数 学 年 刊
13A: 增刊(1992), 80—91.

线性空间，
Orlicz-Lorentz序列空间、自反性、自然基

Orlicz-Lorentz 序列空间

姚正安 程庆平 宋述刚
(荆州师范专科学校数学系，湖北荆州 434100)

O177.3

提 要

本文构造了 Orlicz-Lorentz 序列空间 $d(\omega, M)$，用构造性的方法讨论了它的自反性，并讨论了在一定条件下的子空间问题，得到了如下主要结论：

1. $d(\omega, M)$ 自反的充要条件是 $M\in\Delta_2\cap\nabla_2$.

2. 如果 $M\in\nabla'$，$\{u_n\}$ 是 $d(\omega, M)$ 的自然基 $\{e_n\}$ 的任意块基列，$u_n=\sum\limits_{i=q_j-1}^{q_j}a_ie_i$，$\lim\limits_{i\to\infty}a_i=0$，则存在 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_{n_j}\}$ 强于 Orlicz 序列空间 O_M 的自然基.

3. 如果 $M\in\Delta'\cap\Delta_2$，则 $d(\omega, M)$ 的自然基 $\{e_n\}$ 的任何正规块基列 $\{u_n\}$ 都弱于 O_M 的自然基.

§1. 引　　言

本文推广了[2—6]所给的 Orlicz 空间，给出了 Orlicz-Lorentz 序列空间的构造. 众所周知，Orlicz 序列空间，Lorentz 序列空间是空间 $l_p(1\leqslant p<+\infty)$ 的推广，它们有很多有别于 l_p 的性质. 本文正是仿这两类空间来构造 Orlicz-Lorentz 序列空间的.

本文所涉及的 Orlicz 函数、N 函数、小 Δ_2、Δ_c 条件、∇_2 条件及其退化条件可见[1, 2 3]为证明的需要，这里列出 Orlicz 函数的一部分性质以及两个引理.

命题 1.1 Orlicz 函数 $M(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调递增的.

命题 1.2 $M(x)$ 满足小 Δ_2 条件当且仅当对任意 $C\in R^+=(0, +\infty)$，$M(x)$ 满足小 Δ_c 条件.

命题 1.3 $M(x)$ 为 N 函数当且仅当存在 R^+ 上的非负、单调右连续函数 $p(x)$，使

$$M(x)=\int_0^{|x|}p(x)dx.$$

命题 1.4 $M\in$ 小∇_2 当且仅当存在 $l>1$ 和 $\delta>0$，存在 $v_0>0$，当 $0\leqslant v\leqslant v_0$ 时，有

$$M(lv)\geqslant(l+\delta)M(v).$$

引理 1.5 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是单调递减趋于零的数列，则

$$\sup_{\pi\in\Pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_{\pi(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n,$$

其中 Π 是所有自然数的重排的集合.

引理 1.6 若 Banach 空间具有基 $\{x_n\}$，且 X 含有与 l_1 同构的子空间，则存在 $\{x_n\}$ 的块基列 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$，$c>0$ 使得对任意正数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_1$，有

本文 1989 年 7 月 22 日收到.

$$\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j\| \geqslant c \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

若$\{x_n\}$是无条件基，则$\{u_j\}$等价于 l_1 的单位基.

§2. Orlicz-Lorentz 序列空间

设$\{\omega_n\} \in c_0 - l_1$，且 $1=\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \cdots \geqslant \omega_n \geqslant \omega_{n+1} \geqslant \cdots$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = +\infty, \quad \omega_n > 0,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

$M(x)$是一个 Orlicz 函数，S 是仅有有限项不为零的数列的全体. 对任意 $x=(a_n) \in S$，$\rho \in R^+$，定义

$$\|x\|_\rho = \sup_{\pi \in \Pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{a_n}{\rho}\right) \omega_{\pi(n)} \right\},$$

$$\|x\|_M = \inf\{\rho;\ \|x\|_\rho \leqslant 1\}.$$

定理 2.1　$\|\cdot\|_M$ 是 S 上的一个范数.

证明略. 由此定理，$(S,\ \|\cdot\|_M)$是一个赋范线性空间.

注 1　在定理 2.1 中，只须 $M(x)$满足 $1°$ 在 R^+ 上是单调的，凸的；$2°$ $\lim\limits_{x \to +\infty} M(x) = +\infty$.

注 2　对$\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$，仅需有限个 $\omega_n \neq 0$，当$\{\omega_n\}$仅有有限个不为零时，$(S,\ \|\cdot\|_M)$是 c_0 的一个子流形，其完备化即为 c_0.

下面讨论$(S,\ \|\cdot\|_M)$的完备化. 设

$$l_M^* = \{x=(a_n);\ 存在\ c>0,\ 使\ \|x\|_c < +\infty\},$$

$$l_M = \{x=(a_n);\ \|x\|_1 < +\infty\},$$

$$h_M = \{x \in l_M;\ \lim_{n \to +\infty} \|(I-P_n)x\|_M = 0\},$$

其中 I 是恒等映射，且对 $x=(a_i) \in l_M$，有

$$P_n x = P_n(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots) = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 0,\ \cdots).$$

显然，l_M^*，h_M 都是线性空间，但 l_M 不一定是线性空间.

例 2.2　设 Orlicz 函数

$$M(x) = \begin{cases} 0, & x=0, \\ e^{-\frac{1}{|x|}}, & 0<|x| \leqslant \frac{1}{4}, \\ 16e^{-4}x^2, & |x| > \frac{1}{4}, \end{cases}$$

取$\{\omega_i\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{i}}\right\}$，$a_i = \frac{1}{\ln i}(i>1)$，$x=(a_i)$，$(a_1=0)$，则有

$$\|x\|_1 = c + \sum_{i=[e^4]+1}^{\infty} e^{-\ln i} \frac{1}{\sqrt{i}} = c + \sum_{i=[e^4]+1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}} < +\infty.$$

但

$$\|2x\|_1 \geqslant \sum_{i=[e^e]+1}^{\infty}(e^{-\ln i})^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{i}}=\sum_{i=[e^e]+1}^{\infty}\frac{1}{i}=+\infty.$$

这说明 $x\in l_M$. 而 $2x\overline{\in} l_M$, 故 l_M 不是线性空间. 注意, 这里 $M(x)$不满足小 Δ_2 条件.

引理 2.3 设 $M(x)$是非退化的 Orlicz 函数. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(I-P_n)x\|_M=0$, 则 $x=(a_n)\in c_0$.

引理 2.4 设 $x=(a_n)$满足对任意 $\rho>0$, 有$\|x\|_\rho<+\infty$, 则 $x=(a_n)\in c_0$.

定理2.5 (i) h_M 是空间$(S, \|\cdot\|_M)$的完备化.

(ii) $h_M=\{x=(a_n);$ 对任意 $\rho>0$, $\|x\|_\rho<+\infty\}$.

(iii) $\{e_n\}$是 h_M 的有界完备对称基, 其中 $e_n=\{\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1, 0, \cdots\}$

证 (i) 显然.

(ii) 设 $x=(a_n)$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|(I-P_n)x\|_M=0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有$\|(I-P_n)x\|_M<\varepsilon$. 故

$$\|x\|_\varepsilon\leqslant\|P_nx\|_\varepsilon+\|(I-P_n)x\|_\varepsilon<+\infty.$$

从而

$$\{x=(a_n);\lim_{n\to\infty}\|(I-P_n)x\|_M=0\}\subseteq\{x=(a_n);\text{对任意 }\rho>0,\ \|x\|_\rho<+\infty\}. \tag{2.2}$$

另一方面, 设对任意 $\rho>0$, $\|x\|_\rho<+\infty$, 但

$$\|(I-P_n)x\|_M\not\to0\ (n\to\infty) \tag{2.3}$$

注意到当 $n>m$ 时, 有$\|(I-P_n)x\|_M\leqslant\|(I-P_m)x\|_M$. 故$\{\|(I-P_n)x\|_M\}_{n=1}^\infty$ 是单调递减的, 由(2.3)式, 存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $n>N$, 有

$$\|(I-P_n)x\|_M\geqslant\varepsilon_0,$$

即$\|(I-P_n)x\|_{\varepsilon_0}\geqslant1$.

(1) 当 $n=0$ 时, 将 $x=(a_n)$的各项重排为$(a_i^{(1)})_{i=1}^\infty$, 使得$|a_i^{(1)}|\geqslant|a_{i+1}^{(1)}|$ $(i=1, 2, \cdots)$ 于是$\|x\|_{\varepsilon_0}=\sum\limits_{i=1}^\infty M\left(\dfrac{a_i^{(1)}}{\varepsilon_0}\right)\omega_i\geqslant1$.

(2) 当 $n=1$ 时, 将$(a_n)_{n=2}^\infty$ 重排为$(a_i^{(2)})_{i=1}^\infty$, 使得$|a_i^{(2)}|\geqslant|a_{i+1}^{(2)}|$, $(i=1, 2, \cdots)$. 于是有 $\|(I-P_1)x\|_{\varepsilon_0}=\sum\limits_{i=1}^\infty M\left(\dfrac{a_i^{(2)}}{\varepsilon_0}\right)\omega_i\geqslant1$.

……

由数学归纳法. 有

$$|a_i^{(m+1)}|\leqslant|a_i^{(m)}|\quad(i,\ m=1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.4}$$

从而

$$\sum_{i=k}^\infty M\left(\frac{a_i^{(m+1)}}{\varepsilon_0}\right)\omega_i\leqslant\sum_{i=k}^\infty M\left(\frac{a_i^{(m)}}{\varepsilon_0}\right)\omega_i\quad(k,\ m=1,\ 2,\ \cdots)$$

又$\|x\|_{\varepsilon_0}<+\infty$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N_ε, 当 $n>N_\varepsilon$, 时, 有

$$\sum_{i=n}^\infty M\left(\frac{a_i^{(1)}}{\varepsilon_0}\right)\omega_i<\varepsilon,$$

于是, 对任意自然数 m, 有

$$\sum_{i=n}^\infty M\left(\frac{a_i^{(m)}}{\varepsilon_0}\right)\omega_i<\varepsilon. \tag{2.5}$$

从而由$\|(I-P_n)x\|_{\varepsilon_0}\geqslant1$ 及(2.5)有

$$I_{n,m}=\sum_{i=1}^{\nu-1} M\left(\frac{a_i^{(n)}}{\varepsilon_0}\right)\omega_i\geqslant 1-\varepsilon \quad (n>N_\varepsilon). \tag{2.6}$$

由引理 2.4，$x=(a_n)\in c_0$，则对任意 $\varepsilon_1>0$，总存在 m_0 使得 $\|(I-P_{m_0})x\|_{c_0}<\varepsilon_1$，取 (2.6) 式中的 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则对任意自然数 m，有

$$I_{n,m}\geqslant\frac{1}{2} \quad (n>N_{1/2}). \tag{2.7}$$

因 $\lim\limits_{x\to 0} M(x)=0$，对某个 $n_0>N_{1/2}$，取 $\varepsilon_1>0$，使

$$M\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)<\left(3\sum_{i=1}^{n_0}\omega_i\right)^{-1},$$

则

$$I_{n_0,m_0+1}=\sum_{i=1}^{n_0} M\left(\frac{a_i^{(m_0+1)}}{\varepsilon_0}\right)\omega_i\leqslant M\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)\sum_{i=1}^{n_0}\omega_i<\frac{1}{3}. \tag{2.8}$$

这与(2.7)式矛盾，故有

$$\{x=(a_n);\ 对任意\ \rho>0,\ \|x\|_\rho<+\infty\}\subseteq\{x=(a_n);\ \lim_{n\to\infty}\|(I-P_n)x\|_M=0\}. \tag{2.9}$$

综合(2.2)和(2.9)便得定理之(ii)。

(iii) 显然$\{e_n\}$是 h_M 的对称基. 往证$\{e_n\}$是有界完备的.

设序列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ 使得 $\sup\limits_n\|\sum_{k=1}^n a_k e_k\|_M<+\infty$，因$\{e_n\}$还是 h_M 的单调基，从而有 $A>0$，使

$$\|\sum_{k=1}^n a_k e_k\|_M<A \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

要证 $\sum_{k=1}^\infty a_k e_k\in h_M$，只须证对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 N_ε，当 $n>N_\varepsilon$ 时，有

$$\|(I-P_n)\sum_{k=1}^\infty a_k e_k\|_M<\varepsilon.$$

用类似于(ii)中证明(2.9)方法即可证得.

注 定理 2.5 中，没有要求 $M(x)$ 的非退化性，用到了

$$\sum_{i=1}^\infty\omega_i=+\infty.$$

定义 2.6 设 $M(x)$是 Orlicz 函数，$\omega=\{\omega_n\}\in c_0-l_1$，则空间 h_M 称为 Orlicz-Lorentz 序列空间，记为 $d(\omega,M)$.

显然有

$$d(\omega,\ M)=h_M\subseteq l_M\subseteq l_M^*,$$

而且从后面的定理 2.9 可以看出，当 M 不满足小 Δ_2 条件时为真包含关系.

由定义可证如下命题.

命题 2.7 若 $\rho_1\leqslant\rho_2$，则 $\|x\|_{\rho_1}\geqslant\|x\|_{\rho_2}$.

命题 2.8 (i) 若$\|x\|_\rho\leqslant K$，则 $\|x\|_M\leqslant\max\{K,\ 1\}\rho$. (ii) 若$\|x\|_\rho>K$，则 $\|x\|_M\geqslant\min\{K,\ 1\}\rho$.

类似于 Orlicz 序列空间的性质，有

定理 2.9 以下断言等价

(1) $M\in$ 小 Δ_2.

(2) $l_M^* = l_M = h_M$.

(3) 向量系$\{e_n\}$是 l_M^* 的有界完备对称基.

(4) l_M^* 可分.

(5) l_M^* 不含有与 l^∞ 同构的子空间.

证 (1)⇒(2) 对 $x=(a_n)\in l_M^*$, 存在 $\rho_0>0$, 使

$$\|x\|_{\rho_0}=\sup_{\pi\in\Pi}\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{a_n}{\rho_0}\right)\omega_{\pi(n)}<+\infty$$

(i) 当 $\rho\geqslant\rho_0$ 时, 由命题 2.7

$$\|x\|_\rho\leqslant\|x\|_{\rho_0}<+\infty,$$

(ii) 当 $\rho<\rho_0$ 时, 由小 Δ_c 条件

$$M\left(\frac{a_n}{\rho}\right)=M\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{a_n}{\rho_0}\right)\leqslant K_c M\left(\frac{a_n}{\rho_0}\right),$$

从而$\|x\|_\rho\leqslant K_c\|x\|_{\rho_0}<+\infty$.

(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5) 显然.

(5)⇒(1) (反证法) 假设 $M\overline{\in}$ 小 Δ_2, 则存在 $t_n\to 0\,(n\to\infty)$, 使得

$$M(2t_n)>2^{n+1}M(t_n),\quad M(t_n)<\frac{1}{2^n}.$$

设 $S_m=\sum_{i=1}^{m}\omega_i$, 则 $S_m\to+\infty\,(m\to\infty)$, 于是存在 S_{m_n}, 使得

$$\frac{1}{2^{n+1}}<S_{m_n}M(t_n)\leqslant\frac{1}{2^n},$$

这时

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{m_n}M(t_n)\leqslant 1,\tag{2.10}$$

且

$$S_{m_n}M(2t_n)>2^{n+1}S_{m_n}M(t_n)>1.\tag{2.11}$$

显然 $m_n>1$, 记 $Q_n=\sum_{k=1}^{n}m_k$, 则 $Q_n\to+\infty\,(n\to\infty)$.

设 $a=(a_n)\in l_\infty$, $a\neq 0$, 考察

$$x=(\underbrace{a_1t_1,\ a_1t_1,\ \cdots\ a_1t_1}_{m_1},\ \underbrace{a_2t_2,\ \cdots,\ a_2t_2}_{m_2},\ \cdots,\ \underbrace{a_nt_n,\ \cdots,\ a_nt_n}_{m_n},\ \cdots)$$

则

$$\|x\|_{\|a\|_\infty}=\sup_{\pi\in\Pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}M\left(\frac{a_nt_n}{\|a\|_\infty}\right)\sum_{k=Q_{n-1}+1}^{Q_n}\omega_{\pi(k)}\right\}.$$

因对任意 $\pi\in\Pi$, 有

$$\sum_{k=Q_{n-1}+1}^{Q_n}\omega_{\pi(k)}\leqslant S_{m_n},$$

又

$$M\left(\frac{a_nt_n}{\|a\|_\infty}\right)\leqslant M(t_n),$$

由(2.10), 得

$$\|x\|_{|a|_\infty}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}M(t_n)S_{m_n}\leqslant 1.$$

故由命题 2.8, 有

$$\|x\|_M\leqslant\|a\|_\infty. \tag{2.12}$$

又 $\|x\|_{\frac{1}{2}|a|_\infty}=\sup\limits_{x\in\Pi}\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}M\left(\dfrac{2a_nt_n}{\|a\|_\infty}\right)\sum\limits_{k=Q_{n-1}+1}^{Q_n}\omega_{\pi(k)}\right\}$, 取 a_{n_0} 使得

$$M\left(\frac{2a_{n_0}t_{n_0}}{\|a\|_\infty}\right)>\frac{1}{2}M(2t_{n_0}),$$

由(2.11)式, 有

$$\|x\|_{\frac{1}{2}|a|_\infty}\geqslant\frac{1}{2}M(2t_{n_0})S_{m_{n_0}}>\frac{1}{2},$$

再由命题 2.8, 有

$$\|x\|_M>\frac{1}{4}\|a\|_\infty. \tag{2.13}$$

综合(2.12), (2.13)得, l_M^* 含有与 l_∞ 同构的子空间. 与(5)矛盾. 故 $M\in$ 小 Δ_2.

推论 2.10 设 $x=(x_n)$, 则(i) $\|x\|_\infty\leqslant C_M\|x\|_M$, (ii) $|x_n|\leqslant C_M\|(I-P_{n-1})x\|_M$, 其中 C_M 是仅与 $M(x)$ 有关的常数.

定理 2.11 设 $M_1(x)$, $M_2(x)$ 都是 Orlicz 函数, 以下断言等价:

(1) $l_{M_1}^*=l_{M_2}^*$, 且恒等映射为同构.

(2) h_{M_1} 和 h_{M_2} 的单位向量基等价.

(3) M_1 和 M_2 在 $x=0$ 处等价, 即存在 $K>0$, $k>0$, $t_0>0$, 使得当 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 时,

$$\frac{1}{K}M_2\left(\frac{t}{k}\right)\leqslant M_1(t)\leqslant KM_2(kt). \tag{2.14}$$

此时记 $M_1\sim M_2$.

证 (1)⇒(2), (3)⇒(1)显然.

(2)⇒(3) (反证法) 假设 $M_1\not\sim M_2$, 即对任意 $K>0$, $k>0$, 都存在 $t>0$, 使得(2.14)不成立. 于是存在 $t_n\to 0$, 不妨设$\{t_n\}$单调递减, 使得

$$M_1(t_n)<\frac{1}{2},\quad M_1(t_n)>2^nM_2(nt_n)\ (n=1,\ 2,\ \cdots), \tag{2.15}$$

又有$\{m_n\}$, $m_n\to+\infty\,(n\to\infty)$使得

$$\frac{1}{2}<(S_{m_n}-S_{m_{n-1}})M_1(t_n)\leqslant 1, \tag{2.16}$$

其中 $S_{m_n}=\sum\limits_{j=1}^{m_n}\omega_j$, $S_{m_0}=0$, 由(2.15)有

$$(S_{m_n}-S_{m_{n-1}})M_2(nt_n)\leqslant\frac{1}{2^n}. \tag{2.17}$$

取 $x=(x_n)=(\underbrace{t_1,\ \cdots,\ t_1}_{m_1},\ \underbrace{t_2,\ \cdots,\ t_2}_{m_2},\ \cdots,\ \underbrace{t_n,\ \cdots,\ t_n}_{m_n},\ \cdots)$.

由 $t_n\to 0$ 得 $x_n\to 0\,(n\to\infty)$, 对任意自然数 r, 有

$$\|x\|_{\frac{1}{r}}^{M_2}=\sum_{n=1}^{\infty}M_2(rx_n)\omega_n\leqslant\sum_{n=1}^{r}M_2(rt_n)(S_{m_n}-S_{m_{n-1}})+\sum_{n=r+1}^{\infty}M_2(nt_n)(S_{m_n}-S_{m_{n-1}}).$$

由(2.17), 有

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} M_2(nt_n)(S_{m_n}-S_{m_{n-1}}) \leqslant \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

故
$$\|x\|_{\frac{1}{r}}^{M_2} = \|rx\|_1^{M_2} < +\infty.$$

于是，$x \in h_{M_2}$. 又由(2.16)，有

$$\|x\|_1^{M_1} = \sum_{n=1}^{\infty} M_1(t_n)(S_{m_n}-S_{m_{n-1}}) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty.$$

故 $x \overline{\in} h_{M_1}$, 从而 $h_{M_1} \neq h_{M_2}$, $l_{M_1}^* \neq l_{M_2}^*$, 与(2)矛盾

本节理论与 Orlicz 序列空间理论平行，证明形式类似，但由于多了$\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$，其证明有很大形式的不同，其构造也较原来复杂得多.

§3. Orlicz–Lorentz 序列空间的自反性

空间的自反性在 Orlicz 空间解决得相当完美. 这里虽有类似的结果，但证明手段却与之不同.

定理 3.1 若 $M \in \Delta_2 \cap \nabla_2$, 则 $d(\omega, M)$ 自反.

证　因 $M \in \Delta_2$, 由定理 2.9, $d(\omega, M)$ 不含与 c_0 同构的子空间.

又 $M \in \nabla_2$, 往证 $d(\omega, M)$ 不含与 l_1 同构的子空间. 由引理 1.6, 只须证 $d(\omega, M)$ 的自然基$\{e_n\}$的任何块基列都不等价于 l_1 的单位基.

假设存在$\{e_n\}$的块基列$\{u_j\}$等价于 l_1 的自然基，则存在 $C_1>0$, 对任意$(\lambda_j) \in l_1$, 有

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_j\right\|_M \geqslant C_1 \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|,$$

亦即

$$\|\sum \lambda_j u_j\|_{\Sigma|\lambda_j|} \geqslant \frac{1}{2} C_1 > 0. \tag{3.1}$$

因 $M \in \nabla_2$, 存在 $C>1$, $u_0>0$, 当 $0 \leqslant u \leqslant u_0$ 时，有 $M(Cu) \geqslant 2CM(u)$ 或 $2CM\left(\frac{u}{C}\right) \leqslant M(u)$. 由迭代法可得，当 $0 \leqslant u \leqslant u_0$ 时有

$$(2C)^n M\left(\frac{u}{C^n}\right) \leqslant M(u). \tag{3.2}$$

设$\{v_k\}$是 $d(\omega, M)$ 的自然基$\{e_n\}$的任一正规块基列,

$$v_k = \sum_{i=q_{k-1}+1}^{q_k} a_i e_i \quad (k=1, 2, \cdots).$$

不妨设 $|a_i| < u_0$, $\{a_i\}_{q_{k-1}+1}^{q_k}$ 单调，则

$$1 = \|v_k\|_M = \inf\{\rho; \|v_k\|_\rho \leqslant 1\},$$

而
$$\|v_k\|_\rho = \sum_{i=1}^{q_k - q_{k-1}} M\left(\frac{a_{i+q_{k-1}}}{\rho}\right)\omega_i \leqslant 1 \quad (\rho \geqslant 1).$$

令 $\rho \to 1^+$, 由 M 的连续性，有

$$\|v_k\|_1 = \sum_{i=1}^{q_k - q_{k-1}} M(a_{i+q_{k-1}})\omega_i \leqslant 1. \tag{3.3}$$

取 $\lambda_k^{(n)} = \frac{1}{C^n} < 1$, $(k=1, 2, \cdots)$, 存在 m_n 使

$$1<m_n\lambda_k^{(n)}=\frac{m_n}{C^n}\leqslant 2.$$

令 $\lambda_n=(\underbrace{\lambda_k^{(n)},\ \cdots,\ \lambda_k^{(n)}}_{m_n},\ 0,\ 0,\ \cdots)$，则

$$1<\|\lambda_n\|_{l_1}\leqslant 2.$$

设 $A^{(n)}=(A_r^{(n)})_{r=1}^{\infty}=\sum_{k=1}^{m_n}\lambda_k^{(n)}v_k$，$\rho_n=\|\lambda_n\|_{l_1}>1$，则

$$\|A^{(n)}\|_{\rho_n}=\sup_{\pi\in\Pi}\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=q_{k-1}+1}^{q_k}M\left(\frac{\lambda_k^{(n)}a_i}{\rho_n}\right)\omega_{\pi(i)}.$$

由(3.2)，(3.3)，有

$$\sum_{i=q_{k-1}+1}^{q_k}M\left(\frac{\lambda_k^{(n)}a_i}{\rho_n}\right)\omega_{\pi(i)}\leqslant\frac{1}{2^nC^n}.$$

所以 $\|A^{(n)}\|_{\rho_n}\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\frac{1}{2^nC^n}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$，于是 $\|A^{(n)}\|_{\rho_n}\to 0\,(n\to\infty)$，这与(3.1)矛盾。

定理 3.1 的逆命题也成立. 为此，先证如下定理.

定理 3.2 若 $M\bar{\in}\nabla_2$. 则 Orlicz 序列空间 O_M 含有与 l_1 同构的子空间.

证　由命题 1.4，$M\bar{\in}\nabla_2$，则对任意 $l>1$，都有

$$\varliminf_{x\to 0}\frac{M(lx)}{M(x)}=l.$$

从而，对某个 $l>1$，有 $x_0>0\,(x_0\ll 1)$，$C_1>0$，使 $M(lx_0)\leqslant C_1lM(x_0)$. 设 $y_0=lx_0$，则有

$$\frac{M(y_0)}{l}\leqslant C_1M\left(\frac{y_0}{l}\right).$$

令 $t_0=\frac{1}{l}$，则 $0<t_0<1$，且

$$t_0M(y_0)\leqslant C_1M(t_0y_0).\tag{3.4}$$

这时，当 $t\geqslant t_0$ 时，亦有

$$tM(y_0)\leqslant C_1M(ty_0).\tag{3.5}$$

设 $0<t_n<1$，使 $\sum_{n=1}^{\infty}t_n=\frac{1}{2}$. 取 $x_n\to 0\,(n\to\infty)$ 且 $\{x_n\}$ 单调递减，使

$$t_nM(x_n)\leqslant C_1M(t_nx_n),$$

从而由(3.5)，当 $t\geqslant t_n$ 时，有

$$tM(x_n)\leqslant C_1M(tx_n).\tag{3.6}$$

又设 $u_n=(\underbrace{0,\ \cdots,\ 0}_{q_{n-1}},\ \underbrace{x_n,\ \cdots,\ x_n}_{q_n-q_{n-1}},\ 0,\ \cdots)$，使

$$1<M(x_n)(q_n-q_{n-1})\leqslant 2,\tag{3.7}$$

则 $1<\|u_n\|_M\leqslant 2$. 于是 $\{u_n\}$ 是 O_M 的一个块基列，下证 $\{u_n\}$ 等价于 $\{e_n\}_{l_1}$.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$，$0<\lambda_n<1$，将 $\{\lambda_n\}$ 分为两类：

I. $\lambda_n\geqslant t_n$，其和记为 $\sum'\lambda_n$.

II. $\lambda_n<t_n$，其和记为 $\sum''\lambda_n$.

则有 $\sum'\lambda_n>\frac{1}{2}\left(\text{否则 }\sum''\lambda_n\geqslant\frac{1}{2}，\text{可得 }\sum''t_n>\frac{1}{2}，\text{矛盾}\right)$，由此，根据(3.6)，(3.7)，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n\right\|_1 \geqslant \frac{1}{C_1}\sum{}'\lambda_n \geqslant \frac{1}{2C_1}=C_2>0.$$

从而对一切$\{\lambda_n\}\in l_1$，(λ_n 不全为零)，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n\right\|_{\Sigma|\lambda_j|}=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\sum|\lambda_j|}u_n\right\|_1 \geqslant C_2>0.$$

由命题2.8，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n\right\|_M \geqslant C_3\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|. \qquad (C_3>0)$$

另外，由(3.7)有

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n\right\|_M \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|,$$

从而定理得证.

定理3.3 若$d(\omega, M)$自反，则$M\in\Delta_2\cap\nabla_2$.

证 若$d(\omega, M)$自反，显然$M\in\Delta_2$. 下证$M\in\nabla_2$. 假设$M\overline{\in}\nabla_2$，类似于定理3.2构造$d(\omega, M)$的正规块基列

$$u_n=\sum_{i=q_{n-1}+1}^{q_n}x_n e_i \quad (n=1, 2, \cdots),$$

使得$x_n\to 0(n\to+\infty)$且有

$$C_1M(t_n x_n)\geqslant t_n M(r_n), \qquad \|u_n\|_1=1, \tag{3.8}$$

其中$\{x_n\}$, $\{t_n\}$, C_1如(3.6)所述.

对任意$\varepsilon>0$，取单调递增的正整数列$\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$和$\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$，使得

$$q_{n_j}<r_j<q_{n_j+1}, \ Q_{j-1}=\sum_{k=1}^{j-1}(q_{n_k+1}-q_{n_k})\leqslant r_j-q_{n_j},$$

且

$$\sum_{i=q_{n_j}+1}^{r_j}M(x_n)\,\omega_{i-q_{n_j}}<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, \tag{3.9}$$

即

$$\left\|\sum_{i=q_{n_j}+1}^{r_j}x_r e_i\right\|_M<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

从而对任给的$\{\lambda_j\}$，$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j=1$，$\lambda_j\geqslant 0$，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j u_{n_j}\right\|_M \geqslant \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j x_j\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j}+1}e_i\right\|_M-\frac{\varepsilon}{2}\max|\lambda_j|.$$

又因

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j x_j\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j}+1}e_i\right\|_1 \geqslant \sum{}'\lambda_j C_1 M(x_j)\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j}+1}\omega_{Q_{j-1}-r_j+i}.$$

由(3.8)，(3.9)有

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j x_j\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j}+1}e_i\right\|_1 \geqslant \frac{1}{2}\sum{}'\lambda_j C_1 \geqslant \frac{C_1}{4}>0.$$

故有

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j x_j\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j}+1}e_i\right\|_M \geqslant \frac{C_1}{4}.$$

取ε充分小，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j u_{n_j}\right\|_M \geqslant \frac{C_1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\geqslant C_4>0,$$

由此，对一切 $\theta \neq (\lambda_j) \in l_1$，有

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\sum |\lambda_j|} u_{n_j} \right\|_M \geqslant C_4,$$

则

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_{n_j} \right\| \geqslant C_4 \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| .$$

这说明 $d(\omega, M)$ 的正规块基列 $\{u_{n_j}\}$ 等价于 l_1 的单位基，矛盾。

$d(\omega, M)$ 的对偶形式不能类似于 Orlicz 序列空间给出．这里的讨论不能用余函数，从而不能用对偶理论来证明 $d(\omega, M)$ 的自反性．这也是本节解决的实质困难．这里其实也给出了 Orlicz 序列空间自反性证明的一个构造性方法．

§4. $d(\omega, M)$ 的子空间

类似于[7, 8]，本节讨论在一定条件下 $d(\omega, M)$ 的子空间问题．

定义 4.1　称 Orlicz 函数 $M(u)$ 满足小 $\Delta'(\nabla')$ 条件，如果存在 $C>0$，$u_0>0$，使得当 $0\leqslant u, v\leqslant u_0$ 时，有

$$M(uv) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} CM(u)M(v).$$

对于大 Δ' 条件，由文[3]，$M\in$ 大 Δ'，则 $M\in$ 大 Δ_2．对小 Δ' 条件，是否有类似的结论？

例 4.2　设

$$M(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{3}, \\ e^{-3}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+e^{-3}, & x>\dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

则 $M(x)$ 是 Orlicz 函数，因

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \frac{M(xy)}{M(x)M(y)}=0.$$

所以存在 $\delta>0$，当 $0\leqslant x, y\leqslant\delta$ 时，有

$$M(xy)\leqslant M(x)M(y).$$

故 $M\in\Delta'$，但当 $0<x<\dfrac{1}{6}$ 时，有

$$\frac{M(2x)}{M(x)}=e^{\frac{1}{2x}}\to+\infty \quad (x\to 0^+).$$

从而 $M\overline{\in}\Delta_2$

由此看到，小 Δ' 条件不含小 Δ_2 条件．同样，小 ∇' 条件亦不含小 ∇_2 条件，但出人意料地有如下命题．

定理 4.3　(i) 若 $M\in\Delta'$，则 $M\in\nabla_2$.

(ii) 若 $M\in\nabla'$，则 $M\in\Delta_2$.

证略

定理 4.4　(i) 若 $M\in\nabla'$，则 Orlicz 序列空间 O_M 的任何正规块基列都强于单位基．

(ii) 若 $M\in\Delta'$，则 O_M 的任何正规块基列都弱于单位基．

证　(i) 设 $u_j=\sum_{i=q_{j-1}+1}^{q_j}a_ie_i$ 是 O_M 的正规块基列，对 $\rho\geqslant\max\{|\lambda_j|\}$，有

$$\|\sum\lambda_ju_j\|_\rho=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=q_{j-1}+1}^{q_j}M\left(\lambda_j\frac{a_i}{\rho}\right).$$

不妨设 $M(1)=1$，由定理 4.3，不妨设

$$M\left(\frac{\lambda_ja_i}{\rho}\right)\geqslant C'M(a_i)M\left(\frac{\lambda_j}{\rho}\right),$$

则

$$\|\sum\lambda_ju_j\|_\rho\geqslant C'\sum_{j=1}^{\infty}M\left(\frac{\lambda_j}{\rho}\right).$$

当 $\|\sum\lambda_ju_j\|_\rho\leqslant1$ 时，有 $\|\sum\lambda_je_j\|_\rho\leqslant\frac{1}{C'}$，由此

$$\|\sum\lambda_je_j\|_{\|\sum\lambda_ju_j\|}\leqslant\frac{1}{C'}.$$

从而

$$\|\sum\lambda_je_j\|_M\leqslant C''\|\sum\lambda_ju_j\|_M.$$

(ii) 同理可证

推论 4.5　若 $M\in\Delta'\cap\nabla'$，则 O_M 等价于 c_0 或某个 $l_p(1\leqslant p<+\infty)$，从而 $M\sim x^p$ 或 M 退化.

下面讨论 $d(\omega,M)$ 在满足 Δ' 或 ∇' 时的子空间性质.

定理 4.6　设 $M\in\nabla'$，$u_n=\sum_{i=q_{n-1}+1}^{q_n}a_ie_i$，$(n=1,2,\cdots)$ 是 $d(\omega,M)$ 的自然基的任一块基列，且 $\lim\limits_{i\to\infty}a_i=0$，则存在 $\{u_n\}$ 的子列强于 O_M 的自然基.

证　对 $\varepsilon>0$，取自然数列的子列 $\{n_j\}$ 和 $\{r_j\}$ 使得

$$q_{n_j}<r_j<q_{n_j+1},\quad Q_{j-1}=\sum_{k=1}^{j-1}(q_{n_k+1}-q_{n_k})<r_j-q_{n_j}$$

$$\sum_{i=q_{n_j}+1}^{r_j}M(a_i)\omega_{i-q_{n_j}}<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}},$$

或

$$\left\|\sum_{i=q_{n_j}+1}^{r_j}a_ie_i\right\|_M<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

对任给的 $\{\lambda_j\}$，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_ju_{n_j}\right\|_M\geqslant\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j+1}}a_ie_i\right\|_M-\frac{\varepsilon}{2}\max_j|\lambda_j|$$

而

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j+1}}a_ie_i\right\|_\rho\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j+1}}M\left(\frac{\lambda_ja_i}{\rho}\right)\omega_{Q_{j-1}-r_j+i}$$

$$\geqslant C\sum_{j=1}^{\infty}M\left(\frac{\lambda_j}{\rho}\right)\sum_{i=r_j+1}^{q_{n_j+1}}M(a_i)\omega_{Q_{j-1}-r_j+i}$$

$$\geqslant C(1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{\infty}M\left(\frac{\lambda_j}{\rho}\right).$$

由此可得 $\|\sum\lambda_je_j\|_{O_M}\leqslant L'\|\sum\lambda_ju_{n_j}\|_{d(\omega,M)}$.

定理 4.7　设 $M\in\Delta'\cap\Delta_2$，则对 $\{e_n\}$ 的任何正规块基列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset d(\omega,M)$，$u_n=\sum_{i=q_{n-1}+1}^{q_n}a_ie_i(n=1,2,\cdots)$，都有 $\{u_n\}$ 弱于 O_M 的自然基.

证　对任意 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$，都有

$$\|\sum \lambda_j u_j\|_\rho^{d(\omega,M)} = \sup_{\pi\in\Pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=q_{j-1}+1}^{q_j} M\left(\frac{\lambda_j a_i}{\rho}\right)\omega_{\pi(i)}$$
$$\leq C' \sum_{j=1}^{\infty} M\left(\frac{\lambda_j}{\rho}\right)$$
$$= C' \|\sum \lambda_j e_i\|_\rho^{O_M}.$$

由此可得$\|\sum \lambda_j u_j\|_{d(\omega,M)} \leq C'' \|\sum \lambda_j e_j\|_{O_M}$.

推论 4.8　设 $M \in \Delta' \cap \nabla'$,

$$u_n = \sum_{i=Q_{n-1}+1}^{Q_n} a_i e_i, \quad (n=1, 2, \cdots)$$

是 $d(\omega, M)$ 的块基列, 且 $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$, 则存在 $\{u_n\}$ 的子列 $\{u_{n_j}\}$ 等价于 O_M 的自然基.

证　由定理 4.6, 定理 4.7 即得.

参 考 文 献

[1] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.

[2] 吴从炘等, Orlicz 空间几何理论, 哈尔滨工业大学出版社, 1986.

[3] 吴从炘、王廷辅, 奥尔里奇空间及其应用, 黑龙江科学技术出版社, 1983.

[4] Lindenstrauss, J. &Tzafriri, L., On Orlicz sequence spaces, *Israel J. Math.*, **10**. (1971), 379—390.

[5] Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L., On Orlicz sequence spaces II, *Israel J. Math.*, **11**(1972), 355—379.

[6] Lindenstrauss, J. & Tzafriri, L., On orlicz sequence spaces III, *Israel J. Math.*, **14**, (1973), 368—389.

[7] Altshuler, Z., Casazza, P. G. & Lin, B. L., On symmetric basic sequences in Lorentz sequence spaces, *Israel J. Math.*, **15**(1973), 140—155.

[8] Lindberg, K. J., On subspaces of Orlicz sequence spaces, *Studia Math.*, **45** (1973), 119—146.