Orlicz空间的K凸性

石忠锐

(哈尔滨科技大学)

1979年，F.Sullivan[1] 推广一致凸概念为K一致凸。记 $S(X)$、$U(X)$ 分别表示 Banach 空间的单位球面和单位球，X 称为K 一致凸的乃指 $x_1,x_2,\cdots x_{K+1}\in S(X)$，$\left\|\dfrac{x_1+\cdots+x_{K+1}}{K+1}\right\|\longrightarrow 1$ 蕴涵

$$Sup\left\{\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & & f_1(x_{K+1})\\ \cdots & \cdots & & \\ f_K(x_1) & f_K(x_2) & \cdots & f_K(x_{K+1})\end{vmatrix}; f_1,\cdots f_K\in U(X^*)\right\}\longrightarrow 0$$

显然K一致凸就是通常的一致凸。王廷辅等[2]引进相应的K严格凸概念，X 称为 K 严格凸乃指$x_1,\cdots x_{K+1}\in S(X)$，$\left\|\dfrac{x_1+\cdots+x_{K+1}}{K+1}\right\|=1$ 蕴涵$x_1,\cdots x_{K+1}$ 线性相关。易见 K一致凸$\Rightarrow$K严格凸。

K 凸性与自反性、超自反性、逼近理论、最优控制理论均有联系，近年来又用于正规结构及不动点理论。

赋 luxemburg 范数的 Orlicz 空间K凸性判据已由王廷辅、陈述涛[2]得到，本文将讨论赋 Orlicz 范数的Orlicz 空间的K凸性。

定理1 $[L^*_M(G),\|\cdot\|_M]$$K$严格凸的充要条件是$M(u)$严格凸，即对任何$x$，$y(x\neq y)$恒有$M\left(\dfrac{x+y}{2}\right)<\dfrac{M(x)+M(y)}{2}$（亦即$M(u)$ 的图象不含任何直线段）

证明 充分性 由[3]$p_{161}Th7.1$，$M(u)$ 严格凸蕴涵$[L^*_M(G),\|\cdot\|_M]$严格凸，而空间严格凸蕴涵K严格凸。

必要性 设$[L^*_M(G),\|\cdot\|_M]$$K$严格凸，但 $M(u)$非严格凸。即存在a，b，$0\leq a<b$，

$$M(u)=Au+B \quad P(u)=A \quad (u\in[a,b])$$

取子集$G'<G$,$mesG'<mesG$ 且 $N(A)mesG'<1$。再取 $c>0$ 使

$$N(P(c))mes(G\backslash G')+N(A)mesG'=1 \tag{1}$$

记

$$k=A(b+Ka)\frac{mesG'}{K+1}+cp(C)mes(G\backslash G') \tag{2}$$

1986年9月25日收到

将 G' 分成 $(k+1)$ 个测度相等的子集 G_1'，G_2'，$\cdots G_{k+1}'$．置

$$x_j(t)=\frac{1}{k}(bK_{G'_j}(t)+aK_{G'\setminus G'_j}(t)+cK_{G\setminus G'}(t))\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ K+1)$$

则 x_1，x_2，$\cdots$，x_{K+1} 线性无关。因若不然，不妨设 $x_{K+1}(t)=\sum_{j=1}^{K}\beta_jx_j(t)$，当 $t\in G\setminus G'$ 时 $C=\sum_{j=1}^{K}\beta_jC$，故 $\sum_{j=1}^{K}\beta_j=1$；而当 $t\in G_{K+1}'$ 时 $b=\sum_{j=1}^{K}\beta_ja=a$. 从而出现矛盾。

注意到

$$\rho_N(p[kx_j])=N(p(c))mes(G\setminus G')+\{N(p(b))+KN(p(a))\}\frac{mesG'}{K+1}$$

$$=N(p(c))mes(G\setminus G')+N(A)mesG'=1\quad(j=1,\ 2,\ \cdots K+1)$$

据[3]p69 Th2.1

$$\|x_j\|_M=\int_G p(k|x_j(t)|)|x_j(t)|dt=\frac{1}{k}\left\{(p(b)b+Kp(a)a)\frac{mesG'}{K+1}+p(c)c\cdot mes(G\setminus G')\right\}$$

$$=\frac{1}{k}\left\{(b+Ka)A\frac{mesG'}{K+1}+p(c)c\cdot mes(G\setminus G')\right\}=1\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ K+1)$$

又

$$p_N(p[k\frac{1}{K+1}\sum_{j=1}^{K+1}x_j])=(K+1)N\left(p\left[\frac{Ka+b}{K+1}\right]\right)\frac{mesG'}{K+1}+N(p(c))mes(G\setminus G')$$

$$=N(A)mesG'+N(p(c))mes(G\setminus G')=1$$

故

$$\left\|\frac{1}{K+1}\sum_{j=1}^{K+1}x_j\right\|_M=\int_G p\left(k\left|\frac{1}{K+1}\sum_{j=1}^{K+1}x_j(t)\right|\right)\left|\frac{1}{K+1}\sum_{j=1}^{K+1}x_j(t)\right|dt$$

$$=\frac{1}{k}\left\{(K+1)p\left(\frac{b+Ka}{K+1}\right)\frac{b+Ka}{K+1}\ \frac{mesG'}{K+1}+cp(c)\cdot mesG\setminus G'\right\}$$

$$=\frac{1}{k}\left\{(b+Ka)A\frac{mesG'}{K+1}+c\cdot p(c)mes(G\setminus G')\right\}=1$$

这与 $[L_M^*(G),\ \|\cdot\|_M]K$ 严格凸矛盾。

定理 2　$[L_M^*(G),\ \|\cdot\|_M]K$ 一致凸的充要条件是〈1〉$M(u)$ 严格凸〈2〉$M(u)$ 满足 Δ_2 条件〈3〉$M(u)$ 对较大 u 是一致凸的，即对任何 $d>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $u\geqslant d$ 时，$p((1+\varepsilon)u)\geqslant(1+\delta)p(u)$

证明　充分性　条件满足时，由[4]知空间一致凸，而一致凸性蕴涵 K一致凸性。

必要性　由[1]知，空间 K一致凸性蕴涵自反，故 $M(u)$ 满足 Δ_2 条件。再由空间 K一致凸性蕴涵 K严格凸性，据已证定理 1 知 $M(u)$ 严格凸。以下证明 $M(u)$ 对较大 u 一致凸。

若 $M(u)$ 非一致凸，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $u_n\nearrow\infty$ 满足

$$p((1+\varepsilon_\circ)u_n)<\left(1+\frac{1}{n}\right)p(u_n) \tag{4}$$

这里无妨认为$\frac{mesG}{K+1}\{N(p[(1+\varepsilon_\circ)u_1])+N(p(u_1))+(K-1)N(p[(1+\frac{\varepsilon_\circ}{2})u_1])\}>1$，取$G^{(n)}\subset G$使

$$\{N(p[(1+\varepsilon_\circ)u_n])+N(p(u_n))+(K-1)N(p[(1+\frac{\varepsilon_\circ}{2})u_n])\}\frac{mesG^{(n)}}{K+1}=1 \tag{5}$$

记

$$k_n=\{p((1+\varepsilon_\circ)u_n)\ (1+\varepsilon_\circ)u_n+p(u_n)u+(K-1)p((1+\frac{\varepsilon_\circ}{2})u_n)\ (1+\frac{\varepsilon_\circ}{2})u_n\}$$

$$\cdot\frac{mesG^{(n)}}{K+1}\qquad n=1,\ 2,\ \cdots \tag{6}$$

将 $G^{(n)}$分成 $k+1$个等测度子集$G_j^{(n)}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots k+1)$，置

$$x_j^{(n)}(t)=\frac{u_n}{k_n}\{(1+\varepsilon_\circ)\mathrm{K}_{G_j^{(n)}}(t)+\mathrm{K}_{G_{j+1}^{(n)}}(t)+(1+\frac{\varepsilon_\circ}{2})\mathrm{K}_{G^{(n)}\setminus(G_j^{(n)}UG_{j+1}^{(n)})}(t)$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots;\ j=1,\ 2,\ \cdots K+1$$

这里约定 $G_{k+2}^{(n)}=G_1^{(n)}(n=1,\ 2,\ \cdots)$．注意到

$$\rho_N(p[k_nx_j^{(n)}])=\{N(p[(1+\varepsilon_\circ)u_n])+N(p(u_n))+(K-1)N(p[(1+\frac{\varepsilon_\circ}{2})u_n])\}$$

$$\cdot\frac{mesG^{(n)}}{K+1}=1$$

据[3]p69 $Th2.1$

$$\|x_j^{(n)}\|_M=\frac{1}{k_n}\{p((1+\varepsilon_\circ)u_n)(1+\varepsilon_\circ)u_n+p(u_n)u_n+(K-1)p((1+\frac{\varepsilon_\circ}{2})u_n)$$

$$\cdot(1+\frac{\varepsilon_\circ}{2})\ u_n\}\frac{mesG^{(n)}}{K+1}=1\quad(n=1,\ 2\cdots;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ K+1)$$

置 $y^{(n)}(t)=p((1+\varepsilon_\circ)u_n)\mathrm{K}_{G_1^{(n)}}(t)+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}p((1+\varepsilon_\circ)u_n)\mathrm{K}_{G_2^{(n)}}(t)+p(1+\frac{\varepsilon_\circ}{2}u_n)$

$$\cdot\mathrm{K}_{G^{(n)}\setminus(G_1^{(n)}UG_2^{(n)})}(t)\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

则 $$\rho_N(y^{(n)})=\left\{N(p[(1+\varepsilon_\circ)u_n])+N\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}p[(1+\varepsilon_\circ)u_n]\right)+(K-1)\right.$$

$$\left.\cdot N\left(p\left[\left(1+\frac{\varepsilon_\circ}{2}\right)u_n\right]\right)\right\}\frac{mesG^{(n)}}{K+1}\leqslant 1$$

故由（6）

$$\left\|\sum_{j=1}^{K+1}x_j^{(n)}/(K+1)\right\|_M\geqslant\int_G\frac{1}{K+1}\sum_{j=1}^{K+1}x_j^{(n)}(t)y^{(n)}(t)\,dt=\frac{mesG^{(n)}}{k_n(K+1)}\left\{p((1+\varepsilon_\circ)u_n)\cdot\right.$$

$$\cdot\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)u_n+\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)p((1+\varepsilon_0)u_n)\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)u_n+(K-1)p\left(\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)u_n\right)\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)u_n\right\}$$

$$\geqslant\frac{mesG^{(n)}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)k_n(K+1)}\left\{p((1+\varepsilon_0)u_n)(1+\varepsilon_0)u_n+p(u_n)u_n+(K-1)p\left(\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)u_n\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)u_n\right\}\geqslant\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

即
$$\left\|\sum_{j=1}^{K+1}x_j^{(n)}/(K+1)\right\|_M\longrightarrow 1\qquad(n\to 8)$$

记
$$\left\|K_{G_j^{(n)}}\right\|_{(N)}=\frac{1}{N^{-1}\left(\frac{K+1}{mesG^{(n)}}\right)}=\frac{1}{\beta_n}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots,\ j=1,\ 2,\ \cdots,K+1)$$

置 $y_i^{(n)}(t)=\beta_nK_{G_j^{(n)}}(t)\quad(n=1,\ 2,\cdots,\ j=1,\ 2,\cdots,\ K+1)$则$\|y_j^{(n)}\|_{(N)}=1$。但是

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ y_1^{(n)}(x_1^{(n)}) & y_1^{(n)}(x_2^{(n)}) & \cdots & y_1^{(n)}(x_{K+1}^{(n)})\\ y_2^{(n)}(x_1^{(n)}) & y_2^{(n)}(x_2^{(n)}) & \cdots & y_2^{(n)}(x_{K+1}^{(n)})\\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\\ y_K^{(n)}(x_1^{(n)}) & y_K^{(n)}(x_K^{(n)}) & \cdots & y_K^{(n)}(x_{K+1}^{(n)})\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\beta_n}{k_n}\right)^K\left(\frac{mesG^{(n)}}{K+1}\right)^K u_n^K\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1+\varepsilon_0 & 1+\frac{\varepsilon_0}{2} & 1+\frac{\varepsilon_0}{2} & \cdots & 1+\frac{\varepsilon_0}{2} & 1\\ 1 & 1+\varepsilon_0 & 1+\frac{\varepsilon_0}{2} & \cdots & 1+\frac{\varepsilon_0}{2} & 1+\frac{\varepsilon_0}{2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+\frac{\varepsilon_0}{2} & 1+\frac{\varepsilon_0}{2} & 1+\frac{\varepsilon_0}{2} & \cdots & 1+\varepsilon_0 & 1+\frac{\varepsilon_0}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\beta_n mesG^{(n)}u_n}{k_n(K+1)}\right)^K(K+1)\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^K$$

由

$$\frac{\beta_n mesG^{(n)}u_n}{k_n}=\frac{(K+1)\beta_n}{(1+\varepsilon_0)p((1+\varepsilon_0)u_n)+p(u_n)+(K-1)\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)p\left(\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)u_n\right)}$$

$$\geqslant\frac{(K+1)N^{-1}\left(\frac{K+1}{mesG^{(n)}}\right)}{(K+1)(1+\varepsilon_0)p((1+\varepsilon_0)u_n)}$$

$$=\frac{N^{-1}\{N(p[(1+\varepsilon_0)u_n])+N(p(u_n))+(K-1)N(p[(1+\frac{\varepsilon_0}{2})u_n])\}}{(1+\varepsilon_0)p((1+\varepsilon_0)u_n)}$$

(下转第29页)

关的，$V(x,y)\cap V(c_2,\cdots,c_n)=\theta$，则对 $t\in(0,1)$有

$$
\begin{aligned}
\|x,c_2,\cdots,c_n\|^p &= |[x,x|c_2,\cdots,c_n]| = |[x+ty,x|c_2,\cdots,c_n]| \\
&\leqslant [x+ty,x+ty|c_2,\cdots,c_n]^{1/p}[x,x|c_2,\cdots,c_n]^{1/q} \\
&= \|x+ty,c_2,\cdots,c_n\|\ \|x,c_2,\cdots,c_n\|^{p/q} \\
&\leqslant (t\|x+y,c_2,\cdots,c_n\|+(1-t)\|x,c_2,\cdots,c_n\|)\|x,c_2,\cdots,c_n\|^{p/q} \\
&\leqslant \|x,c_2,\cdots,c_n\|\ \|x,c_2,\cdots,c_n\|^{p/q} = \|x,c_2,\cdots,c_n\|^p
\end{aligned}
$$

从而 $\|x+ty,c_2,\cdots,c_n\|=\|x,c_2,\cdots,c_n\|$，若$\|x,c_2,\cdots,c_n\|=0$，由$V(x,y)\cap V(c_2,\cdots,c_n)=\theta$及 $c_2,\cdots,c_n$ 线性无关得 $x=\theta$，从而 $y=\theta$ 。若 $\|x,c_2,\cdots,c_n\|\neq 0$，因$L$为严格凸，故 $y=\theta$.

2)⇒3)是显然的，最后3)⇒1).

设L为非严格凸的，则存在三个不同点u，v及$w\in L$，使$\|u,c_2,\cdots,c_n\|=1$，$\|v,c_2,\cdots,c_n\|\leqslant 1$ 及$\|w,c_2,\cdots,c_n\|\leqslant 1$ 且u在线段$[v,w]$上，不难看出

$$\|v,c_2\cdots,c_n\|=\|w,c_2,\cdots,c_n\|=1$$

设 $x=(v+w)/2$，$y=v-x=(v-w)/2$，因为$\|x,c_2,\cdots,c_n\|\leqslant 1$，$\|u,c_2,\cdots,c_n\|=1$ 且u在线段$[v,x]$上或线段$[x,w]$上，故$\|x,c_2,\cdots,c_n\|=1$.因此，

$|[y,x|c_2,\cdots,c_n]+1|=|[v-x,x|c_2,\cdots,c_n]+[x,x|c_2,\cdots,c_n]|=|[v,x|c_2,\cdots,c_n]|\leqslant 1$

及$|[y,x|c_2,\cdots,c_n]-1|=|[y-x,x|c_2,\cdots,c_n]|=|[-w,x|c_2,\cdots,c_n]\leqslant 1$.

从而 $$[y,x|c_2,\cdots,c_n]=0.$$

但 $y\neq\theta$ 及$\|x+y,c_2,\cdots,c_n\|=\|v,c_2,\cdots,c_n\|=1=\|x,c_2,\cdots,c_n\|$，故3) 不成立。

参 考 文 献

〔1〕 阎革兴 n赋范空间 哈师大自然科学学报，1985年第1期.

〔2〕 阎革兴 n赋范空间的严格凸与光滑性，哈师大自然科学学报，1985年第3期.

（上接第44页）

$$\geqslant\frac{N^{-1}[(K+1)N(p(u_n))]}{(1+\varepsilon_0)p((1+\varepsilon_0)u_n)}\geqslant\frac{p(u_n)}{(1+\varepsilon_0)p((1+\varepsilon_0)u_n)}\geqslant\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\varepsilon_0)}$$

即 $$\Delta_n\geqslant(K+1)\left[\frac{\varepsilon_0}{2(K+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\varepsilon_0)}\right]^K\geqslant(K+1)\left(\frac{\varepsilon_0}{4(K+1)(1+\varepsilon_0)}\right)^k$$

这与$[L_M^*(G),\ \|\cdot\|_M]K$ 一致凸矛盾。定理证毕。

本文是在导师王廷辅教授指导下完成的，借此谨致谢忱。

参 考 文 献

〔1〕F. Sullivan, Canad. J. Math, 31 (1979) , 628—636

〔2〕王廷辅、陈述涛 哈尔滨师范大学学报（自然科学版）№4 (1985) 11—15

〔3〕吴从炘、王廷辅 奥尔里奇空间理论及其应用 黑龙江科技出版社 1983

〔4〕A. Kaminska, Indag. Math, A85:1 (1982) 27—36