,\ \|b\|_q \leqslant 1\right\} \tag{1}$$

для любого $a \in A_\tau^p$.

Доказательство. Соотношение $\|\lambda a\|_p = |\lambda|\,\|a\|_p$ очевидно. Остальные свойства нормы вытекают из точности следа τ и неравенства (ii) в предложении 2.4. Далее, в силу неравенства (i) $|\tau(a \circ b)| \leqslant \|a\|_p$ для $b \in A$, $\|b\|_q \leqslant 1$. Если $p=1$, то соотношение (1) доказано в следствии 3 теоремы 1.4. Если $p>1$, то положим $b = \frac{s \circ |a|^{p-1}}{\|a\|_p^{p/q}}$, где s — симметрия из полярного разложения $a = s \circ |a|$. Легко видеть, что $\|b\|_q = 1$ и $\tau(a \circ b) = \|a\|_p$. Утверждение доказано.

Через $L_p(A, \tau)$ обозначим пополнение A_τ^p по норме $\|\cdot\|_p$, которую будем называть L_p-нормой.

Теорема 2.5. Банахово пространство $L_p(A, \tau)$ является равномерно выпуклым для всех $p>1$. Пространство $L_p(A, \tau)$ изометрически изоморфно пространству, сопряженному к $L_q(A, \tau)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Доказательство. Напомним, что банахово пространство X называется равномерно выпуклым, если для любого числа ε, $0<\varepsilon\leqslant 2$, модуль выпуклости

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2};\ \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| = \varepsilon\right\}$$

является строго положительным числом.

Если $1<p<2$, то в силу неравенства Маккарти (предложение 2.4 (vii) при $\|x\|_p = \|y\|_p = 1$; $\|x-y\|_p = \varepsilon$ имеем

$$\left(\|x+y\|_p^q + \varepsilon^q\right)^{1/q} \leqslant 2^{1/q}(1+1)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = 2,$$

т. е.

$$\|x+y\|_p^q \leqslant 2^q - \varepsilon^q = 2^q\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]$$

или

$$\frac{\|x+y\|_p}{2} \leqslant \left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]^{1/q}.$$

Следовательно, модуль выпуклости (при $1<p<2$)

$$\delta_{L_p}(\varepsilon) \geqslant 1-\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]^{1/q} > 0.$$

Аналогично, используя неравенство Кларксона (предложение 2.4 (vi)), при $p \geqslant 2$ получаем

$$\delta_{L_p}(\varepsilon) \geqslant 1-\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{1/p} > 0.$$

Таким образом, пространство $L_p(A, \tau)$ равномерно выпукло для любого $p>1$. В частности, из теоремы Мильмана [83; с. 182] следует, что пространство $L_p(A, \tau)$ рефлексивно. Покажем, что $L_p(A,\tau) = [L_q(A, \tau)]^*$. Для любого $a \in A_\tau^p$ положим $\varphi_a(x) = \tau(a \circ x)$, $x \in A_\tau^q$. Из соотношения (1) в следствии предложения 2.4 вытекает, что φ_a — непрерывный линейный функционал на $L_q(A, \tau)$, причем соответствие $a \to \varphi_a$ является изометрическим вложением $\left(A_\tau, \|\cdot\|_p\right)$ в $[L_q(A, \tau)]^*$. Так как $L_p(A, \tau)$ есть пополнение $\left(A_\tau, \|\cdot\|_p\right)$ и пространство $[L_q(A, \tau)]^*$ полно, то это вложение продолжается до изометрического вложения $i: L_p(A, \tau) \to [L_q(A, \tau)]^*$. Отсюда и из рефлексивности пространств $L_p(A, \tau)$ и $L_q(A, \tau)$ следует, что $i(L_p(A, \tau)) = [L_q(A, \tau)]^*$. Теорема доказана.

§ 3. *OJ*-алгебра тотально измеримых элементов

Пусть A — JBW- алгебра, $A = A_{\mathrm{sp}} + A_{\mathrm{ex}}$ — ее разложение на специальную и исключительную части, где A_{sp} — JW-алгебра в некотором гильбертовом пространстве H, $A_{\mathrm{ex}} \cong C\left(X, M_3^8\right) \cong L^\infty\left(\Omega, \mu, M_3^8\right)$ (см. гл. III).

Через $\mathscr{A}(A)$ обозначим прямую сумму $\mathscr{A}(A_{sp}) \oplus S(X, M_3^8)$, где $\mathscr{A}(A_{sp})$ — множество всех самосопряженных операторов, присоединенных к JW-алгебре A_{sp} (§ 2 гл. III), $S(X, M_3^8)$ — универсальная OJ-алгебра, построенная в § 3 гл. III. Назовем $\mathscr{A}(A)$ множеством элементов, присоединенных к JBW-алгебре A. В силу спектральной теоремы для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (§2 гл. III) и спектральной теоремы для OJ-алгебр (§ 1 гл. III) всякий элемент $x \in \mathscr{A}(A) = \mathscr{A}(A_{sp}) \oplus$ $\oplus S(X, M_3^8)$ имеет спектральное разложение $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$, где $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство в JBW-алгебре A (здесь сходимость интегральных сумм понимается в смысле самосопряженных операторов для специальной части $\mathscr{A}(A_{sp})$ и в смысле OJ-алгебр для исключительной части $S(X, M_3^8)$). Обратно, из универсальности OJ-алгебры $S(X, M_3^8)$ следует, что для любого спектрального семейства $\{e_\lambda, \lambda \in \boldsymbol{R}\}$ в JBW-алгебре A интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ определяет некоторый элемент из $\mathscr{A}(A)$. Все сказанное можно резюмировать в следующей теореме.

Теорема 3.1. Существует биекция (взаимно однозначное соответствие) $\{e_\lambda\} \leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ между всеми спектральными семействами из JBW-алгебры A и элементами $\mathscr{A}(A)$.

Через $S(A)$ обозначим прямую сумму OJ-алгебр $S(A_{sp}) \oplus$ $\oplus S(X, M_3^8)$, где $S(A_{sp})$ — OJ-алгебра локально измеримых операторов, присоединенных к A_{sp}. Назовем $S(A)$ OJ-алгеброй л о к а л ь н о и з м е р и м ы х элементов, присоединенных к A.

Через $\mathcal{M}(A)$ обозначим прямую сумму OJ-алгебр $\mathcal{M}(A_{sp}) \oplus$ $\oplus S(X, M_3^8)$ и назовем ее OJ-алгеброй и з м е р и м ы х элементов, присоединенных к A.

Пусть на JBW-алгебре A задан точный нормальный полуконечный след τ.

Определение. Элемент x OJ-алгебры $S(A)$ назовем тотально измеримым или τ-и з м е р и м ы м, если в спектральном разложении $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ идемпотенты $e_\lambda^\perp$ и $e_{-\lambda}$ имеют конечный след, т. е. $\tau(e_\lambda^\perp) < +\infty$, $\tau(e_{-\lambda}) < +\infty$ при некотором $\lambda > 0$.

Через $\mathcal{K}(A)$ обозначим множество всех τ-измеримых элементов из $S(A)$. Поскольку из $\tau(e) < +\infty$ следует, что идемпотент

e модулярен, то $\mathcal{K}(A) \subset \mathcal{M}(A)$. Если след τ конечен, то очевидно, что

$$\mathcal{K}(A) = \mathcal{M}(A) = S(A) = \mathcal{A}(A).$$

Предложение 3.2. Множество $\mathcal{K}(A)$ является нормальной OJ-подалгеброй в $S(A)$. Если $x \in S(A)$, $|x| = \int\limits_0^{+\infty} \lambda de_\lambda$ — спектральное разложение модуля элемента x в OJ-алгебре $S(A)$, то следующие условия эквивалентны:

(i) $x \in \mathcal{K}(A)$;

(ii) $\tau(1 - e_{\lambda_0}) < +\infty$ для некоторого $\lambda_0 > 0$;

(iii) $\tau(1 - e_\lambda) < +\infty$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$, для некоторого $\lambda_0 > 0$;

(iv) $\tau(1 - e_\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$;

(v) существует идемпотент $e \in \mathcal{P}_A$, $\tau(e) < +\infty$, такой, что $e \circ x \in A$, где $\mathcal{P}_A$ — решетка всех идемпотентов из A.

Доказательство. В силу теорем 1.4 и 3.8 гл. I достаточно отдельно рассмотреть два случая:

а) $A = L^\infty(\Omega, \mu, M)$, где M — это либо спин-фактор, либо M_3^8;

б) A — обратимая JW-алгебра.

В случае а), согласно предложению 1.2, можно считать, что след τ конечен и, следовательно, $\mathcal{K}(A) = S(A)$, т. е. утверждение очевидно.

В случае б) след τ можно продолжить до точного нормального полуконечного следа τ_1 на обертывающей W^*-алгебре $\mathcal{U}(A)$ (предложение 1.3). Так как самосопряженный оператор $x \in S(A)$ является τ-измеримым тогда и только тогда, когда он τ_1-измерим относительно $\mathcal{U}(A)$, то, как и в теореме 2.8 гл. III, доказывается, что $\mathcal{K}(A)$ — нормальная OJ-подалгебра в $S(A)$. Эквивалентность условий (i) — (v) вытекает из соответствующего результата для W^*-алгебр [85; 2.1]. Предложение доказано.

Определение. Топологией сходимости по мере в OJ-алгебре $\mathcal{K}(A, \tau)$ назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образуют множества вида $N(\varepsilon, \delta)$, $\varepsilon, \delta > 0$, где

$$N(\varepsilon, \delta) = \left\{x \in \mathcal{K}(A, \tau) \,\middle|\, \exists\, e \in \mathcal{P}_A,\ \tau(e^\perp) \leqslant \delta,\ U_e x \in A,\ \|U_e x\| < \varepsilon\right\}.$$

Сходимость в этой топологии назовем сходимостью по мере. Легко видеть, что эта топология метризуема с помощью следующей метрики:

$$\rho(a, b) = \sigma(a - b) = \inf_{\lambda > 0} \max\{\lambda, \tau(1 - e_\lambda)\},$$

где $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство элемента $|a - b|$ в OJ-алгебре $\mathcal{K}(A, \tau)$.

Как и в случае W^*-алгебр [107, 125], доказывается, что все алгебраические операции в $\mathcal{K}(A, \tau)$ непрерывны и OJ-алгебра $\mathcal{K}(A, \tau)$ полна в метрике ρ [28, 40].

Мы покажем, что рассмотренные в предыдущем параграфе пространства $L_p(A, \tau)$ инъективно вкладываются в OJ-алгебру $\mathcal{K}(A, \tau)$, т. е. могут быть рассмотрены как подпространства $\mathcal{K}(A, \tau)$.

Лемма. Для любого $a \in A_\tau^+$ имеет место неравенство

$$\sigma(a) = \inf_{\lambda>0} \max\{\lambda, \tau(\mathbf{1} - e_\lambda\} \leqslant \|a\|_p^{\frac{p}{1+p}}. \tag{2}$$

Доказательство. Для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\|a\|_p^p = \int_0^{+\infty} \mu^p d\tau(e_\mu) \geqslant \int_\lambda^{+\infty} \mu^p d\tau(e_\mu) \geqslant \lambda^p \tau(\mathbf{1} - e_\lambda),$$

т. е. $\tau(\mathbf{1} - e_\lambda) \leqslant \left(\lambda^{-1}\|a\|_p\right)^p$. Следовательно, $\sigma(a) \leqslant \max \left\{\lambda, \left(\lambda^{-1}\|a\|_p\right)^p\right\}$ для любого $\lambda > 0$. Положив $\lambda = \|a\|_p^{\frac{p}{1+p}}$, получим неравенство (2).

Пусть x — произвольный элемент из $L_p(A, \tau)$, $\{x_n\} \subset A_\tau^p$ — L_p-фундаментальная последовательность, определяющая элемент x. В силу леммы последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в метрике $\rho(a, b) = \sigma(a - b)$ (т. е. по мере). В силу полноты $\mathcal{K}(A, \tau)$ последовательность $\{x_n\}$ сходится по мере к некоторому элементу $\hat{x} \in \mathcal{K}(A, \tau)$, причем $\hat{x}$ не зависит от выбора L_p-фундаментальной последовательности, определяющей элемент x (опять же в силу неравенства (2)). Поэтому корректно определено отображение $i_p : L_p(A, \tau) \to \mathcal{K}(A, \tau)$ для любого $p \geqslant 1$. Тем же способом, что и в случае W^*-алгебр [107], доказывается инъективность отображения i_p, т. е. если $i_p(x) = 0$, то $x = 0$ [28; теорема 4.1]. Следовательно, пространство $L_p(A, \tau)$ можно рассматривать как подпространство OJ-алгебры $\mathcal{K}(A, \tau)$, отождествляя $L_p(A, \tau)$ с $i_p(L_p(A, \tau))$.

Теорема 3.3. Пространство $L_p(A, \tau)$ совпадает с множеством

$$L_p = \left\{x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda \in \mathcal{K}(A, \tau) : \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^p d\tau(e_\lambda) < +\infty\right\}.$$

При этом

$$\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^p d\tau(e_\lambda)\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно ограничиться рассмотрением положительных элементов OJ-алгебры $\mathcal{K}(A, \tau)$. Для

$a = \int\limits_0^{+\infty} \lambda de_\lambda$ положим $(a)_n = \int\limits_0^n \lambda de_\lambda$. Элемент $a-(a)_n$ имеет спектральное семейство $\{e_\lambda'\}_{\lambda \geqslant 0}$, где

$$e_\lambda' = \begin{cases} e_n & \text{при } \lambda < n, \\ e_\lambda & \text{при } \lambda \geqslant n. \end{cases}$$

Следовательно, $\sigma(a-(a)_n) = \inf\limits_\lambda \max\{\lambda, \tau(1-e_\lambda')\} \leqslant \max\{0, \tau(1-e_0')\} = \tau(1-e_n) \to 0$ в силу предложения 3.2, т. е. $(a)_n \to a$ по мере для любого $a \in \mathcal{K}(A, \tau)$.

Пусть $x = \int\limits_0^{+\infty} \lambda de_\lambda \in L_p$, т. е. $\int\limits_0^{+\infty} \lambda^p d\tau(e_\lambda) < +\infty$. Для любого $n \geqslant 1$ $\tau((x)_n^p) = \int\limits_0^n \lambda^p d\tau(e_\lambda) < +\infty$, т. е. $(x)_n \in A_\tau^p$. Далее, при $m > n$ имеем $\|(x)_m - (x)_n\|_p^p = \int\limits_n^m \lambda^p d\tau(e_\lambda) \to 0$ при $m, n \to \infty$, т. е. $\{(x)_n\}_{n=1}^\infty$ является L_p-фундаментальной последовательностью в A_τ^p. Так как $(x)_n \to x$ по мере, то из определения вложения $i_p: L_p(A, \tau) \to \mathcal{K}(A, \tau)$ следует, что $x \in L_p(A, \tau)$. Обратно, пусть $x = \int\limits_0^{+\infty} \lambda de_\lambda \in L_p(A, \tau)$. Рассмотрим идемпотент e_n. В силу неравенства (iii) в предложении 2.4 для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\int\limits_0^n \lambda^p d\tau(e_\lambda) = \|(x)_n\|_p^p = \|e_n \circ x\|_p^p \leqslant \|e_n\|^p \|x\|_p^p = \|x\|_p^p.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \lambda^p d\tau(e_\lambda)$ сходится, т. е. $x \in L_p$. Этим доказано равенство $L_p(A, \tau) = L_p$. Второе утверждение теперь очевидно. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3.3 вытекает следующий результат.

Следствие. Пусть $x \in \mathcal{A}(A)$ — элемент, присоединенный к JBW-алгебре A, $x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ — его спектральное разложение. Тогда

(i) $x \in \mathcal{K}(A, \tau)$ в том и только в том случае, когда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ сходится по мере к x;

(ii) $x \in L_p(A, \tau)$ в том и только в том случае, когда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_\lambda$ сходится к x по L_p-норме.

§ 4. Теоремы Радона — Никодима

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на JBW-алгебре A. Для любого положительного элемента $h \in A$ определим функцию $\tau(h\cdot)$ на A^+ как $\tau(hx) = \tau(U_{h^{1/2}}x)$, $x \in A^+$. Легко видеть, что $\tau(h\cdot)$ является весом. Более того, имеет место следующий результат.

Предложение 4.1 Отображение $h \to \tau(h\cdot)$ является аффинным и сохраняющим порядок отображением из A^+ в множество нормальных полуконечных весов на A.

Доказательство. По теоремам 1.4 и 3.8 гл. I можно отдельно рассмотреть три случая:

(i) $A = L^\infty(\Omega, \mu, M)$, где M — спин-фактор, либо M_3^8;

(ii) A — эрмитова часть W^*-алгебры $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$;

(iii) A — обратимая JW-алгебра с $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$.

В первом случае в силу предложения 1.2 можно предположить, что след τ конечен и утверждение следует из предложения 2.3. В случае (ii) наше утверждение является частным случаем предложения 4.1 из работы Педерсена и Такесаки [108], в которой доказана общая теорема Радона — Никодима для весов на W^*-алгебрах. Рассмотрим случай (iii). Как и в предложении 1.3, след τ продолжим до точного нормального полуконечного следа $\tau_0(x) = \tau(\Psi(x))$, $x \in \mathcal{U}^+$, на обертывающей W^*-алгебре $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A) = R(A) + iR(A)$. Согласно упомянутому предложению 4.1 из [108], отображение $h \to \tau_0(h\cdot)$ является аффинным и сохраняющим порядок отображением из $\mathcal{U}^+ \supset A^+$ в множество нормальных полуконечных весов на $\mathcal{U}$. Поэтому наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что для $h \in A^+$ сужение $\tau(h\cdot)$ веса $\tau_0(h\cdot)$ является нормальным полуконечным весом на A. Так как A слабо замкнуто в $\mathcal{U}$, то нормальность $\tau(h\cdot)$ очевидна. Покажем полуконечность $\tau(h\cdot)$. В силу полуконечности $\tau_0(h\cdot)$ существует сеть $\{x_\alpha\}$ в $\mathcal{U}^+$, возрастающая к $\mathbf{1}$, и такая, что $\tau_0(hx_\alpha) < +\infty$ для всех α. Так как $h \in A^+$, то

$$\tau(h\Psi(x_\alpha)) = \tau\left(h^{1/2}\Psi(x_\alpha)h^{1/2}\right) = \tau\left(\Psi\left(h^{1/2}x_\alpha h^{1/2}\right)\right) =$$

$$= \tau_0\left(h^{1/2}x_\alpha h^{1/2}\right) = \tau(hx_\alpha) < +\infty$$

для всех α. Из положительности и нормальности отображения Ψ следует, что сеть $\{\Psi(x_\alpha)\} \subset A^+$ возрастает к $\Psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Полагая $a_\alpha = \Psi(x_\alpha)$, получаем сеть $\{a_\alpha\}$, возрастающую к $\mathbf{1}$, и такую, что $\tau(ha_\alpha) < +\infty$ для всех α, т. е. вес $\tau(h\cdot)$ полуконечен. Предложение доказано.

Теперь, как и в случае W^*-алгебр [108], рассмотрим веса, порожденные элементами, присоединенными к JBW-алгебре A. Пусть $\mathscr{A}(A)$ — множество всех элементов, присоединенных к A (см. § 3). Для элемента $h \in \mathscr{A}(A)^+$ со спектральным семейством $\{e_\lambda\}$, т. е. $h = \int\limits_0^{+\infty} \lambda de_\lambda$ (см. теорему 3.1), положим

$$h_\varepsilon = h \circ (\mathbf{1} + \varepsilon h)^{-1} = \int\limits_0^{+\infty} \lambda(\mathbf{1} + \varepsilon\lambda)^{-1} de_\lambda, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда h_ε является ограниченным элементом в $\mathscr{A}(A)$, и потому $h_\varepsilon \in A^+$ для всех $\varepsilon > 0$. Если h, k — положительные элементы из $\mathscr{A}(A)$, то будем писать $h \leqslant k$, если $h_\varepsilon \leqslant k_\varepsilon$ для некоторого (и, следовательно, для всех) $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что сеть положительных элементов $\{h_\alpha\} \subset \mathscr{A}(A)$ возрастает к элементу $h \in \mathscr{A}(A)$, и записывать $h_\alpha \uparrow h$, если $h_{\alpha\varepsilon} \uparrow h_\varepsilon$. Теперь для $h \in \mathscr{A}(A)^+$ определим $\tau(h\cdot)$ как предел возрастающей сети нормальных полуконечных весов $\{\tau(h_\varepsilon\cdot)\}$ при $\varepsilon \searrow 0$. Совершенно аналогично предложению 4.1, только со ссылкой на предложение 4.2 из работы [108], доказывается

Предложение 4.2. Отображение $h \to \tau(h\cdot)$ является сохраняющим порядок нормальным отображением из множества $\mathscr{A}(A)^+$ в множество нормальных полуконечных весов на A.

Теперь сформулируем и докажем теорему Радона — Никодима для нормальных полуконечных весов A, из которой следует, что это отображение $h \to \tau(h\cdot)$ является биекцией между $\mathscr{A}(A)^+$ и множеством всех нормальных полуконечных весов на A.

Теорема 4.3. Пусть A—JBW-алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Если φ — нормальный полуконечный вес на A, то существует единственный положительный элемент $h \in \mathscr{A}(A)$, такой, что $\varphi = \tau(h\cdot)$.

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 4.1, отдельно рассмотрим три случая:

(i) $A = L^\infty(\Omega, \mu, M)$;

(ii) A — эрмитова часть W^*-алгебры $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A)$;

(iii) A — обратимая JW-алгебра с $R(A) \cap iR(A) = \{0\}$.

В случае (i) в силу предложения 1.2 можно предположить, что вес φ конечен, т. е. является нормальным функционалом на JBW-алгебре A. Поэтому утверждение теоремы следует из предложения 2.3.

В случае (ii) теорема 4.3 является частным случаем общей теоремы Радона—Никодима для W^*-алгебр [108, теорема 5.12], поскольку если $A = \mathcal{U}_{SA}$, то $h \in \mathcal{A}(A)$ в точности означает, что самосопряженный оператор h присоединен к W^*-алгебре $\mathcal{U}$.

Рассмотрим случай (iii). В обозначениях предложения 4.1 продолжим след τ и вес φ до следа τ_0 и веса φ_0 на W^*-алгебре $\mathcal{U}$, полагая

$$\tau_0(x) = \tau(\Psi(x)), \ \varphi_0(x) = \varphi(\Psi(x)), \ x \in \mathcal{U}.$$

По предложению 1.3 τ_0 является точным нормальным полуконечным следом на $\mathcal{U}$, φ_0 — нормальным полуконечным весом на $\mathcal{U}$. Применив упомянутую выше теорему 5.12 из [108] к W^*-алгебре $\mathcal{U}$, найдем положительный самосопряженный оператор h, присоединенный к $\mathcal{U}$, такой, что $\varphi_0 = \tau_0(h\cdot)$. Наша теорема будет доказана, если мы покажем, что $h \in \mathcal{A}(A)$. В силу теоремы 1.5 нормальный вес φ является пределом возрастающей сети $\{\varphi_\alpha\}$ нормальных положительных функционалов на A. Согласно предложению 2.3, существует возрастающая сеть $\{h_\alpha\}$ положительных операторов из $L_1(A, \tau) \subset \mathcal{K}(A, \tau) \subset \mathcal{A}(A)$ (следствие теоремы 3.3), такая, что $\varphi_\alpha = \tau(h_\alpha \cdot)$ для всех α. Положим $\omega_\alpha = \tau_0(h_\alpha \cdot)$. Тогда все ω_α являются нормальными положительными функционалами на $\mathcal{U}$, поскольку $L_1(A, \tau) \subset L_1(\mathcal{U}, \tau_0)$. Кроме того, сеть $\{\omega_\alpha\}$ возрастает к весу φ_0. В самом деле, если $x \in \mathcal{U}^+$ то, учитывая, что $h_{\alpha\varepsilon} \in A$, имеем

$$\omega_\alpha(x) = \tau_0(h_\alpha x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau_0\left(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2} x h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau\left(\Psi\left(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2} x h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \tau\left(h_{\alpha\varepsilon}^{1/2} \Psi(x) h_{\alpha\varepsilon}^{1/2}\right) = \tau(h_\alpha \Psi(x)) = \varphi_\alpha(\Psi(x)) \uparrow \varphi(\Psi(x)) = \varphi_0(x).$$

Следовательно, $\tau_0(h_\alpha x) \uparrow \varphi_0(x) = \tau_0(hx)$ для всех $x \in \mathcal{U}^+$. Отсюда вытекает, что $h_\alpha \uparrow h$, т. е. $h_{\alpha\varepsilon} \uparrow h_\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$ [108; предложения 4.2 и 7.6]. Так как A слабо замкнуто в $\mathcal{U}$ и $h_{\alpha\varepsilon} \in A$ для всех α, то $h_\varepsilon \in A$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $h \in \mathcal{A}(A)$. Теорема доказана.

Пусть $h \in \mathcal{A}(A)$, $\{e_\lambda\}$ — спектральное семейство h. Если s — симметрия в A, то оператор U_s является инволютивным автоморфизмом JBW-алгебры A. Поэтому $\{U_s e_\lambda\}$ — также спектральное семейство в A и, по теореме 3.1, определяет некоторый элемент $U_s h = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d U_s e_\lambda \in \mathcal{A}(A)$. Очевидно, что $U_s h_\varepsilon = (U_s h)_\varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$.

Определение. Элемент $h \in \mathscr{A}(A)$ будем называть центральным или присоединенным к центру A, если $U_s h = h$ для любой симметрии $s \in A$, т. е. если все спектральные идемпотенты h являются центральными.

Будем говорить, что вес φ доминируется весом ψ, если $\varphi \leqslant \lambda\psi$ при некотором $\lambda \in R_+$.

Предложение 4.4. В условиях предыдущей теоремы:

а) вес φ ограничен тогда и только тогда, когда $\tau(h) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tau(h_\varepsilon) < \infty$, т. е. $h \in L_1(A, \tau)$;

б) вес φ является следом тогда и только тогда, когда элемент h — центральный в $\mathscr{A}(A)$;

в) вес φ доминируется следом τ тогда и только тогда, когда $h \in A^+$, т. е. h — ограниченный элемент $\mathscr{A}(A)$.

Доказательство. Утверждение а) очевидно, поскольку $\varphi(1) = \tau(h1) = \tau(h) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tau(h_\varepsilon)$.

б) Если h — центральный элемент в $\mathscr{A}(A)$, то, по свойству (iii) следа τ (см. § 1), для любых $x \in A^+$ и симметрий $s \in A$ имеем

$$\varphi(U_s x) = \tau(hU_s x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau(U_{h_\varepsilon^{1/2}} U_s x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau(U_s U_{h_\varepsilon^{1/2}} x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \tau(U_{h_\varepsilon^{1/2}} x) = \tau(hx) = \varphi(x),$$

поскольку $U_{h_\varepsilon^{1/2}} U_s = U_s U_{h_\varepsilon^{1/2}}$ в силу центральности всех h_ε. Следовательно, $\varphi(U_s x) = \varphi(x)$ для любой симметрии $s \in A$ и всех $x \in A^+$, т. е. φ — след. Обратно, пусть φ — след. Тогда для всех $x \in A^+$ и симметрий $s \in A$ будем иметь

$$\tau([U_s h]\, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau([U_s h]_\varepsilon\, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau([U_s h_\varepsilon]\, x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \tau(U_s([U_s h_\varepsilon]\, x)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau([U_s^2 h_\varepsilon] U_s x) = \lim \tau(h_\varepsilon U_s x) =$$

$$= \tau(hU_s x) = \varphi(U_s x) = \varphi(x) = \tau(hx).$$

Отсюда в силу единственности производной Радона — Никодима h в теореме 4.3 следует, что $U_s h = h$, т. е. h — центральный элемент в $\mathscr{A}(A)$.

Наконец, утверждение в) следует из предложения 4.2, поскольку $\varphi \leqslant \lambda\tau$ $(\lambda \in R_+)$ в том и только в том случае, когда $\tau(h\cdot) \leqslant \tau(\lambda 1 \cdot)$, т. е. $0 \leqslant h \leqslant \lambda 1$. Предложение доказано.

Полученные результаты можно переформулировать в терминах спектральных семейств в A (см. теорему 3.1).

Следствие. Пусть A—JBW-алгебра с точным нормальным полуконечным следом τ. Существует биекция $\varphi \leftrightarrow \{e_\lambda\}$ между всеми нормальными полуконечными весами на A и положительными спектральными семействами в A, задаваемая как

$$\varphi(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau\left(a \int_0^{+\infty} \lambda (1 + \varepsilon\lambda)^{-1} de_\lambda\right), \; a \in A^+.$$

При этом вес φ ограничен тогда и только тогда, когда $\int_0^{+\infty} \lambda d\tau(e_\lambda) < +\infty$; вес φ является следом тогда и только тогда, когда все идемпотенты e_λ центральные; вес φ доминируется следом τ тогда и только тогда, когда $e_\mu = 1$ для некоторого $\mu > 0$.

В связи с теоремой 4.3 возникает вопрос о возможности получить для JBW-алгебр полный аналог теоремы Радона — Никодима, доказанной Педерсеном и Такесаки для W^*-алгебр [108; теорема 5.12].

Проблема. Найти условия, при которых теорема 4.3 верна без предположения, что τ — след, т. е. когда τ является нормальным полуконечным весом на A.

В заключение приведем еще один вариант теоремы Радона — Никодима для нормальных положительных функционалов на JBW-алгебрах.

Теорема 4.5. Пусть φ, ψ — нормальные положительные функционалы на JBW-алгебре A, причем ψ доминирует φ, т. е. $\psi \leqslant \lambda\varphi$ для некоторого $\lambda \in R_+$. Тогда существует элемент $h \in A$, $0 \leqslant h \leqslant \lambda 1$, такой, что $\psi(x) = \varphi(h \circ x)$ для всех $x \in A$.

Доказательство. Пусть N — пространство всех нормальных функционалов на A, т. е. $A = N^*$ (см. § 1 гл. I). Напомним, что слабая топология в A — это топология $\sigma_A = \sigma(A, N) = \sigma(N^*, N)$, а слабая топология в N — это топология $\sigma_N = \sigma(N, A) = \sigma(N, N^*)$. Для $a \in A$, $\varphi \in N$ равенством $(L_a \varphi)(x) = \varphi(a \circ x)$ определяется нормальный функционал $L_a \varphi$ на A. Это следует из нормальности оператора U_b, $b \in A$, и тождества $\varphi(a \circ x) = \frac{1}{2} \varphi(U_{a+1}x - U_a x - x)$ (см. доказательство следствия теоремы 1.4).

Легко видеть, что в силу непрерывности умножения в слабой топологии отображение $L : a \to L_a \varphi$ из A в N при фиксированном $\varphi \in N$ является непрерывным линейным отображением из (A, σ_A) в (N, σ_N). Поэтому L отображает слабо компактное множество $U = \{a \in A : \|a\| \leqslant 1\}$ в выпуклое компактное множество $V = L(U) \subset N$.

Покажем, что при выполнении условия теоремы $\psi \in V$. Ясно, что, не ограничивая общности, можно считать $\psi \leqslant \varphi$ (т. е. $\lambda = 1$).

Допустим, что $\psi \in \bar{V}$. Тогда по теореме Хана—Банаха существует $x_0 \in A = N^*$, такой, что

$$|f(x_0)| \leqslant 1 \text{ для всех } f \in V, \ |\psi(x_0)| > 1. \tag{1}$$

С другой стороны, если x_0^+, x_0^- — положительная и отрицательная части x_0, $e = r\left(x_0^+\right)$ — носитель x_0^+, то

$$\varphi([e-(1-e)] \circ x_0) = \varphi\left(x_0^+ + x_0^-\right) = \varphi(|x_0|) \geqslant \psi(|x_0|). \tag{2}$$

Так как $\|e-(1-e)\| = 1$, то $L_{e-(1-e)}\varphi \in V$, и в силу (1) $|\varphi([e-(1-e)] \circ x_0)| = \left|\left(L_{e-(1-e)}\varphi\right)(x_0)\right| \leqslant 1$. Отсюда и из (2) следует, что $\psi(|x_0|) \leqslant 1$. Следовательно, $|\psi(x_0)| \leqslant \psi(|x_0|) \leqslant 1$, что противоречит (1). Это противоречие означает, что существует элемент $a \in U$, такой, что

$$\psi = L_a\varphi. \tag{3}$$

Пусть $p = r\left(a^+\right)$ — носитель положительной части a. Тогда из положительности ψ и неравенства $p-(1-p) \leqslant 1$ имеем

$$\psi(1) \geqslant \psi(p-(1-p)) = \varphi([p-(1-p)] \circ a) = \varphi\left(a^+ + a^-\right),$$

т. е. $\varphi\left(a^+\right) + \varphi\left(a^-\right) \leqslant \psi(1)$. В то же время $\varphi\left(a^+\right) - \varphi\left(a^-\right) = \varphi(a) = \psi(1)$. Следовательно, $\varphi\left(a^-\right) = 0$, а так как $\psi \leqslant \varphi$, то $\psi\left(a^-\right) = 0$.

Положим $h = a^+$. Тогда из $\|h\| \leqslant \|a\| \leqslant 1$ следует, что $0 \leqslant h \leqslant 1$. Покажем, что $\psi = L_h\varphi$. Для любого $x \in A$ в силу неравенства Шварца $(\varphi(a \circ b))^2 \leqslant \varphi(a^2)\varphi(b^2)$ для любых $a, b \in A$) имеем

$$\varphi\left(a^- \circ x\right)^2 \leqslant \varphi\left(\left(a^-\right)^2\right)\varphi\left(x^2\right) = \varphi\left(a \circ a^-\right)\varphi\left(x^2\right) = \psi\left(a^-\right)\varphi\left(x^2\right) = 0,$$

т. е. $\varphi\left(a^- \circ x\right) = 0$. Поэтому из (3) следует, что

$$\psi(x) = \varphi(a \circ x) = \varphi\left(a^+ \circ x\right) - \varphi\left(a^- \circ x\right) = \varphi(h \circ x)$$

для всех $x \in A$. Теорема доказана.

КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ IV

§ 1. Подробную информацию о весах на W^*-алгебрах можно найти в книгах [133, 134]. На JBW-алгебрах веса были введены в работах [81, 95]. След определяется в [81] как вес, удовлетворяющий условию (ii) теоремы 1.4, а в [95] — как вес со свойством 4) в следствии 2. Как уже отмечалось в главе I, эквивалентность всех условий: (i), (ii) в теореме 1.4 и 1)—5) в следствии 2 установлена в работе [55]. Теорема 1.5 получена А. А. Адизовым [5]; она является обобщением известного результата Хаагерупа [150] о нормальных весах на W^*-алгебрах и подтверждает гипотезу в разделе IV.1.2 монографии [81]. Из других результатов по теории меры на JBW-алгебрах отметим аналог теоремы Глисона: всякая вероятностная мера на проекторах JBW-алгебры A без прямых слагаемых типа I_2 единственным образом продолжается до нормального состояния на A [4, 36, 39, 102].

§ 2. Основы теории некоммутативного интегрирования были заложены в работе Сигала [125], который рассмотрел алгебру измеримых операторов, присоединенных к W^*-алгебре, и выделил в ней пространства L_1 и L_2. Пространства L_p на W^*-алгебрах с полуконечным следом рассматривали Диксмье [73], Стайнспринг [126], Нельсон [107], Йедон [85, 86] и др. В последние годы все больший интерес представляет теория интегрирования по состояниям и весам на W^*-алгебрах (необязательно полуконечных). Более подробную информацию по теории некоммутативного интегрирования и библиографию можно найти в обзорной статье А. Н. Шерстнева [157] (см. также [100]).

Пространства L_1 и L_2 для JBW-алгебры с конечным следом были впервые рассмотрены Ш. А. Аюповым [28], хотя некоторые предпосылки имелись в работе Янссена [178]. Эти результаты затем были перенесены на случай полуконечного следа М. А. Бердикуловым [52]. Пространства L_p ($p \geqslant 1$) по полуконечному следу исследовали Р. З. Абдуллаев [1] и Иокум [81], а для $0<p<1$ пространства L_p рассмотрены в [2]. Теорема 2.2 получена в работах [28, 52] и независимо — в [81]. Теорема 2.5 для $p \geqslant 2$ доказана Иокумом, который высказал гипотезу о том, что она верна и при $1<p\leqslant 2$ [81; V.3.10]. Таким образом, наша теорема 2.5 подтверждает эту гипотезу, причем равномерная выпуклость неассоциативного пространства L_p при $1<p<2$ здесь доказана впервые. Изоморфизм пространств L_p и $L_q^*\left(p \geqslant 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ несколько другим методом доказан в [1]. Пространства L_p по состояниям и весам на JBW-алгебрах рассматривались в работах [3, 37, 140]. Обобщением пространств L_p являются пространства Орлича, построенные на JBW-алгебрах с конечным следом. Их конструкция и абстрактная характеризация получены в [135, 136].

§ 3. Тотально измеримые операторы, присоединенные к W^*-алгебре с полуконечным следом, рассматривал Йедон [85], который доказал аналог предложения 3.2 в случае W^*-алгебр и ввел метрику $\rho(a, b)=\sigma(a-b)$, задающую топологию сходимости по мере. При вложении пространства $L_p(A, \tau)$ в OJ-алгебру $\mathcal{K}(A, \tau)$ использована идея работы Нельсона [107]. Результаты этого параграфа для случая конечного следа получены Ш. А. Аюповым [28] и обобщены на случай полуконечного следа Р. З. Абдуллаевым и М. А. Бердикуловым. Топология сходимости по мере и ее обобщения на произвольных OJ-алгебрах рассматривались в работах [15, 21, 28]. Свойства сходимости по мере и другие виды сходимости в OJ-алгебре $\mathcal{K}(A, \tau)$ (в среднем, почти всюду, почти равномерно и т. д.) исследовались в [2, 90—92]. Эти сходимости использованы в эргодических теоремах для марковских операторов на JBW-алгебрах [18, 20, 22, 23], теоремах о сходимости условных математических ожиданий и усиленных законах больших чисел в вероятностных пространствах на йордановых алгебрах [17, 19, 29, 40, 53].

§ 4. Наиболее общий вид теоремы Радона — Никодима для весов на W^*-алгебрах получен в работе Педерсена и Такесаки [108]. Ими было установлено, что если φ и τ — нормальные полуконечные веса на W^*-алгебре $\mathcal{U}$, причем φ инвариантен относительно группы $\{\sigma_t, t \in \boldsymbol{R}\}$ модулярных автоморфизмов, ассоциированной с весом τ, то существует положительный самосопряженный оператор h, присоединенный к $\mathcal{U}$, инвариантный относительно действия группы $\{\sigma_t\}$, такой, что $\varphi = \tau(h\cdot)$.

Основной результат настоящего параграфа (теорема 4.3) является йордановым аналогом частного случая теоремы Педерсена — Такесаки (когда τ является следом на $\mathcal{U}$). Теорема 4.3 доказана Ш. А. Аюповым и Р. З. Абдуллаевым [37, 38]. Частный случай этой теоремы, когда вес φ доминируется следом τ (предложение 4.4 в)) был доказан Кингом [95]. Уточнение теоремы 4.3 для йордановой динамической системы (A, G) (см. комментарии к главе I), когда φ является G-инвариантным состоянием на A, получено в работе [79]. Теорема 4.5 принадлежит Ш. А. Аюпову [35]; она обобщает теорему Сакаи [116; 1.24.4] (см. также [81; III.5.4]).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаев Р. З. Пространства L_p для йордановых алгебр с полуконечным следом//Деп. ВИНИТИ № 1875—83 деп., 1983. 19 с.
2. Абдуллаев Р. З. L_p-пространства для йордановых алгебр $(0<p<1)$// Докл. АН УзССР, 1983. № 9. С. 4—6.
3. Абдуллаев Р. З. Неассоциативные пространства L_p //Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1983. № 6. С. 3—5.
4. Адизов А. А. Меры на проекторах йордановых алгебр типа I//Докл. АН УзССР, 1984. № 6. С. 7—8.
5. Адизов А. А. Нормальные веса на JBW-алгебрах//Докл. АН УзССР, 1985. № 8. С. 3—4.
6. Альфсен (Alfsen E. M.). Compact convex sets and boundary integrals//Ergebnisse Math. 57, Berlin: Springer. 1971. IX+210 p.
7. Альфсен, Ханке-Ольсен, Шульц (Alfsen E. M., Hanche-Olsen H., Shultz F. W.). State spaces of C^*-algebras//Acta Math., 1980. Vol. 144. N 3—4. P. 267—305.
8. Альфсен, Шульц (Alfsen E. M., Shultz F. W.) Non commutative spectral theory for affine functions on convex sets//Mem. Amer. Math. Soc., 172. Providence R. I.: AMS, 1976. XI+120 p.
9. Альфсен, Шульц (Alfsen E. M., Shultz F. W.). State spaces of Jordan algebras//Acta Math., 1978. Vol. 140. N 3—4. P. 155—190.
10. Альфсен, Шульц (Alfsen E. M., Shultz F. W.). On non commutative spectral theory and Jordan algebras//Proc. London Math. Soc., 1979. Vol. 38. P. 497—516.
11. Альфсен, Шульц, Штермер (Alfsen E. M., Shultz F. W., Stormer E.). A Gelfand—Neumark theorem for Jordan algebras//Advances in Math., 1978. Vol. 28. N 1. P. 11—56.
12. Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А. Топологические алгебры Буля. Ташкент: Изд-во АН УзССР. 1963. 132 с.
13. Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А. Очерк теории топологических полуполей//УМН, 1966. Т. 21. Вып. 4 (130). С. 185—218.
14. Араки (Araki H.). On the characterization of the state space of quantum mechanics//Commun. Math. Phys., 1980. Vol. 75. P. 1—25.
15. Аюпов Ш. А. Топологические частично упорядоченные йордановы алгебры//Успехи математических наук. 1980. Т. 35. Вып 3 (213). С. 138—140.
16. Аюпов Ш. А. Теорема эргодического типа в йордановых алгебрах//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1980. № 6. С. 10—16.
17. Аюпов Ш. А. Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах//Докл. АН УзССР, 1981. № 10. С. 3—5.
18. Аюпов Ш. А. Ergodic theorems in Jordan algebras of measurable elements//Analele Univ. Craiova. Ser. Mat. Fiz.-Chim., 1981. Vol. 9. P. 22—28.
19. Аюпов Ш. А. Martingale convergence and strong laws of large numbers in Jordan algebras//Analele Univ. Craiova. Ser. Mat. Fis.-Chim., 1981, Vol. 9. P 29—34.
20. Аюпов Ш. А. Статистические эргодические теоремы в йордановых алгебрах//Успехи математических наук. 1981. Т. 36. Вып. 6 (222). С. 201—202.

21. Аюпов Ш. А. Measure and topology on Jordan algebras//Proc. Conf. «Topology and Measure III» (Vitte/Hiddensee, GDR, 1980). Greifswald. 1982. Part. 1. P. 1—14.
22. Аюпов Ш. А. Эргодические теоремы для марковских операторов в йордановых алгебрах. I//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1982. № 3. С. 12—15.
23. Аюпов Ш. А. Эргодические теоремы для марковских операторов в йордановых алгебрах. II//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1982. № 5. С. 7—12.
24. Аюпов Ш. А. Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators//Math. Z., 1982. Vol. 181. P. 253—268.
25. Аюпов Ш. А. Модулярные йордановы алгебры самосопряженных операторов//Теор. и матем. физика, 1982. Т. 53. № 1. С. 77—82.
26. Аюпов Ш. А. О конструкции йордановых алгебр самосопряженных операторов//Докл. АН СССР, 1982. Т. 267. № 3. С. 521—524.
27. Аюпов Ш. А. Типы йордановых алгебр самосопряженных операторов и их обертывающих алгебр фон Неймана//Функциональный анализ и его приложения, 1983. Т. 17. Вып. 1. С. 65—66.
28. Аюпов Ш. А. Интегрирование на йордановых алгебрах//Изв. АН СССР. Сер. матем., 1983. Т. 47. № 1. С.3—25.
29. Аюпов Ш. А. Супермартингалы на йордановых алгебрах//Случайные процессы и математическая статистика. Ташкент: Фан, 1983. С. 20—31.
30. Аюпов Ш. А. Локально измеримые операторы для JW-алгебр и представление упорядоченных йордановых алгебр//Изв. АН СССР. Сер. матем., 1984. Т. 48. № 2. С. 211—236.
31. Аюпов Ш. А. Классификация инъективных JW-факторов//Функциональный анализ и его приложения, 1984. Т. 18. Вып. 3. С. 67—68.
32. Аюпов Ш. А. Probabilistic aspects of Jordan algebras//Proc. of the 7-th Conf. on Probability Theory (Brasov, Romania, 1982). Bucharest: Editura Academiei. 1984. P. 15—22.
33. Аюпов Ш. А. О существовании йордановых алгебр самосопряженных операторов заданного типа//Сиб. матем. журн., 1984. Т. 25. № 5. С. 3—8.
34. Аюпов Ш. А. JW-факторы и антиавтоморфизмы алгебр фон Неймана// Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985. Т. 49. № 1. С. 211—220.
35. Аюпов Ш. А. Теорема Радона—Никодима для положительных линейных функционалов на JBW-алгебрах//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1985. № 3. С. 3—4.
36. Аюпов Ш. А. Йордановы операторные алгебры//Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 27/Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР/.М. 1985. С. 67—98.
37. Аюпов Ш. А., Абдуллаев Р. З. Теорема Радона—Никодима и пространства L_p для весов на полуконечных JBW-алгебрах//Деп. ВИНИТИ № 2469—84 деп., 1984. 26 с.
38. Аюпов Ш. А., Абдуллаев Р. З. The Radon-Nikodym theorem for weights on semi-finite JBW-algebras//Math. Z., 1985. Vol. 188. P. 475—484.
39. Аюпов Ш. А., Адизов А. А. Меры на проекторах и состояния на JBW-алгебрах//Докл. АН УзССР, 1986. № 1. С. 3—4.
40. Аюпов Ш. А., Бердикулов М. А. Теоремы о сходимости мартингалов на йордановых алгебрах//Деп. ВИНИТИ № 5044—83 деп., 1983. 44 с.
41. Аюпов Ш. А., Желябин В. Н. Совместность элементов в йордановых алгебрах//Матем. заметки, 1985. Т. 37. № 3. С. 305—312.
42. Аюпов Ш. А., Закиров Ф. М. Модулярность и эргодичность в йордановых алгебрах//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1984. № 6. С. 7—12.
43. Аюпов Ш. А., Закиров Ф. М. Модулярные свойства G-конечных JBW-алгебр//Докл. АН УзССР, 1985. № 10. С. 3—4.
44. Аюпов Ш. А., Закиров Ф. М. Действия компактных групп на JW-факторах//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1986. № 3. С. 8—11.

45. А ю п о в Ш. А., Х а л м а т о в Р. Р. Порядковые свойства йордановых банаховых алгебр//Докл. АН УзССР, 1982. № 9. С. 3—4.
46. Б е л л и з а р, И о к у м (B e l l i s s a r d J., I o c h u m B.). Homogeneous self-dual cones versus Jordan algebras. The theory revisited//Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 1978. Vol. 28. N 1. P. 27—67.
47. Б е л л и з а р, И о к у м (B e l l i s s a r d J., I o c h u m B.). L'algebre de Jordan d'une cone autopolaire facialement homogene//C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A., 1979. T. 288. P. 229—232.
48. Б е л л и з а р, И о к у м (B e l l i s s a r d J., I o c h u m B.). Spectral theory for facially homogeneous symmetric self-dual cones//Math. Scand., 1979. Vol. 45. P. 118—126.
49. Б е л л и з а р, И о к у м (B e l l i s s a r d J., I o c h u m B.). Homogeneous self-dual cones and Jordan algebras//Quantum Fields, Algebras, Processes (L. Streit Editor). Wien—New-York: Springer, 1980. P. 154—165.
50. Б е л л и з а р, И о к у м (B e l l i s s a r d J., I o c h u m B.). Order structure and Jordan Banach algebras//Proc. Symp. Pure Math., 1982. Vol. 38. Part 2. P. 297—299.
51. Б е н к е, Б о с (B e h n c k e H., B o s W.). *JB*-algebras with an exceptional ideal//Math. Scand., 1978. Vol. 42. N 2. P. 306—312.
52. Б е р д и к у л о в М. А. Пространства L_1 и L_2 для полуконечных *JBW*-алгебр//Докл. АН УзССР, 1982. № 6. С. 3—4.
53. Б е р д и к у л о в М. А. Условные математические ожидания и мартингалы на йордановых алгебрах//Докл. АН УзССР, 1983. № 6. С. 3—4.
54. Б е р д и к у л о в М. А. Характеризация условных математических ожиданий на йордановых алгебрах//Деп. ВИНИТИ № 1821—83 деп., 1983. 14 с.
55. Б е р д и к у л о в М. А. Следы на йордановых алгебрах//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1986. № 3. С. 11—15.
56. Б е р д и к у л о в М. А., А з и з о в Э. Ю. Условные ожидания на *JBW*-алгебрах//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1986. № 5.
57. Б о я д ж и е в (B o y a d j i e v H. N.). Order characterization of some Banach Jordan algebras//Докл. Болг. АН, 1979. Т. 32. № 8. С. 1019—1022.
58. Б о я д ж и е в, Я н г с о н (B o y a d j i e v H. N., Y o u n g s o n M. A.). Alternators on Banach Jordan algebras//Докл. Болг. АН, 1980. Т. 33. № 12. С. 1589—1590.
59. Б р а т т е л и У., Р о б и н с о н Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир. 1982. 511 с.
60. Б р а у н Р., К а у п, У п м а й е р (B r a u n R., K a u p W., U p m e i e r H.). A holomorphic characterization of Jordan C^*-algebras//Math. Z., Vol. 161. P. 277—290.
61. Б р а у н Х., К ё х е р (B r a u n H., K o e c h e r M.). Jordan-algebren. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 128. Berlin: Springer. 1966. XIV+357 p.
62. Б у н с (B u n c e J.). The order vector space structure of *JC*-algebras// Proc. London Math. Soc., 1971. Vol. 22. N 2. P. 359—368.
63. Б у н с (B u n c e L. J.). The theory and structure of dual *JB*-algebras// Math. Z., 1982. Vol. 180. P. 525—534.
64. Б у н с (B u n c e L. J.). Type I *JB*-algebras//Quart. J. Math. Oxford, 1983. Vol. 34. N 133. P. 7—19.
65. Б у н с (B u n c e L. J.). On the compact actions in *JB*-algebras//Proc. Edinburgh Math. Soc., 1983. Vol 26. N 3. P. 353—360.
66. В у л и х Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз. 1961. 407 с.
67. В у л ь ф с о н (W u l f s o h n A.). Tensor products of Jordan algebras//Canad. J. Math., 1975. Vol. 27. N 1. P. 60—74.
68. Д ж е к о б с о н (J a c o b s o n N.). Structure and Representations of Jordan Algebras//Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 39, 1968. X+453 p.
69. Д ж и о р д а н о (G i o r d a n o T.). Antiautomorphismes involutifs des facteurs injectifs//C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A., 1980. T. 291. P. 583—585.
70. Д ж и о р д а н о (G i o r d a n o T.). Antiautomorphismes involutifs des fac-

teurs de von Neumann injectifs, I//J. Operator theory, 1983. Vol. 10. N 2. P. 252—287.
71. Джиордано (Giordano T.). Antiautomorphismes involutifs des facteurs de von Neumann injectifs, II//J. Funct. Anal., 1983. Vol. 51. N 3. P. 326—360.
72. Джиордано, Джонс (Giordano T., Jones V.). Antiautomorphismes involutifs du facteur hyperfini de type II_1//C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A, 1980. T. 290. P. 29—31.
73. Диксмье (Dixmier J.). Formes lineares sur un anneau d'operateurs// Bull. Soc. Math. France, 1953. Vol. 81. P. 9—39.
74. Диксмье (Dixmier J.). Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien. Paris: Gauthier—Villars. 1969. 369 p.
75. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974. 400 с.
76. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца близкие к ассоциативным. М.: Наука. 1978. 432 с.
77. Закиров Ф. М. О теореме эргодического типа в йордановых алгебрах// Науч. труды ТашГУ «Матем. анализ и геометрия». Ташкент, 1983. С. 28—33.
78. Закиров Ф. М. Йордановы динамические системы//Докл. АН УзССР, 1985. № 6. С. 5—6.
79. Закиров Ф. М. О теореме Радона—Никодима для инвариантных состояний на JBW-алгебрах//Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1985. № 5. С. 13—17.
80. Ингельстам (Ingelstam L.). Hilbert algebras with identity//Bull. Amer. Math. Soc., 1963. Vol. 69. P. 794—796.
81. Иокум (Iochum B.). Cones autopolaires et algebres de Jordan//Lect. Notes Math. 1049. Berlin: Springer, 1984. 247 p.
82. Иокум, Шульц (Iochum B., Shultz F. W.). Normal state spaces of Jordan and von Neumann algebras//J. Funct. Anal., 1983. Vol. 50. N 3. P. 317—328.
83. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
84. Йедон (Yeadon F. J.). Convergence of measurable operators//Proc. Camb. Phil. Soc., 1973. Vol. 74. P. 257—268.
85. Йедон (Yeadon F. J.). Non commutative L^p-spaces//Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975. Vol. 77. P. 91—102.
86. Йедон (Yeadon F. J.). Isometries of non commutative L^p-spaces// Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1981. Vol. 90. P. 41—50.
87. Йордан, фон Нейман, Вигнер (Jordan P., von Neumann J., Wigner E.). On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism//Ann. Math., 1934. Vol. 35. P. 29—64.
88. Капланский (Kaplansky I.). Normed algebras//Duke Math. J., 1949. Vol. 16. P. 399—418.
89. Капланский (Kaplansky I.). Any orthocomplemented complete lattice is a continuous geometry//Ann. Math., 1955. Vol. 16. P. 524—547.
90. Каримов А. О свойствах сходимости по мере в йордановых алгебрах// Научн. труды ТашГУ «Матем. анализ и геометрия». Ташкент, 1983. С. 38—41.
91. Каримов А. Сходимости почти всюду в JW-алгебрах и их приложения к усиленным законам больших чисел//Докл. АН УзССР, 1985. № 11. С. 4—6.
92. Каримов А. Сходимости в йордановых алгебрах и их приложения// Деп. ВИНИТИ № 2891—85 деп., 1985. 22 с.
93. Кауп, Упмайер (Kaup W., Upmeier H.). Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces//Math. Z., 1977. Vol. 157. P. 179—200.
94. Кёхер (Koecher M.). Positivitätsbereichen in R^m//Amer. J. Math., 1957. Vol. 79. P. 595—596.
95. Кинг (King W. P. C.). Semi-finite traces on JBW-algebras//Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1983. Vol. 93. P. 503—509.

96. Кон (Connes A.). Une classification des facteurs de type III//Ann. Sci. Ecole Norm. Super, 1973. Vol. 6. N 2. P. 133—252.
97. Кон (Connes A.). Classification of injective factors//Ann. Math., 1976. Vol. 104. N 1. P. 73—115.
98. Кон, Такесаки (Connes A., Takesaki M.). Flots de poids sur les facteurs de type III//C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A., 1974. T. 278. P. 937—940.
99. Кон, Такесаки (Connes A., Takesaki M.). The flow of weights on factors of type III//Tohoku Math. J. Ser. 2, 1977. Vol. 29. P. 473—575.
100. Косаки (Kosaki H.). Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: non commutative L^p -spaces//J. Funct. Anal., 1984. Vol. 56. P. 29—78.
101. Лауденслагер (Lowdenslager D. B.). On postulates for general quantum mechanics//Proc. Amer. Math. Soc., 1957. Vol. 8. N 1. P. 88—91.
102. Матвейчук М. С. Одна теорема о состояниях на квантовых логиках. Состояния в алгебрах Йордана//Теор. и матем. физика, 1983. Т. 57. № 3. С. 465—468.
103. Мюрэй, фон Нейман (Murray F., von Neumann J.). On rings of operators. I//Ann. Math., 1936. Vol. 37. P. 116—229.
104. Мюрэй, фон Нейман (Murray F., von Neumann J.). On rings of operators. II//Trans. Amer. Math. Soc., 1937. Vol. 41. P. 208—248.
105. Мюрэй, фон Нейман (Murray F., von Neumann J.). On rings of operators. IV//Ann. Math., 1943. Vol. 44. P. 716—808.
106. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М.: Наука. 1968. 664 с.
107. Нельсон (Nelson E.). Notes on non commutative integration// J. Funct. Anal., 1974. Vol. 15. P. 103—116.
108. Педерсен, Такесаки (Pedersen G., Takesaki M.). The Radon—Nikodym theorem for von Neumann algebras//Acta Math. 1973. Vol. 130. N 1—2. P. 53—87.
109. Педерсен, Штермер (Pedersen G., Stormer E.). Traces on Jordan algebras//Canad. J. Math., 1982. Vol. 34. N 2. P. 370—373.
110. Райт (Wright J. D. M.). Jordan C^*-algebras//Mich. Math. J., 1977. Vol. 24. N 3. P. 291—302.
111. Райт, Янгсон (Wright J. D. M., Youngson M. A.). On isometries of Jordan algebras//J. London Math. Soc., 1978. Vol. 17. N 2. P. 339—344.
112. Робертсон (Robertson A. G.). Automorphisms of spin factors and the decomposition of positive maps//Quart. J. Math. Oxford, 1983. Vol. 34. N 133. P. 87—96.
113. Робертсон (Robertson A. G.). Positive extensions of automorphisms of spin factors//Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1983. Vol. 94A. N 1—2. P. 71—77.
114. Робертсон, Янгсон (Robertson A. G., Youngson M. A.). Positive projections with contractive complements on Jordan algebras// J. London Math. Soc., 1982. Vol. 25. N 2. P. 365—374.
115. Робинсон, Штермер (Robinson D. W., Stormer E.). Lie and Jordan structure in operator algebras//J. Austral. Math. Soc., 1980. Vol. A29. N 2. P. 129—142.
116. Сакаи (Sakai S.). C^*-algebras and W^*-algebras. Berlin: Springer, 1971. IX+256 p.
117. Сакаи (Sakai S.). On automorphism groups of II_1-factors//Tohoku Math. J., 1974. Vol. 26. N 3. P. 423—430.
118. Санкаран (Sankaran S.). The *-algebra of unbounded operators// J. London Math. Soc., 1959. Vol. 34. P. 337—344.
119. Санкаран (Sankaran S.). Stochastic convergence for operators// Quart. J. Math. Oxford, 1964. Ser. 2. Vol. 15. P. 97—102.
120. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А. Частично упорядоченные йордановы алгебры//Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 4. С. 789—792.

121. Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И. Упорядоченные алгебры. Ташкент: Фан. 1983. 304 с.
122. Сарымсаков Т. А., Гольдштейн М. Ш. О частично упорядоченных инволютивных алгебрах//Докл. АН СССР, 1976. Т. 228. № 2. С. 306—309.
123. Сарымсаков Т. А., Насиров С. Н., Хаджиев Дж. Описание идеалов одного класса колец//Докл. АН СССР, 1975. Т. 225. № 5. С. 1018—1019.
124. Сигал (Segal I.). Postulates for general quantum mechanics//Ann. Math., 1947. Vol. 48. P. 930—948.
125. Сигал (Segal I.). A non commutative extension of abstract integration//Ann. Math., 1953. Vol. 57. P. 401—457.
126. Стайнспринг (Stinespring W. F.). Integration theorems for gages and duality for unimodular groups//Trans. Amer. Math. Soc., 1959. Vol. 90. P. 15—56.
127. Стаси (Stacey P. J.). Local and global splitting in the state space of a JB-algebra//Math. Ann., 1981. Vol. 256. N 4. P. 497—507.
128. Стаси (Stacey P. J.). Real structure in the approximately finite dimensional II_∞ factor//Preprint Melbourne, 1981.
129. Стаси (Stacey P. J.). The structure of type I JBW-algebras//Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1981. Vol. 90. N 3. P. 477—482.
130. Стаси (Stacey P. J.). Type I_2 JBW-algebras//Quart. J. Math. Oxford, 1982. Vol. 33. N 129. P. 115—127.
131. Стаси (Stacey P. J.). Locally orientable JBW-algebras of complex type//Quart. J. Math. Oxford, 1982. Vol. 33. N 130. P. 247—251.
132. Стаси (Stacey P. J.). Real structure in the sigma-finite factors of type III_γ where $0<\lambda<1$//Proc. London. Math. Soc., 1983. Vol. 47. N 2. P. 275—284.
133. Стратила (Stratila S.). Modular theory in operator algebras. Bucuresti: Editura Academiei; Tunbridge Wells: Abacus Press. 1981. 492 p.
134. Стратила, Жидо (Stratila S., Zsido L.). Lectures on von Neumann algebras. Bucuresti: Editura Academiei; Tunbridge Wells: Abacus Press. 1979. 478 p.
135. Таджибаев Б. Р. Неассоциативные пространства Орлича измеримых элементов в йордановых алгебрах//Деп. ВИНИТИ № 5954—83 деп., 1983. 51 с.
136. Таджибаев Б. Р. Абстрактная характеризация неассоциативных пространств Орлича//Докл. АН УзССР. 1985. № 10. С. 4—6.
137. Такесаки (Takesaki M.). Theory of operator algebras. Berlin: Springer. 1979. VIII+415 p.
138. Топпинг (Topping D.). Jordan algebras of self-adjoint operators//Mem. Amer. Math. Soc., 53. Providence R. I.: AMS. 1965. 48 p.
139. Топпинг (Topping D.). An isomorphism invariant for spin factors//J. Math. Mech., 1966. Vol. 15. N 6. P. 1055—1064.
140. Трунов Н. В. Интегрирование относительно веса на йордановых алгебрах//Деп. ВИНИТИ № 2748—84 деп., 1984. 34 с.
141. Упмайер (Upmeier H.). Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras. Amsterdam: North Holland, 1985. XII+444 p.
142. Упмайер (Upmeier H.). Derivations of Jordan C^*-algebras//Math. Scand., 1980. Vol. 46. P. 251—264.
143. Упмайер (Upmeier H.). Automorphism groups of Jordan C^*-algebras//Math. Z., 1981. Vol. 176. P. 21—34.
144. Усманов Ш. М. Структура вещественных W^*-факторов типа III_0//Докл. АН УзССР, 1984. № 9. С. 3—4.
145. Усманов Ш. М. Классификация вещественных W^*-факторов типа III_λ, $0<\lambda<1$//Деп. ВИНИТИ № 8082—84 деп., 1984. 38 с.
146. Фон Нейман (von Neumann J.). Обобщение математического аппарата квантовой механики методами абстрактной алгебры. Ч. 1//Мат. сборник, 1936. Т. 1. № 4. С. 415—484.

147. Фон Нейман (von Neumann J.). On rings of operators, III//Ann. Math., 1940. Vol. 41. P. 94—161.
148. Фон Нейман (von Neumann J.). Continuous geometry and other topics. Collected works. Vol. IV. Oxford: Pergamon Press, 1962. X+516 p.
149. Фон Нейман Дж. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 367 с.
150. Хаагеруп (Haagerup U.). Normal weights on W^*-algebras//J. Funct. Anal., 1975. Vol. 19. P. 302—317.
151. Хаагеруп (Haagerup U.). Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1//Preprint. N 10. Odense University. 1984. 68 p.
152. Хаагеруп, Ханке-Ольсен (Haagerup U., Hanche-Olsen H.). Tomita—Takesaki theory for Jordan algebras//J. Operator Theory, 1984. Vol. 11. N 2. P. 343—364.
153. Ханке-Ольсен (Hanche-Olsen H.). A note on bidual of a JB-algebra//Math. Z., 1980. Vol. 175. N 1. P. 29—31.
154. Ханке-Ольсен (Hanche-Olsen H.). On the structure and tensor products of JC-algebras//Canad. J. Math., 1983. Vol. 35. N 6. P. 1059—1074.
155. Ханке-Ольсен, Штёрмер (Hanche-Olsen H., Stormer E.). Jordan Operator Algebras. London: Pitman Ltd, 1984. VIII+183 p.
156. Чилин В. И. Бэровские упорядоченные *-алгебры//Докл. АН СССР, 1981. Т. 258. № 5. С. 1065—1069.
157. Шерстнев А. Н. К общей теории меры и интеграла в алгебрах Неймана//Изв. вузов. Математика. 1982. № 8. С. 20—35.
158. Штёрмер (Stormer E.). On the Jordan structure of C^*-algebras// Trans. Amer. Math. Soc., 1965. Vol. 120. N 12. P. 438—447.
159. Штёрмер (Stormer E.). Jordan algebras of type I//Acta Math., 1966. Vol. 115. N 3—4. P. 165—184.
160. Штёрмер (Stormer E.). On anti-automorphisms of von Neumann algebras//Pacific J. Math., 1967. Vol. 21. N 2. P. 349—370.
161. Штёрмер (Stormer E.). Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators//Trans. Amer. Math. Soc., 1968. Vol. 130. N 1. P. 153—166.
162. Штёрмер (Stormer E.). Jordan algebras versus C^*-algebras//Acta Phys. Austr., 1976. Suppl. 1. N 16. P. 1—13.
163. Штёрмер (Stormer E.). Real structure in the hyperfinite factor// Duke Math. J., 1980. Vol. 47. N 1. P. 145—153.
164. Штёрмер (Stormer E.). Positive projections with contractive complements on C^*-algebras//J. London Math. Soc., 1982. Vol. 26. N 1. P. 132—142.
165. Штёрмер (Stormer E.). Conjugacy of involutive antiautomorphisms of von Neumann algebras//Preprint Oslo University, 1984. N 4. 20 p.
166. Шульц (Shultz F. W.). On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces//J. Funct. Anal., 1979. Vol. 31. N 3. P. 360—376.
167. Шульц (Shultz F. W.). Dual maps of Jordan homomorphisms and *-homomorphisms between C^*-algebras//Pacific. J. Math., 1981. Vol. 93. N 2. P. 435—443.
168. Эдвардс (Edwards C. M.). Ideal theory in JB-algebras//J. London Math. Soc., 1977. Vol. 16. N 3. P. 507—513.
169. Эдвардс (Edwards C. M.). On the centres of hereditary JBW-subalgebras of JBW-algebras//Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1979. Vol. 85. N 2. P. 317—324.
170. Эдвардс (Edwards C. M.). On the facial structure of JB-algebras// J. London Math. Soc., 1979. Vol. 19. N 2. P. 335—344.
171. Эдвардс (Edwards C. M.). Multipliers of Jordan Banach algebras// Math. Ann., 1980. Vol. 249. P. 265—272.
172. Эдвардс (Edwards C. M.). On Jordan W^*-algebras//Bull. Soc. Math., 1980. Vol. 104. P. 393—403.
173. Эмх Ж. Алгебраические методы статистической механики и квантовой теории поля. М.: Мир. 1976. 424 с.
174. Эмх, Кинг (Emch G., King W. P. C.). Faithful normal states on

JBW-algebras//Oper. Algebras and Appl. Proc. Symp. Pure Math. Kingston: AMS, 1980. Part 2. P. 305—307.
175. Эффрос, Штёрмер (Effros E., Stormer E.). Jordan algebras of self-adjoint operators//Trans. Amer. Math. Soc., 1967. Vol. 127. N 2. P. 313—316.
176. Эффрос, Штёрмер (Effros E., Stormer E.). Positive projections and Jordan structure in operator algebras//Math. Scand., 1979. Vol. 45. N 1. P. 127—138.
177. Янссен (Janssen G.). Formal-reelle Jordanalgebren unendlicher dimension und verallgemeinerte positivitätsbereiche//J. Reine Angew. Math., 1971. Vol. 249. P. 173—200.
178. Янссен (Janssen G.). Reelle Jordanalgebren mit endlicher Spur//Manuscripta Math., 1974. Vol. 13. N 3. P. 237—274.
179. Янссен (Janssen G.). Die strukture endlicher schwach abgeschlossener Jordanalgebren. T. I. Stetige Jordanalgebren//Manuscripta Math., 1975. Vol. 16. N 4. P. 277—305.
180. Янссен (Janssen G.). Die strukture endlicher schwach abgeschlossener Jordanalgebren. T. II. Diskrete Jordanalgebren//Manuscripta Math., 1975. Vol. 16. N 4. P. 307—332.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Шавкат Абдуллаевич Аюпов

КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Утверждено к печати Ученым советом Института математики имени В. И. Романовского, Отделением физико-математических наук АН УзССР.

Редактор *Ф. А. Сигал*
Художник *В. Ф. Ворохов*
Технический редактор *О. А. Мосина*
Корректор *Г. Уфимцева*

ИБ№ 3919

Сдано в набор 15.09.86. Подписано к печати 10.11.86. Р18021. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 7,75. Уч-изд. л. 7,8. Тираж 1000. Зак 208. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Фан» УзССР. 700047. Ташкент, ул. Гоголя, 70.
Типография Изд-ва «Фан». Ташкент, проспект М. Горького, 79.

Цена 1 р. 20 к.