# 关于Orlicz空间范数的计算公式与严格赋范的条件

吴从炘　赵善中　陈俊澳*


## 内 容 提 要

众所周知，*Orlicz* 空间是一类在非线性问题中起着重要作用的赋范空间，而范数公式和严格赋范条件则又是赋范空间在实际计算和最佳逼近等方面所必需解决的两个重要问题，因此，对 *Orlicz* 空间来解决这两个相应问题自然是有其明显意义的。本文将在前人工作的基础上，对空间的范数公式进行更细致的讨论，同时首次给出它的严格赋范条件。


我们知道在 Orlicz 空间中定义有 Luxemburg 范数

$$\|u\|_{(M)} = \inf_{\int_G M\left[\frac{u(x)}{K}\right]dx\leqslant 1} \{K\}$$

和 Orlicz 范数

$$\|u\|_M = \sup_{\int_G N[v(x)]dx\leqslant 1}\left|\int_G u(x)v(x)dx\right|$$

显然，直接利用 Orlicz 范数的定义来计算是不便的，针对这个问题，Красносельский 和 Рутицкий[1] 得到了如下的结果：

公式 $A$ 对任何 $u(x)\in L_M^*$ 恒有

$$\|u\|_M = \inf_{k>0}\frac{1}{k}\left(1+\int_G M[ku(x)]\,dx\right)$$

公式 $B$ 设 $u(x)\in L_M^*$，若存在正数 $k$ 使

$$\int_G N[p(k|u(x)|)]dx = 1,$$

其中 $p(x)$ 是 $M(x)$ 的右导数，则

$$\|u\|_M = \int_G p\,(k|u(x)|)\;|u(x)|\;dx = \frac{1}{k}\left(1+\int_G M[ku(x)]dx\right)$$

本文的§1将对这两种计算 Orlicz 范数的公式进行更为深入细致的讨论，至于 §2 的目的则是给出 Orlicz 空间关于两种范数严格赋范的条件。

为方便起见，对任何给定的 $u(x)\in L_M^*$，记

$$J(k) = \int_G N[p(k|u(x)|)]dx$$

$$I(k) = \int_G p\,(k|u(x)|)\,|u(x)|\,dx$$

---

* 陈俊澳同志在哈尔滨业余工大工作

$$E(k)=\int_G M[ku(x)]dx$$

$$L(k)=\frac{1}{k}(1+E(k))=\frac{1}{k}\left(1+\int_G M[ku(x)]\,dx\right)$$

其中 $k$ 为实数。容易知道，$J(k)$的定义域或为形如$[o、b]$，$[o、b]$，的有限区间，或为$[o、\infty)$，$I(k)$和$E(k)$的定义域也如此，而 $L(k)$的定义域则为形如$(o、b)$，$(o，b]$的有限区间或$(o、\infty)$。因为

$$M[ku(x)]\leqslant p(k|u(x)|)|u(x)|,(x\in G)$$

所以只要$I(k)$存在，$E(k)$就存在，又由

$$kp(k|u(x)|)|u(x)|=N[p(k|u(x)|)]+M[ku(x)],\quad(x\in G)$$

可知此时 $J(k)$亦存在，并且有

$$kI(k)=E(k)+J(k) \tag{$*$}$$

采用这些记号，则公式 $A$，$B$ 可改写成

$$\|u\|_M=\inf_{k>0}L(k)$$

$$\|u\|_M=I(k)=L(k)\quad 当\ J(k)=1时$$

文中沿用[1]中的一切名词和符号。

## §1 Orlicz 范数的计算公式

**引理 1**　$E(k)$、$L(k)$在其定义域上处处连续。

〔证〕 设 $k_0$ 为 $E(k)$定义域上一点，在 $E(k)$的定义域内任取 $k_n\to k_0(n\to\infty)$，若有某个 $k_{n_0}>k_0$，则从某 $k_{n_1}$ 之后恒有 $k_n<k_{n_0}$，于是由

$M[k_nu(x)]\leqslant M[k_0u(x)]\in L_1(n\geqslant n_1)$，$M[k_nu(x)]\to M[k_0u(x)](x\in G,\ n\to\infty)$

和 Lebesgue 积分号下取极限定理即得

$$\lim_{n\to\infty}E(k_n)=\lim_{n\to\infty}\int_G M[k_nu(x)]dx=\int_G M[k_0u(x)]dx=E(k_0)$$

若对一切 $n$ 均有 $k_n\leqslant k_0$，同理可知上式成立，故 $E(k)$在 $k_0$ 处连续。（若定义域为闭区间或半闭区间，则在端点处连续指的是左连续或右连续）。

同理可证，$L(k)$在其定义域上处处连续。

**引理 2**　$J(k)$和 $I(k)$在其定义域内部处处右连续。

〔证〕 仿引理 1 并注意到 $p(u)$的右连续性即可证得。

**引理 3**　在 $I(k)$的定义域内部恒有 $E'_+(k)=I(k)$，其中 $E'_+(k)$为 $E(k)$ 对 $k$ 的右导数。

〔证〕 设 $k_0$ 为 $I(k)$ 的定义域内部一点，取充分小的 $\Delta k>0$ 使 $k_0+\Delta k$ 仍在 $I(k)$的定义域内部，则因

$$\frac{E(k_0+\Delta k)-E(k_0)}{\Delta k}=\int_G\frac{M[(k_0+\Delta k)u(x)]-M[k_0u(x)]}{\Delta k}dx$$

$$=\int_G\left(\frac{1}{\Delta k}\int_{k_0|u(x)|}^{(k_0+\Delta k)|u(x)|}p(t)\,dt\right)dx$$

又

$$p(k_o|u(x)|)|u(x)|\leqslant\frac{1}{\Delta k}\int_{k_o|u(x)|}^{(k_0+\Delta k)|u(x)|}p(t)dt\leqslant p((k_o+\Delta k)|u(x)|)|u(x)|$$

故

$$I(k_o)\leqslant\frac{E(k_o+\Delta x)-E(k_o)}{\Delta k}\leqslant I(k_o+\Delta k)$$

但由引理2有

$$\lim_{\Delta k\to 0^+}I(k_o+\Delta k)=I(k_o)$$

因而

$$E'_+(k_o)=I(k_o)$$

**定理1**　对 $L_M^*$ 中的任何非零元素 $u(x)$，$\|u\|_M=L(k)$ 当且仅当 $k\in[k^*,k^{**}]$ 时成立，其中

$$k^*=\inf_{J(k)\geqslant 1}\{k\},\quad k^{**}=\sup_{J(k)\leqslant 1}\{k\}$$

〔证〕　因为由公式A有：$\|u\|_M=\inf_{k\in\sigma}L(k)$（$\sigma$ 为 $L(k)$ 的定义域），故只须证 $L(k)$ 当且仅当 $k\in[k^*,k^{**}]$ 时达到最小值。首先说明 $L(k)$ 存在最小值。

若 $L(k)$ 的定义域为 $(o,\infty)$，则由

$$\frac{1}{k}\left(1+\int_G M[ku(x)]dx\right)\geqslant\frac{1}{k}\left(1+\frac{k}{2}\int_G p\left(\frac{k}{2}|u(x)|\right)|u(x)|dx\right)\ (k>o)$$

可知 $\lim_{k\to\infty}L(k)=\infty$；若 $L(k)$ 的定义域为 $(o,b)$，$b$ 为有限正数，则由 Levy 定理可知 $\lim_{k\to b^-}L(k)=L(b)=\infty$；再注意到 $\lim_{k\to o^+}L(k)=\infty$ 和引理1便知在这两种情况下 $L(k)$ 均有最小值。至于 $L(k)$ 的定义域为 $(o,b]$、由 $\lim_{k\to 0^+}L(k)=\infty$ 和引理1亦知 $L(k)$ 有最小值。

现证当 $k<k^*$，$k>k^{**}(k\in\sigma)$ 时 $L(k)$ 均不能取得最小值，显然 $(o,k^*)\subset\sigma$。这是因为若 $k\in(o,k^*)$，则 $J(k)<1$，从而由范数定义有 $I(k)\leqslant\|u\|_M$，于是 $k\in\sigma$，又注意当 $k<k^*$ 时有

$$E(k)\leqslant E(k)+J(k)=kI(k)\leqslant k\|u\|_M\leqslant k^*\|u\|_M$$

因而由 Fatou 定理可推出 $E(k^*)\leqslant\lim_{k\to k^{*-}}E(k)\leqslant k^*\|u\|_M$，即 $k^*\in\sigma$。至于当 $k_o>k^{**}$ $k_o\in\sigma$ 时，则显然也有 $(o,k_0)\subset\sigma$。

设 $k_o<k^*(k_o\in\sigma)$，则由引理3及(*)式有

$$L'_+(k)=\frac{-1}{k^2}(1+E(k))+\frac{1}{k}I(k)$$

$$=\frac{1}{k^2}(kI(k)-E(k)-1)=\frac{1}{k^2}(J(k)-1)$$

由于 $J(k_0)<1$，故得 $L'_+(k_0)<0$，可见 $k_0$ 右边总有 $k$ 使得 $L(k)$ 小于 $L(k_0)$，即$L(k_0)\neq \min\limits_{k\in\sigma} L(k)$。

又设 $k_0>k^{**}(k_0\in\sigma)$，我们证明对充分小的 $\Delta k>0$，$L(k_0)-L(k_0-\Delta k)>0$，于是 $L(k)$ 在 $k_0$ 处就达不到最小值。取 $\Delta k>0$ 使 $k_0-\Delta k>k^{**}$，则

$$
\begin{aligned}
L(k_0)-L(k_0-\Delta k) &= \frac{1}{k_0}\,(1+E(k_0))-\frac{1}{k_0-\Delta k}(1+E(k_0-\Delta k)) \\
&= \frac{-\Delta k}{k_0(k_0-\Delta k)}+\left(\frac{E(k_0)}{k_0}-\frac{E(k_0-\Delta k)}{k_0}\right) \\
&\quad +\left(\frac{E(k_0-\Delta k)}{k_0}-\frac{E(k_0-\Delta k)}{k_0-\Delta k}\right) \\
&= \frac{\Delta k}{k_0(k_0-\Delta k)}\Bigg(-1+(k_0-\Delta k) \\
&\quad \frac{E(k_0)-E(k_0-\Delta k)}{\Delta k}-E(k_0-\Delta k)\Bigg)
\end{aligned}
$$

但

$$
\begin{aligned}
\frac{E(k_0)-E(k_0-\Delta k)}{\Delta k} &= \int_\sigma\left(\frac{1}{\Delta k}\int_{(k_0-\Delta k)\,|u(x)|}^{k_0|u(x)|}p(t)\,dt\right)dx \\
&\geqslant \int_\sigma p((k_0-\Delta k)|u(x)|)\,|u(x)|\,dx=I(k_0-\Delta k),
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
L(k_0)-L(k_0-\Delta k) &\geqslant \frac{\Delta k}{k_0(k_0-\Delta k)}\,(-1+(k_0-\Delta k)I(k_0-\Delta k) \\
&\quad -E(k_0-\Delta k))=\frac{\Delta k}{k_0(k_0-\Delta k)}\,(J(k_0-\Delta k)-1)
\end{aligned}
$$

注意到从 $k_0-\Delta k>k^{**}$ 可推出 $J(k_0-k\Delta)>1$，因而 $L(k_0)-L(k_0-\Delta k)>0$。

剩下只要证明当 $k_0\in[k^*,k^{**}]$ 时 $L(k_0)=\min\limits_{k\in\sigma} L(k)$。若 $k^*=k^{**}$，则由 $L(k)$最小值的存在性立即可知在 $k_0=k^*=k^{**}$ 处 $L(k)$ 取得最小值。若 $k^*\neq k^{**}$，即 $k^*<k^{**}$，则对 $k_0\in(k^*,k^{**})$必有 $J(k_0)=1$，从而由公式 $B$得 $L(k_0)=\min\limits_{k\in\sigma} L(k)$，另外由 Levy定理可推知 $L(k^{**})=\lim\limits_{k\to k^{**}_-}L(k)=\min\limits_{k\in\sigma} L(k)$，再由 $L(k)$在$(o,k^{**}]$ 上的连续性（引理 1）又知 $L(k^*)=\min\limits_{k\in\sigma} L(k)$。

**定理 2** 对任何非零的 $u(x)\in L^*_M$，使 $L(k)=\|u\|_M$ 成立的 $k$ 均唯一的充要条件是 $M(u)$ 当 $u\geqslant u_0$ 时它的图形不含直线段，其中 $u_0=\inf\limits_{p(u)\geqslant c} u$，而 $N(c)mG=1$。

〔证〕 充分性，只须证对任何$u(x)\in L^*_M$均有 $k^*=k^{**}$。如若不然，则对某个$u(x)\in L^*_M$ 有 $k^*<k^{**}$，即有 $k_1$，$k_2$ 使得 $k^*<k_1<k_2<k^{**}$，易见

$$J(k_1)=\int_G N[p(k_1|u(x)|)]dx=1=N(c)mG$$

故必有 $G_0\subset G$，$mG_0>0$ 使当 $x\in G_0$ 时 $N[p(k|u(x)|)]\geqslant N(c)$，从而 $p(k_1|u(x)|)\geqslant c$，$k_1|u(x)|\geqslant u_0$，又从

$$J(k_2)=\int_G N[p(k_2|u(k)|)]dx=1$$

和

$$N[p(k_2|u(x)|)]\geqslant N[p(k_1|u(x)|)]\quad (x\in G)$$

可推出

$$N[p(k_2|u(x)|]=N[p(k_1|u(x)|)]\quad \text{P.P.于}G$$

于是有 $x_0\in G_0$ 使得 $N[p(k_2|u(x_0)|)]=N[p(k_1|u(x_0)|)]$，即 $p(k_2|u(x_0)|)=p(k_1|u(x_0)|)$，这表明 $p(u)$ 在 $[k_1|u(x_0)|,\ k_2|u(x_0)|]$ 上等于常数，因而与$M(u)$的图形当 $u\geqslant u_0$ 时不含直线段发生矛盾。

必要性，若 $M(u)$的图形在 $[u_1,\ u_2](u_2>u_1\geqslant u_0)$ 上为直线段，则相当于 $u\in[u_1,\ u_2]$时 $p(u)$等于常数，记为 $A$，易见 $A\geqslant p(u_0)\geqslant c$，命

$$u(x)=u_1\chi_{G_1}(x)$$

其中 $G_1\subset G$，$mG_1=\dfrac{1}{N(A)}$，则由$\dfrac{1}{N(A)}\leqslant\dfrac{1}{N(c)}=mG$ 便知如此的 $u(x)$ 恒可作出，

并且显然有 $u(x)\in L^*_M$，因为对所有 $k\in\left[1,\ \dfrac{u_2}{u_1}\right]$

$$J(k)=\int_G N[p(k|u(x)|)]dx=N[p(ku_1)]mG_1=N(A)mG_1=1,$$

故对如此的 $k$ 均有$\|u\|_M=L(k)$，即对所作的 $u(x)\in L^*_M$使得 $\|u\|_M=L(k)$ 成立的 $k$ 不唯一，矛盾。

**引理** 4　若 $u(x)$ 为 $L^*_M$ 的非零元素，

$$\|u\|_M=\int_G u(x)v_0(x)dx,\quad \rho(v_0,\ N)\leqslant 1$$

则 $\rho(v_0,\ N)=1$。

〔证〕　由

$$\|u\|_M=\int_G u(x)v_0(x)dx\leqslant\frac{1}{k^*}\left(\int_G N[v_0(x)]\,dx\right.$$
$$\left.+\int_G M[k^*u(x)]dx\right)\leqslant\frac{1}{k^*}\left(1+\int_G M[k^*u(x)]dx\right)=\|u\|_M$$

即得

$$\int_G N[v_0(x)]dx=\rho(v_0,\ N)=1$$

其中 $k^*$ 的意义见定理 1。

**定理** 3　设 $u(x)$为 $L^*_M$ 的非零元素，则有

1°$I(k)=\|u\|_M$ 的充要条件是 $J(k)=1$；

2°$I(k)<\|u\|_M$ 的充要条件是 $J(k)<1$；

$3°I(k)>\|u\|_M$ 的充要条件是 $J(k)>1$。

〔证〕 1° 条件的充分性即为公式 $B$，现证必要性。由

$$\|u\|_M=I(k)=\frac{1}{k}(J(k)+E(k))$$

和

$$\|u\|_M=\min_{k\in\sigma}L(k)\leqslant L(k)=\frac{1}{k}(1+E(k))$$

可知

$$\frac{1}{k}(J(k)+E(k))\leqslant\frac{1}{k}(1+E(k))$$

从而 $J(k)\leqslant1$，再由引理 4 即知 $J(k)=1$

2° 充分性，因为由范数定义便知$I(k)\leqslant\|u\|_M$，而 1° 又表明此时不能有$I(k)=\|u\|_M$，故只能是 $I(k)<\|u\|_M$。

必要性。由

$$\frac{1}{k}(J(k)+E(k))=I(k)<\|u\|_M\leqslant\frac{1}{k}(1+E(k))$$

即得 $J(k)<1$。

3° 由 1° 和 2° 即可直接推得。

**定理 4** 下列条件等价：

1° $M(u)$满足 $\Delta_2$－条件并且 $p(u)$连续；

2° 对任何非零的 $u(x)\in L^*_M$ 存在 $k$ 使得 $J(k)=1$；

3°对任何 $u(x)\in L^*_M$ 存在 $k$ 使得 $I(k)=\|u\|_M$。

〔证〕 1°→2°

〔1〕181 页借助关于算子的理论已经得到这个结论，我们再给出一种简单的直接证明。

设 $u(x)$为 $L^*_M$ 的非零元素，则因 $M(u)$满足 $\Delta_2$－条件，又

$N[p(k|u(x)|)]=kp(k|u(x)|)|u(x)|-M[ku(x)]\leqslant M[2ku(x)]-M[ku(x)]$

故对任何 $k\in[o,\infty)$，$J(k)$ 均存在，另外不难看出 $J(o)=0$，$\lim\limits_{k\to\infty}J(k)=\infty$ 因此只要证明 $J(k)$连续即可，而这由 $J(k)$对任何 $k$ 的存在性和 $p(u)$ 的连续性以及引用积分号下取极限的 Lebesgue 定理即得。

2°→3° 由定理 3 即可推出，

3°→1°用反证法。

i) 若 $M(u)$不满足 $\Delta_2$－条件，则由〔1〕§4 公式(4.2)和(4.8) 可知有 $u_1<u_2<\cdots<u_n<\cdots\to\infty$使得

$$p\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right)>2^np(u_n)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

其中不妨设 $p(u_1)u_1\geqslant1$，取 $G$ 的互不相交子集 $G_n$ 使 $mG_n=\dfrac{a}{2^{n+1}p(u_n)u_n}$，$(a=\min\{1,\ mG\})$，又命

$$u(x)=\begin{cases}u_n & (x\in G_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots),\\ 0 & \left(x\overline{\in}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n\right)\end{cases}$$

则由

$$\int_G M[u(x)]dx\leqslant\int_G p(|u(x)|)\,|u(x)|\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}p(u_n)u_n\,mG_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2^{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}$$

便知 $u(x)\in L^*_M$。

因为当 $k\leqslant 1$ 时

$$I(k)\leqslant I(1)=\int_G p(|u(x)|)\,|u(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{2},$$

又当 $k>1$ 时

$$I(k)=\int_G p(k|u(x)|)\,|u(x)|\,dx\geqslant\sum_{n=n_0}^{\infty}p\left((1+\frac{1}{n})u_n\right)u_n mG_n$$

$$>\sum_{n=n_0}^{\infty}2^n\,p(u_n)u_n mG_n=\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{a}{2}=\infty$$

其中 $n_0$ 满足 $1+\frac{1}{n_0}<k$，另外当 $0<k\leqslant 1$ 时

$$L(k)>\frac{1}{k}\geqslant 1$$

所以不存在 $k$ 使得 $I(k)=\min\limits_{k\in\sigma}L(k)=\|u\|_M$（注意定理1之证），矛盾。

ii）若 $p(u)$不连续，则有 $u_0>0$ 使 $p(u_0)=D>\lim\limits_{u\to u_0-}p(u)=c$

命

$$u(x)=\chi_{G_1}(x)+a\chi_{G_2}(x)$$

其中 $G_1$，$G_2$ 为 $G$ 的互不相交子集，$a>0$，显然适当选择 $G_1$，$G_2$，$a$ 可使

$$N[p(u_0a)]mG_2=1-N(c)mG_1-\frac{1}{2}[N(D)-N(c)]mG_1$$

譬如先取 $G_1$ 使 $mG_1<\frac{mG}{2}$，同时 $1-N(c)mG_1-\frac{1}{2}[N(D)-N(c)]mG_1=B>0$，

再取 $a$ 充分大以致 $N[p(u_0a)]>\frac{2B}{mG}$，最后取 $G_2$ 使 $N[p(u_0a)]mG_2=B$，此时 $mG_2=\frac{B}{N[p(u_0a)]}<\frac{B}{\frac{2B}{mG}}=\frac{mG}{2}$，因而是可以选出的。对如此作出的 $u(x)$，当 $k\geqslant u_0$ 时我们有

$$J(k) \geqslant J(u_0) = \int_G N[p(u_0|u(x)|)]dx = N[p(u_0)]mG_1 + N[p(u_0 a)]mG_2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}[N(D) - N(c)]mG_1$$

又当 $k > u_0$ 时有

$$J(k) = \int_G N[p(k|u(x)|)]dx = N[p(k)]mG_1 + N[p(ka)]mG_2$$

$$\leqslant N(c)\, mG_1 + N[p(u_0 a)]\, mG_2 = 1 - \frac{1}{2}[N(D) - N(c)]mG_1$$

于是当 $k \geqslant u_0$ 时 $J(k) > 1$，从而 $I(k) > \|u\|_M$，又当 $k < u_0$ 时 $J(k) < 1$，从而 $J(k) < \|u\|_M$（定理3），故不存在 $k$ 使得 $I(k) = \|u\|_M$，矛盾。

**定理**5　对任何 $u(x) \in L^*_M$，使 $I(k) = \|u\|_M$ 成立的 $k$ 均唯一的充要条件为 $M(u)$ 的图形当 $u \geqslant u_0$ 时不含直线段，其中 $u_0 = \inf\limits_{p(u) \geqslant c} u$，而 $N(c)mG = 1$。

〔证〕　观察定理2之证并利用定理3即知结论成立。

## §2　Orlicz 空间严格赋范的条件

**定理**6　$L^*_M$ 关于 $\|\cdot\|_M$ 严格赋范的充要条件为 $M(u)$ 的图形不含直线段。

〔证〕　充分性

设 $u_1(x) \in L^*_M$，$u_2(x) \in L^*_M$ 并且均非零，因为

$$\|u_1\|_M + \|u_2\|_M = \frac{1}{k_1^*}\left(1 + \int_G M[k_1^* u_1(x)]dx\right)$$

$$+ \frac{1}{k_2^*}\left(1 + \int_G M[k_2^* u_2(x)]dx\right)$$

$$= \frac{1}{\dfrac{k_1^* k_2^*}{k_1^* + k_2^*}}\left(1 + \frac{k_2^*}{k_1^* + k_2^*}\int_G M[k_1^* u_1(x)]dx\right.$$

$$\left. + \frac{k_1^*}{k_1^* + k_2^*}\int_G M[k_2^* u_2(x)]dx\right) \geqslant \frac{1}{\dfrac{k_1^* k_2^*}{k_1^* + k_2^*}}$$

$$\left(1 + \int_G M\left[\frac{k_1^* k^*_2}{k_1^* + k_2^*}(u_1(x) + u_2(x))\right]dx\right) \geqslant \|u_1 + u_2\|_M$$

其中

$$k_1^* = \inf_{\int_G N[p(k|u_1(x)|)]dx \geqslant 1}\{k\}, \quad k_2^* = \inf_{\int_G N[p(k|u_2(x)|)]dx \geqslant 1}\{k\},$$

故若 $\|u_1\|_M + \|u_2\|_M = \|u_1 + u_2\|_M$，则有

$$\int_G \left(\frac{k_2^*}{k_1^* + k_2^*} M[k_1^* u_1(x)] + \frac{k_1^*}{k_1^* + k_2^*} M[k_2^* u_2(x)]\right)dx$$

$$= \int_G M\left[\frac{k_1^* k_2^*}{k_1^* + k_2^*}\left(u_1(x) + u_2(x)\right)\right]dx,$$

注意到左端被积函数在每一个 $x\in G$ 处均不小于右端被积函数，即知

$$\frac{k_2^*}{k_1^*+k_2^*}M[k_1^*u_1(x)]+\frac{k_1^*}{k_1^*+k_2^*}M[k_2^*u_2(x)]$$
$$=M\left[\frac{k_1^*k_2^*}{k_1^*+k_2^*}(u_1(x)+u_2(x))\right]$$

$p.p.$ 于 $G$，而 $k_1^*>0$，$k_2^*>0$，$M(u)$的图形不含直线段，因而必然有

$$k_1^*u_1(x)=k_2^*u_2(x)\quad p.p.\text{于}G,$$

（注意[1]第 2 页），即

$$u_1(x)=Ku_2(x)\quad p.p.\text{于}G,\ (K>0)$$

这表明 $L^*_M$ 关于 Orlicz 范数严格赋范。

必要性

若 $M(u)$的图形含有直线段，则有 $u_2^*>u_1^*>0$ 使 $p(u)$在$[u_1^*,u_2^*]$上为常数 $A$。命

$$u_1(x)=u_1^*\chi_{G1}(x)+a\chi_{G2}(x),$$
$$u_2(x)=u_2^*\chi_{G1}(x)+a\chi_{G2}(x),$$

其中 $G_1$，$G_2$ 为 $G$ 的互不相交子集，$a>0$，易见 $u_1(x)$，$u_2(x)$均为 $L^*_M$ 的非零元素，并且

$$J_{u_1}(1)=\int_G N[p(|u_1(x)|)]dx=N(A)mG_1+N[p(a)]mG_2$$

$$J_{u_2}(1)=\int_G N[p(|u_2(x)|)]dx=N(A)mG_1+N[p(a)]mG_2$$

（我们用不同的下标，以区别由不同函数确定的 $J(k)$）。显然适当选择 $G_1$，$G_2$，$a$ 可使

$$J_{u_1}(1)=1,\ J_{u_2}(1)=1,$$

譬如先取 $G_1$ 使 $mG_1<\frac{mG}{2}$，同时 $1-N(A)mG_1=B>0$，再取 $a$ 充分大以致 $N[p(a)]>\frac{2B}{mG}$，最后取 $G_2$ 使 $N[p(a)]mG_2=1-N(A)mG_1$，此时 $mG_2=\frac{B}{N[p(a)]}<\frac{B}{\frac{2B}{mG}}=\frac{mG}{2}$，因而是可以选出的。对如此作出的 $u_1(x)$和$u_2(x)$，由定理 3 即有

$$\|u_1\|_M=I_{u_1}(1)=\int_G p(|u_1(x)|)|u_1(x)|dx=Au_1^*mG_1+p(a)a\,mG_2$$

$$\|u_2\|_M=I_{u_2}(1)=\int_G p(|u_2(x)|)|u_2(x)|dx=Au_2^*mG_1+p(a)amG_2$$

注意到

$$J_{u_1+u_2}\left(\frac{1}{2}\right)=\int_G N\left[p\left(\left|\frac{u_1(x)+u_2(x)}{2}\right|\right)\right]dx$$
$$=N\left[p\left(\frac{u_1^*+u_2^*}{2}\right)\right]mG_1+N[p(a)]mG_2$$
$$=N(A)mG_1+N[p(a)]mG_2=1$$

再由定理 3 就有

$$\|u_1+u_2\|_M = I_{u_1+u_2}\left(\frac{1}{2}\right) = \int_G p\left(\left|\frac{u_1(x)+u_2(x)}{2}\right|\right)|u_1(x)+u_2(x)|dx$$

$$= p\left(\frac{u_1^*+u_2^*}{2}\right)(u_1^*+u_2^*)mG_1 + p(a)2amG_2$$

$$= A(u_1^*+u_2^*)mG_1 + 2p(a)amG_2 \quad = \|u_1\|_M + \|u_2\|_M$$

但 $u_1(x)=Ku_2(x)(K>0)$ 并不 $p.p.$成立，矛盾

**定理 7** $L^*_M$ 关于 $\|\cdot\|_{(M)}$ 严格赋范的充要条件为 $M(u)$ 满足 $\Delta_2$ - 条件并且它的图形不含直线段

〔证〕 充分性

设 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$为 $L^*_M$ 的非零元素，$\|u_1+u_2\|_{(M)} = \|u_1\|_{(M)} + \|u_2\|_{(M)}$，则因从 $M(u)$满足 $\Delta_2$ - 条件可推出$\int_G M\left[\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right]dx=1$（见〔′〕76页），故得

$$1=\int_G M\left(\frac{u_1(x)+u_2(x)}{\|u_1+u_2\|_{(M)}}\right)dx = \int_G M\left[\frac{u_1(x)+u_2(x)}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}\right]$$

$$\leqslant \frac{\|u_1\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}\int_G M\left[\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{(M)}}\right]dx$$

$$+\frac{\|u_2\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}\int_G M\left[\frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{(M)}}\right]dx = 1$$

从而

$$M\left[\frac{u_1(x)+u_2(x)}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}\right] = \frac{\|u_1\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}M\left[\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{(M)}}\right]$$

$$+\frac{\|u_2\|_{(M)}}{\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}}M\left[\frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{(M)}}\right] \ p.p.\text{于}G$$

最后再从 $M(u)$的图形不含直线段即可推出

$$\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{(M)}} = \frac{u_2(x)}{\|u_1\|_{(M)}} \ p.p.\text{于}G$$

必要性，用反证法

i）若 $M(u)$ 不满足 $\Delta_2$ - 条件，则有 $u_n\nearrow\infty$ 使得

$$M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right] > 2^n M(u_n),\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

此处不妨设 $M(u_1)\geqslant 1$，取 $G$ 的互不相交子集 $G_n$ 使

$$mG_n = \frac{a}{2^{n+1}M(u_n)},\ (a=min\{1,\ mG\}),\ (n=1,\ 2,\ \cdots),$$

命

$$u_1(x) = \begin{cases} u_n & \text{当 } x\in G_n(n=1,2,\cdots)\text{时,} \\ 0 & \text{当 } x\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \text{ 时} \end{cases}$$

$$u_2(x) = u_1(x) + \chi_{G_0}(x)$$

其中 $G_0$ 不与任何 $G_n$ 相交并且 $m\ G_0<\frac{a}{2b}(b=max\{1, M(1)\})$ 由于不难验证：

$$当k=1时\ \int_G M\left[\frac{u_1(x)}{k}\right]dx\leqslant\int_G M\left[\frac{u_2(x)}{k}\right]dx<a\leqslant 1$$

$$当k<1时\ \int_G M\left[\frac{u_2(x)}{k}\right]dx\geqslant\int_G M\left[\frac{u_1(x)}{k}\right]dx=\infty$$

$$当k=2时\ \int_G M\left[\frac{u_1(x)+u_2(x)}{k}\right]dx\leqslant\int_G M\left[\frac{u_2(x)}{\frac{k}{2}}\right]dx<a\leqslant 1$$

$$当k<2时\ \int_G\left[\frac{u_1(x)+u_2(x)}{k}\right]dx\geqslant\int_G M\left[\frac{u_1(x)}{\frac{k}{2}}\right]dx=\infty$$

所以 $u_1(x)$和 $u_2(x)$均为 $L^*_M$ 的非零元素并且

$$\|u_1\|_{(M)}=\|u_2\|_{(M)}=1,\qquad \|u_1+u_2\|_{(M)}=2$$

于是

$$\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}=\|u_1+u_2\|_{(M)}$$

但 $u_1(x)=Ku_2(x)(K>0)$并不 p.p.成立，矛盾。

ii) 设 $M(u)$的图形在 $[u_1^*, u_2^*]$ 上为直线段，其中， $u_2^*>u_1^*>0$，命

$$u_1(x)=u_1^*\chi_{G_1}(x)+u_2^*\chi_{G_2}(x)+a\chi_{G_3}(x)$$

$$u_2(x)=u_2^*\chi_{G_1}(x)+u_1^*\chi_{G_2}(x)+a\chi_{G_3}(x)$$

其中 $G_1$，$G_2$，$G_3$ 为 $G$ 的互不相交子集并且 $mG_1=mG_2=m_0$，$a>0$，则 $u_1(x)$和 $u_2(x)$均为 $L^*_M$ 的非零元素，同时

$$\int_G M[u_1(x)]dx=[M(u_1^*)+M(u_2^*)]m_0+M(a)mG_3$$

$$\int_G M[u_2(x)]dx=[M(u_1^*)+M(u_2^*)]m_0+M(a)mG_3$$

显然适当选择 $m_0$，$a$，$G_3$ 可使它们均等于 1，于是

$$\|u_1\|_{(M)}=\|u_2\|_{(M)}=1$$

又此时

$$\int_G M\left[\frac{u_1(x)+u_2(x)}{2}\right]dx=2M\left(\frac{u_1^*+u_2^*}{2}\right)m_0+M(a)mG_3$$

$$=2\left[\frac{M(u_1^*)+M(u_2^*)}{2}\right]m_0+M(a)mG_3=1$$

故由 [1]76 页便知

$$\|u_1+u_2\|_{(M)}=2=\|u_1\|_{(M)}+\|u_2\|_{(M)}$$

但 $u_1(x)=Ku_1(x)\ (K>0)$ 并不 p.p. 成立，矛盾。

# 参　考　文　献

〔1〕 М.А.Красносельский, Я. Б. Рутицкий，凸函数和奥尔里奇空间，科学出版社，北京，（吴从炘译）。

〔附记〕 本文完成于 1963 年，并且在当年召开的哈尔滨市数学年会上宣读过。其后的 2—5 年国外才对同一课题也进行了研究（见〔2~4〕）。对比起来，我们的工作还有以下的几个特点：第一，我们是直接对 Orlicz 空间最常用的两种范数来讨论的，而不是象 Rao等人仅考虑等价范数的严格凸问题因此便于应用；第二，由于我们探讨了对特定范数严格凸的必要条件，所以对 Sundaresan 等人的结果中所附加条件的原因自然也就清楚了；第三，Rao〔2〕的定理实际上就是本文定理 6 充分性的明显推论，同时我们的证明还更为简单。因而我们决定把这十五年前的旧作再正式公开发表。

〔2〕 M.M.Rao, Smoothness of Orlicz spaces, Indag.Math.27(1965), 671—690

〔3〕 K.Sundaresan, Orlicz spaces isomorphic tostrictly convex spaces, Proc. Amer.Math.Soc.17(1966), 1353—1356

〔4〕 M,M.Rao, Almost every Orlicz space is isomorphic to a strictly convex Orlicz space.Proc Amer Math Soc.19(1968), 377—379

（一九七八年二月收到）