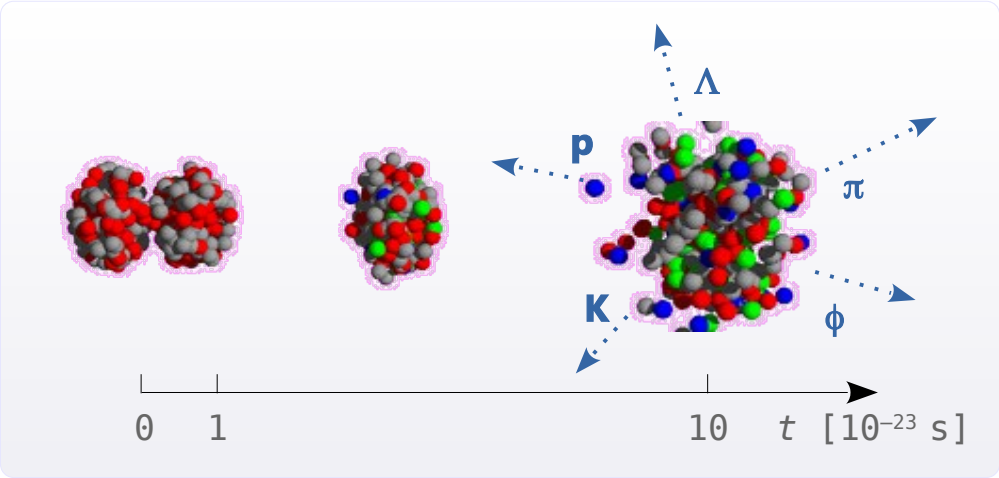
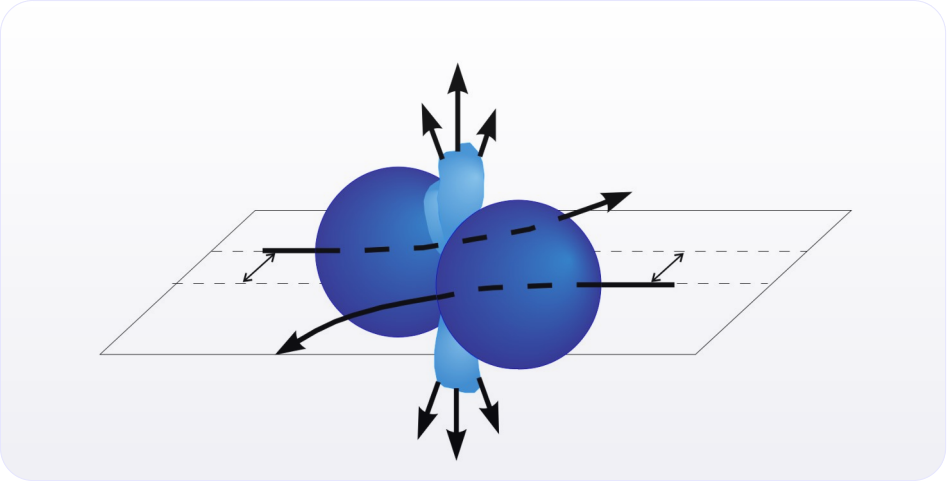
Zakład Fizyki Jądrowej
Uniwersytet Warszawski

Fizyka zderzeń jąder atomowych

Krzysztof Piasecki

Zakład Fizyki Jądrowej, Wydział Fizyki UW





krzysztof.piasecki@fuw.edu.pl

Informacje organizacyjne

- *Literatura*

  Głównie – szereg referencji umieszczanych przy tematach.
  Publikacje są dostępne na żądanie.

  T. Matulewicz, E. Skrzypczak, Kinematyka relatywistyczna w zadaniach, UW Wydział Fizyki, 2003

  W. Florkowski, Phenomenology of Ultra-relativistic Heavy-ion collisions, World Scientific 2010
  Dostępne w Bibliotece FUW, częściowo na books.google.com,
  lub: do okazania na żądanie

- *Warunki zaliczenia*:

  Egzamin pisemny (w formie testu) : termin do uzgodnienia. Termin 0 – prośba o kontakt.

- Skala ocen: (po zaokrągleniu)

[97 – …]	5!	[75 – 82]	4	[< 50]	2
[91 – 96]	5	[63 – 74]	3+		
[83 – 90]	4+	[50 – 62]	3		

Plan wykładu

1. Wstęp
2. Przygotowanie pojęciowe
3. Zajście zderzenia
4. Zwiększamy energię wiązki
5. Produkcja nowych cząstek i rozpady
6. Opis stanu końcowego zderzenia: model statystyczny
7. Opis stanu końcowego zderzenia: ruch kolektywny, stopping, koalescencja
8. Opis stanu końcowego zderzenia: anizotropie rozkładu azymutalnego
9. Równanie stanu materii jądrowej
10. Modelowanie zderzeń jądrowych
11. Relatywistyczny opis materii jądrowej

Dlaczego badamy zderzenia jąder atomowych?

- Bo materia jądrowa to nieusuwalny etap na skali złożoności Wszechświata.
  Właściwości poza stanem równowagi?
  Równanie stanu (EoS) takiej materii? (np. jak **ściśliwa**?)

- Stany skupienia materii jądrowej (przejścia: ciecz ↔ **gaz hadronów**, HG
  gaz hadronów HG ↔ **plazma kwarkowo-gluonowa**, QGP)

- Zderzenia są „piecem hutniczym" **produkującym hadrony** zwykle nieobserwowane.

- Chcemy poznać własności hadronów przechodzących przez materię jądrową:
  - czy przekroje czynne na produkcję, oddziaływania, absorpcję są w niej takie, jak w próżni?
  - **zmiana masy** (i nie tylko) hadronu w środku materii jądrowej (tzw. przywracanie symetrii chiralnej)

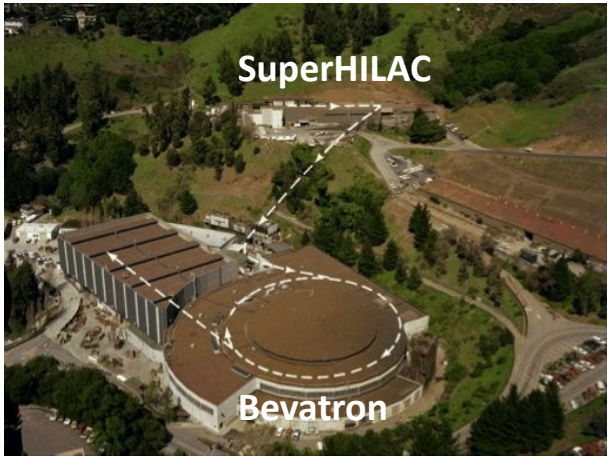
- Czy to potrzebne dla opisu teoretycznego Natury?
  - niższe energie: modele efektywne **sił jądrowych / oddziaływań hadronów** (obszar **nieperturbacyjny QCD**)
  - wyższe energie: obszar **perturbacyjny QCD**

- Czy to pomaga w objaśnianiu zjawisk w Przyrodzie?
  - zderzenia cząstek kosmicznych z jądrami w atmosferze
  - modelowanie eksplozji **supernowych**: etap najgęstszy ← EoS + QGP
  - modelowanie wnętrza **gwiazdy neutronowej** + zderzeń gwiazd
  - puzzel w dedukcji początków Wszechświata

- Czy to pomaga ludziom?
  - **hadronoterapia** (transport jonów w tkance → pik Bragga), **PET** (fragmentacja → jądra β^+ radioaktywne)

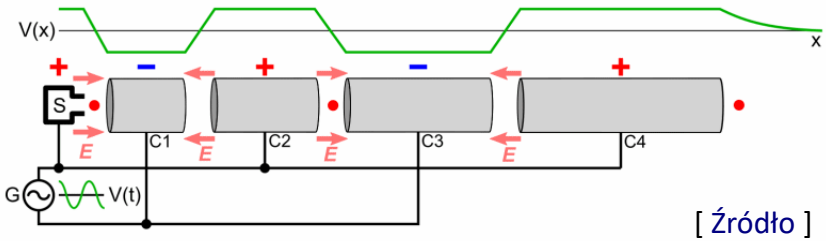
Bevalac: pierwszy (relatywistyczny) akcelerator ciężkich jonów

Bevalac @ BNL Brookhaven (1974)



SuperHILAC

- **LINAC** (Linear Accelerator) : zasada działania



[Źródło]

- Jedna z pierwszych publikacji (1975) [źródło]

Shock Waves and Mach Cones in Fast Nucleus-Nucleus Collisions

H.G. Baumgardt, J.U. Schott, Y. Sakamoto**, and E. Schopper

Institut für Kernphysik, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, Germany

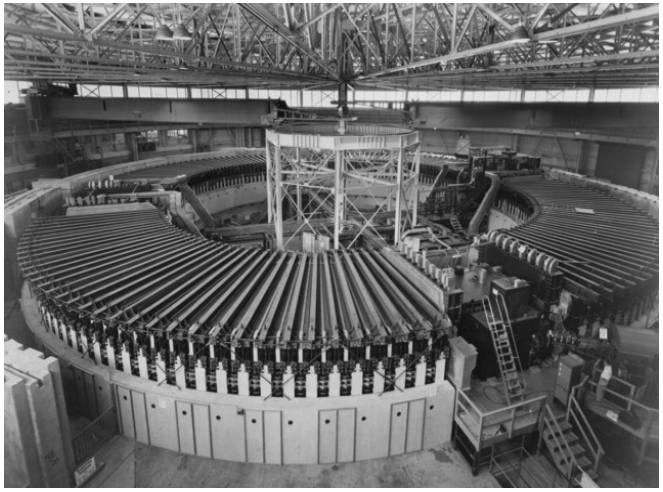
H. Stöcker, J. Hofmann, W. Scheid, and W. Greiner

Institut für Theoretische Physik, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, Germany

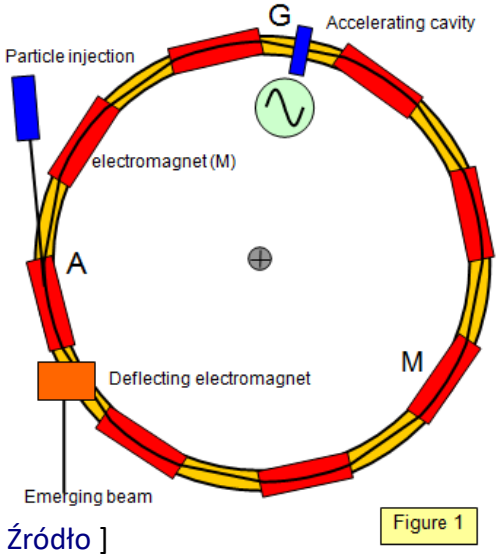
Received April 1, accepted April 4, 1975

If nuclei collide with the relative velocity v larger than the velocity c_s of first sound in nuclear matter, shock waves are predicted to develop [1, 2]. They are of principal importance, because of the rather high densities ($\rho/\rho_0 \approx 2$–5) and temperatures ($T \approx 30$–200 MeV) expected in the shock zones and the thus developing isobaric and hot matter with properties which are completely unknown at present, and because of the possibility to investigate the energy density functional $W(\rho, T)$ of nuclear matter far beyond the equilibrium point $\rho = \rho_0$. The measurement of the nuclear com-

Bevatron [Źródło]



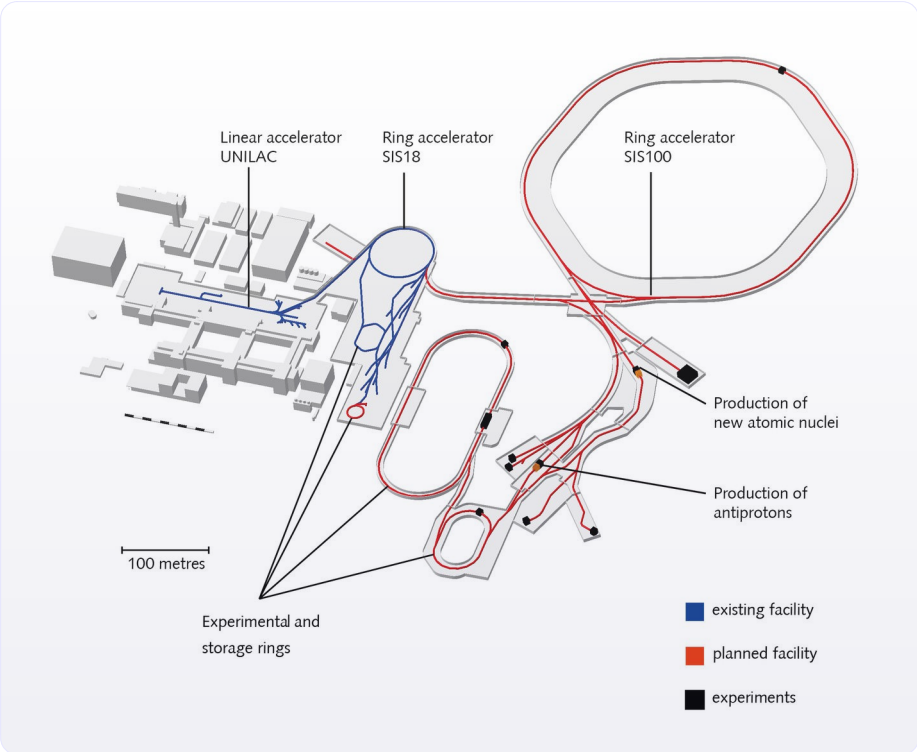
- **Synchrotron**: zasada działania



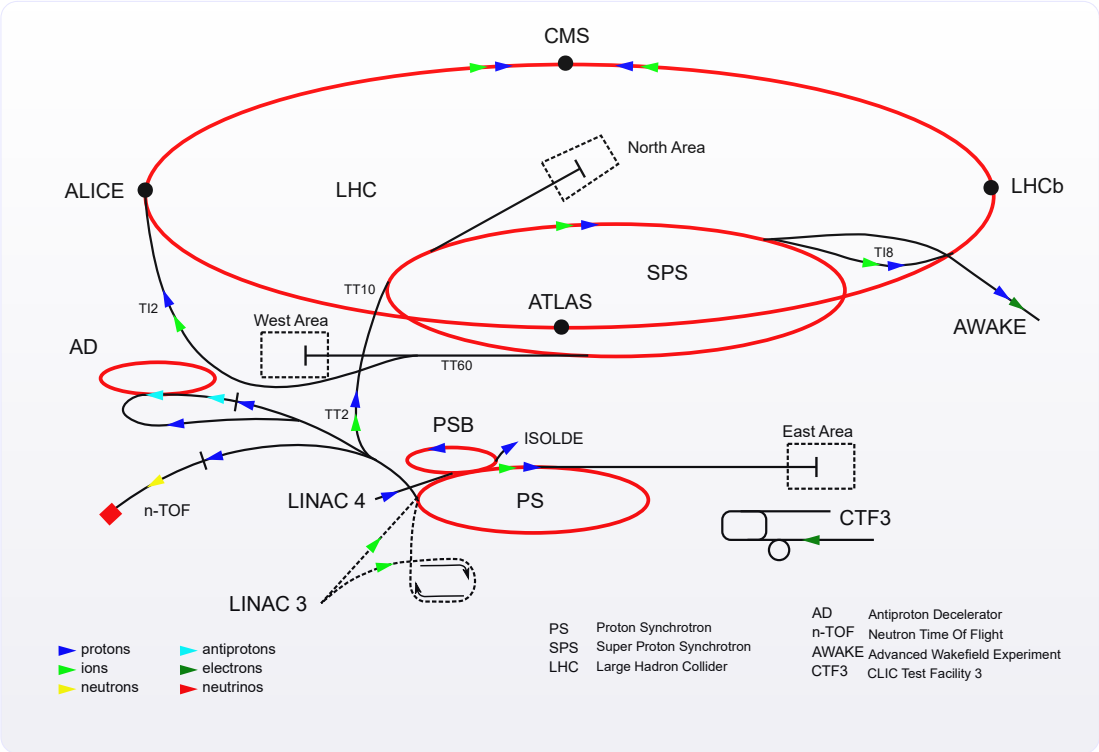
[Źródło]

Europejskie relatywistyczne akceleratory ciężkojonowe

- Akceleratory w **GSI**, Niemcy



- Kompleks akceleratorowy w **CERN**, Szwajcaria-Francja

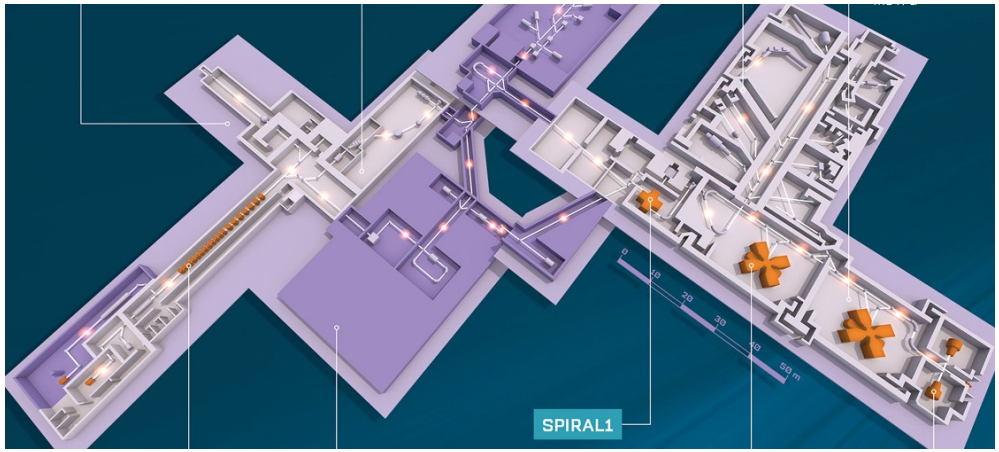


	SIS18	**SIS100** (w budowie)
Energie wiązek na nukleon [GeV]	0.05 – 2	2 – 11
Eksperym. jądrowe z udziałem FUW-u	HADES	CBM

	SPS	**LHC**
Energie wiązek na nukleon [GeV]	10 – 160	35000 - 65000
Eksperym. jądrowe z udziałem FUW-u	NA61	

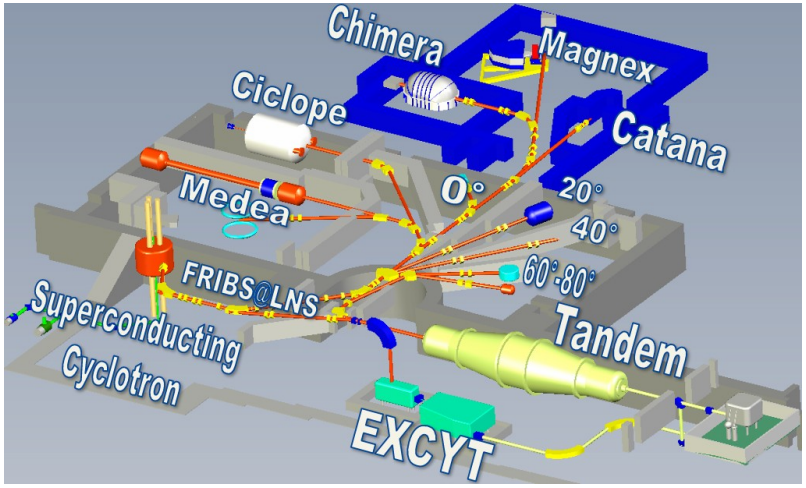
Europejskie relatywistyczne akceleratory ciężkojonowe

- Akceleratory w **GANIL**, Caen, Francja

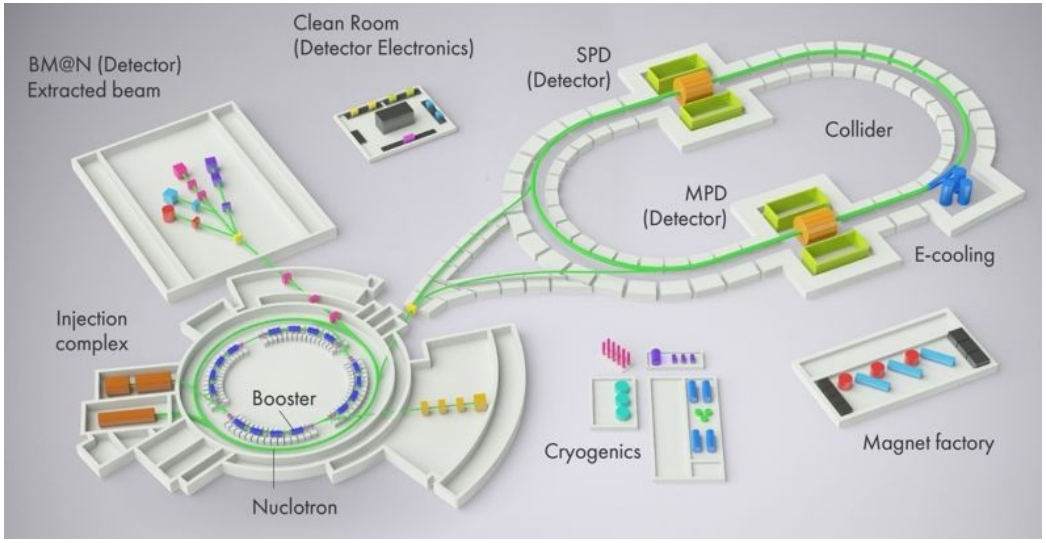


	GANIL CSS1/2	**LNS**	**JINR** NICA (w bud.)
Energie wiązek na nukleon	13 – 95 MeV	8 - 80 MeV	0.2 – 6 GeV
Eksperym. jądrowe z udziałem FUW-u		CHIMERA	MPD (do 02.2022)

- Akceleratory w **LNS**, Catania, Włochy



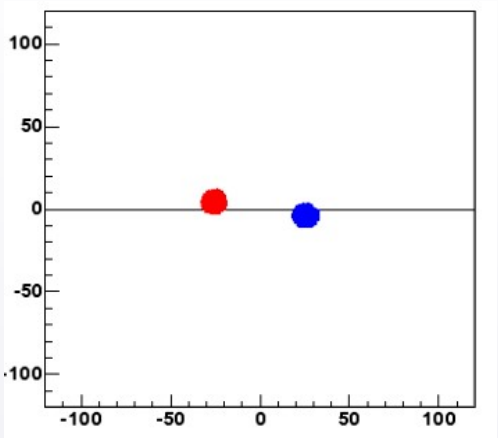
- Akceleratory w **JINR**, Dubna, Rosja

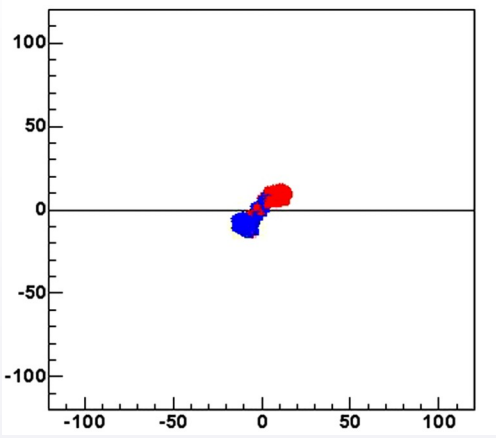


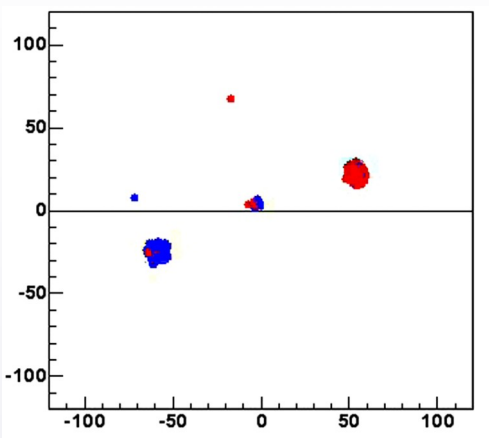
Zderzenie ciężkich jonów – przykłady symulacji

- Symulacja QMD zderzenia Au+Au przy energii kinetycznej wiązki T_{Beam} = **15 MeV/nukleon** (15A MeV)

  [www.fuw.edu.pl/~kpias/fzja/QMD_Tb.015_b08_010.mpg]

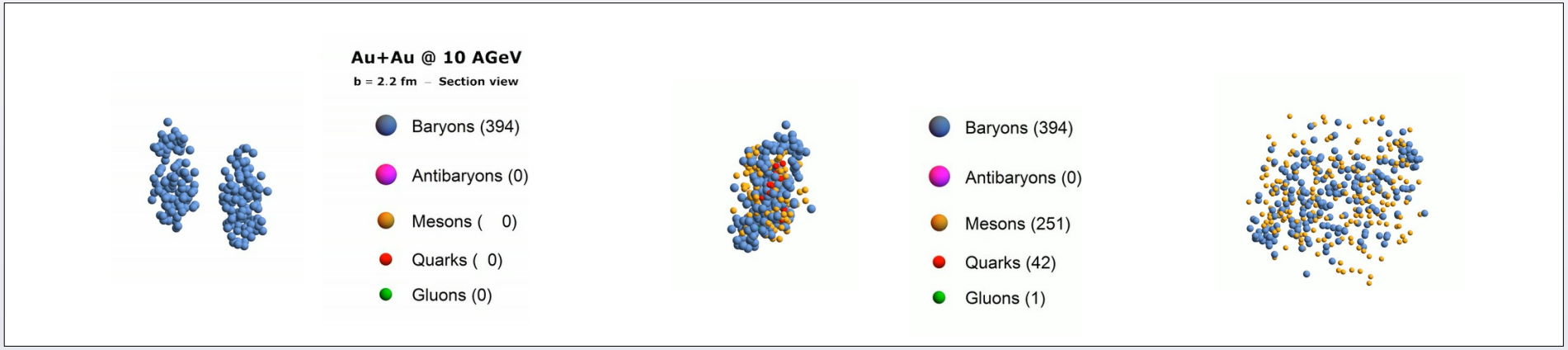






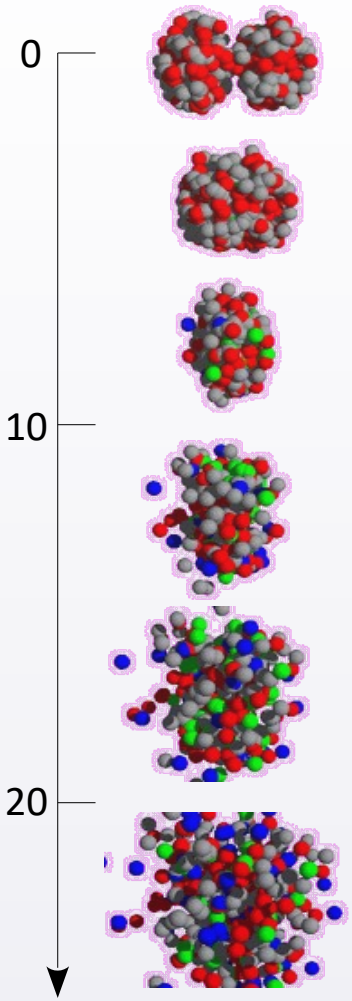
- Symulacja PHSD zderzenia Au+Au przy energii kinetycznej wiązki T_{Beam} = **10 GeV/nukleon** (10*A* GeV)

  [www.fuw.edu.pl/~kpias/fzja/movie_AuAu_10AGeV.mp4]



Zderzenie ciężkich jonów – przykłady symulacji

- Symulacja IQMD zderzenia Au+Au przy energii kinetycznej wiązki T_{Beam} = **1.5 GeV/nukleon** (1.5 *A*GeV)



0 fm/c : początek zderzenia

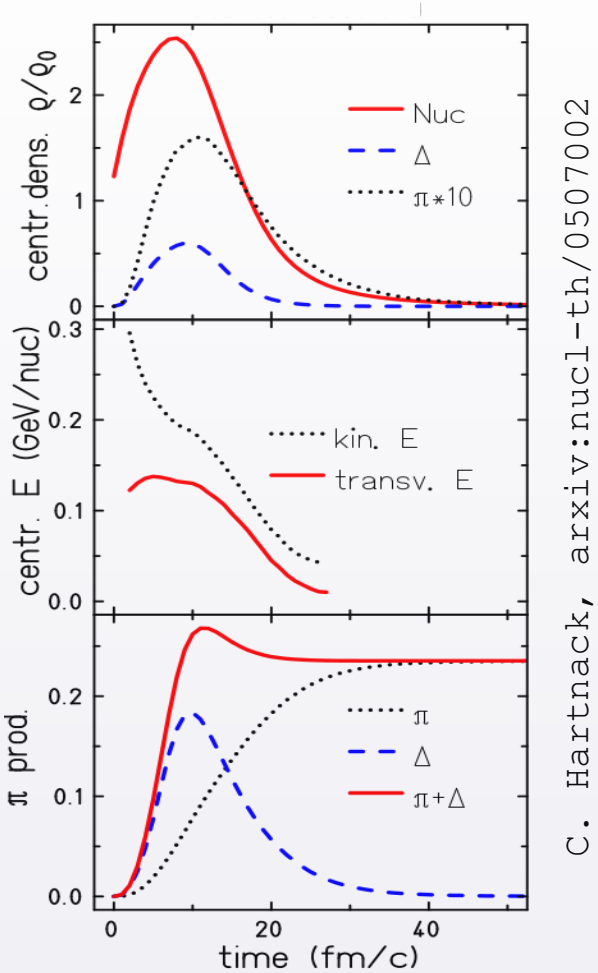
4 fm/c : początek produkcji barionów Δ
(rezonans Δ, stan wzbudzony nukleonu)

8 fm/c : maksimum gęstości nukleonów w środku
10 fm/c : maksimum gęstości Δ w środku

12 fm/c : maksimum gęstości π
14 fm/c : π zaczynają dominować nad Δ
(bo τ(Δ) = 1,7 fm/c , po czym: Δ → Nπ)

16..20 fm/c : rozkłady pędowe nukleonów stają się „termiczne”

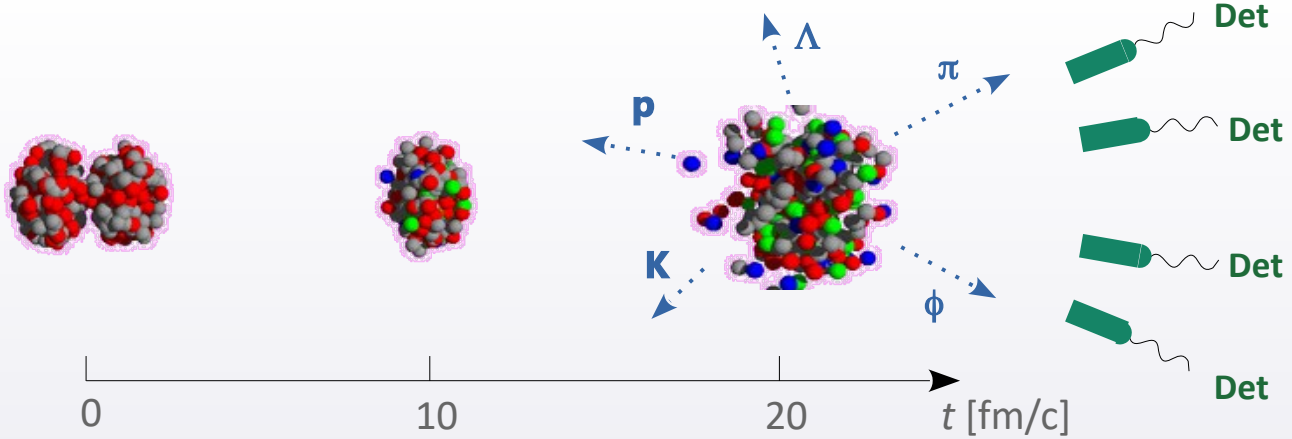
20 fm/c : krotność π → nasyca się



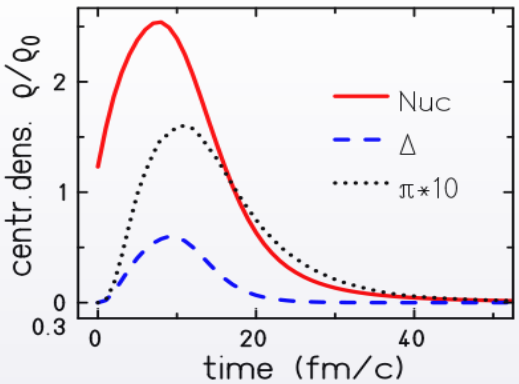
(1 fm/c = 3.3 · 10^{-24} s)

Slajd za: C. Hartnack "The nuclear equation of state is soft", SQM 2006

Relatywistyczne zderzenia jądrowe

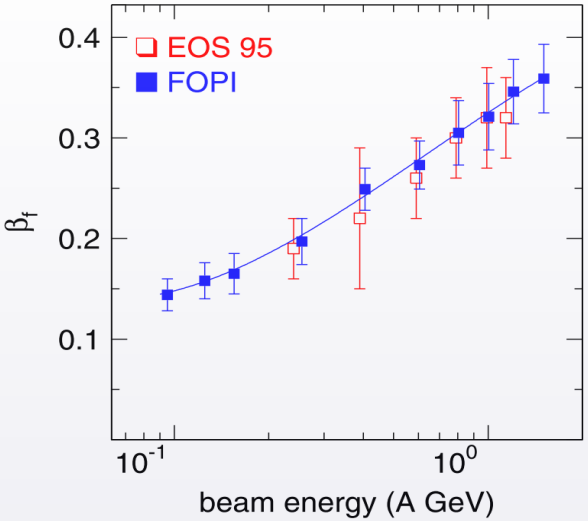


Czas trwania. 10 fm/c = $3.3 \cdot 10^{-23}$ s

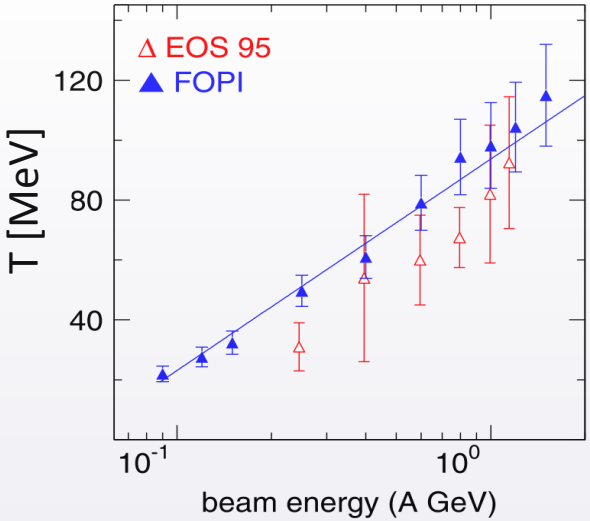


C. Hartnack et al., Phys. Rep. 510, 119 (2012)

Prędkość ekspansji radialnej [% *c*]

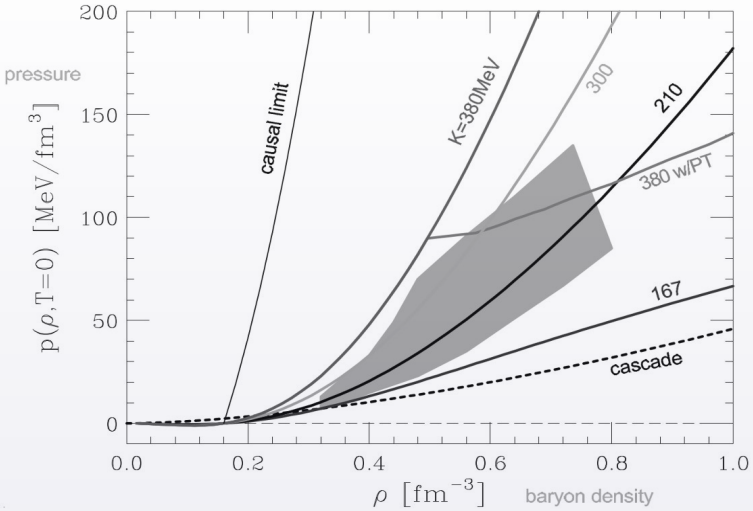


Temperatura. 100 MeV = $1.2 \cdot 10^{12}$ K



W. Reisdorf et al., Nucl. Phys. A 848, 366 (2010)

Ciśnienie. 10 MeV/fm^3 = $1.6 \cdot 10^{33}$ Pa



P. Danielewicz, Acta Phys. Pol. B 33, 45 (2002)

Energia wiązki a relatywistyka i λ de Broglie'a

- Jak podstawowe parametry zmieniają się z **energią wiązki**?

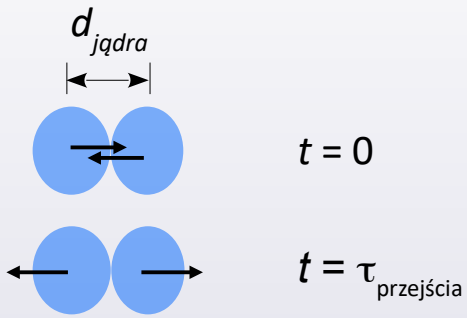
T_{Beam} / nukleon	γ (Lorentza)	β (Lorentza)	$\lambda_{de\ Broglie'a}$ [fm]	$\tau_{przejścia}$ [10^{-23} s]
5 MeV	1.005	0.10	13	55
50 MeV	1.05	0.31	4.1	18
500 MeV	1.5	0.75	1.2	5.5
5 GeV	6.3	0.987	0.2	1.7
50 GeV	54	0.9998	0.02	0.5

- Jak to wyliczyć?

$$T_{Beam}/A = m_N c^2 (\gamma - 1) \quad \rightarrow \quad \gamma = 1 + \frac{T}{m_N c^2} \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\lambda_{de\ Broglie}(N) = \frac{h}{p_N} = \frac{\hbar c \cdot 2\pi}{m_N c^2 \cdot \gamma\beta}$$

$$\tau_{przejścia}(A_{1,2} = 50) = \frac{d_{jądra}}{v_{przejścia,CM}} = \ldots = \frac{2R_{jądra}}{p_{CM}/m_N}$$



Podsumujmy …

- **Podstawowe cechy wysokoenergetycznych zderzeń jądrowych**
  - **Czas zderzenia** $\sim 10^{-22}$ s. Adekwatna jednostka czasu: 1 fm/c = $3{,}3 \cdot 10^{-24}$ s
  - **Temperatury** dochodzą do $\sim$ 100 MeV ($\sim 10^{12}$ K).
  - **Gęstości** materii rosną kilkukrotnie. **Ciśnienia** dochodzą do 50 MeV/fm^2 ($\sim 10^{33}$ Pa)
  - Kinematyka **relatywistyczna** staje się niezbędna
  - Nukleon jądra wiązki próbkuje poszczególne nukleony jądra tarczy

- **Pytania**
  - Jak opisać szansę na zderzenie? (przekrój czynny)
  - Jakie są właściwe zmienne: co można wydobyć doświadczalnie, a co się rozważa teoretycznie?
  - Jak opisać emisję cząstek i rozpady? (krotności i rozkłady, podejście termiczne czy dynamiczne?)
  - Co jest „silnikiem” symulacji zderzeń
  - Eksperyment: (jak mierzyć?)

Przygotowanie pojęciowe

- Podstawowe cechy jąder atomowych
- Model „gazu” Fermiego
  - Zależność od koncentracji nukleonów oraz od asymetrii $N \neq Z$
- Konwencja układu odniesienia
- Podstawy kinematyki relatywistycznej
- Układ Lab a układy CM
- Przekrój czynny całkowity i różniczkowy

Podstawowe cechy jąder atomowych

- Jądro: grupa nukleonów wzajemnie związanych.

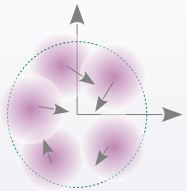
  Rozmiary jąder: z elastycznego rozpraszania e^- na jądrach.

  $$R \approx r_0 \cdot A^{1/3} \quad , \quad r_0 \approx 1.25 \text{ fm}$$

- Koncentracja materii jądrowej: $\langle n_0 \rangle = \dfrac{A}{V} \approx \dfrac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 0.12\ fm^{-3}$

  W samym środku jądra o dużym A, $n_0 \approx 0.16\ \text{fm}^{-3}$.

- W układzie własnym jądra:



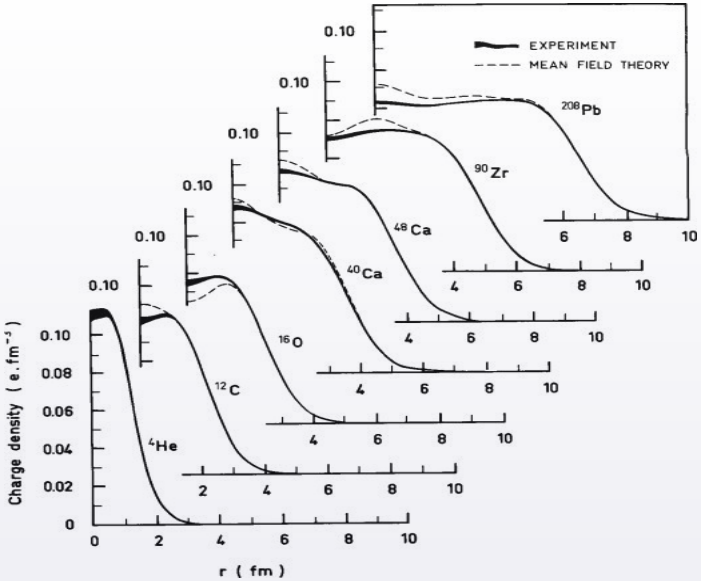
$$E_J = M_J c^2 = \underbrace{\sum_i m_{N,i} c^2}_{\text{liczbowo}} - \underbrace{B_J}_{\text{Energia wiązania}}$$

$$\frac{E_J}{A} = m_N c^2 - \frac{B_{jądra}}{A}$$

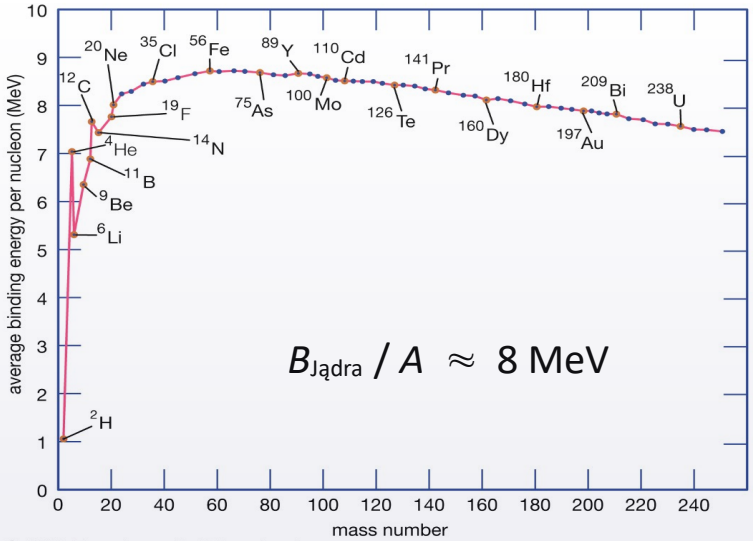
- Nukleony wytwarzają potencjał,
  w którym zarazem porusza się każdy z nukleonów.

  Eksperyment + QM ⇨ tylko dyskretne poziomy energetyczne
  Stan podstawowy jądra : nukleony obsadzają najniższe stany.

  Q(p) = +e ⇒ dodatkowy $U_{\text{Coulomb}} > 0$
  ⇒ E(p) nieco inne od E(n)
  Spin nukleonu ½ ⇒ 2 obsadzenia poziomu (↑ i ↓)



Źródło: B. Frois'85 via ScienceDirect



$B_{\text{Jądra}} / A \approx 8$ MeV

- Energia wiązania B_J na Karcie Nuklidów

Uproszczone podejście: **Liquid Drop Model**
(LDM / model kroplowy)

$$B_J = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \delta(A,Z)$$

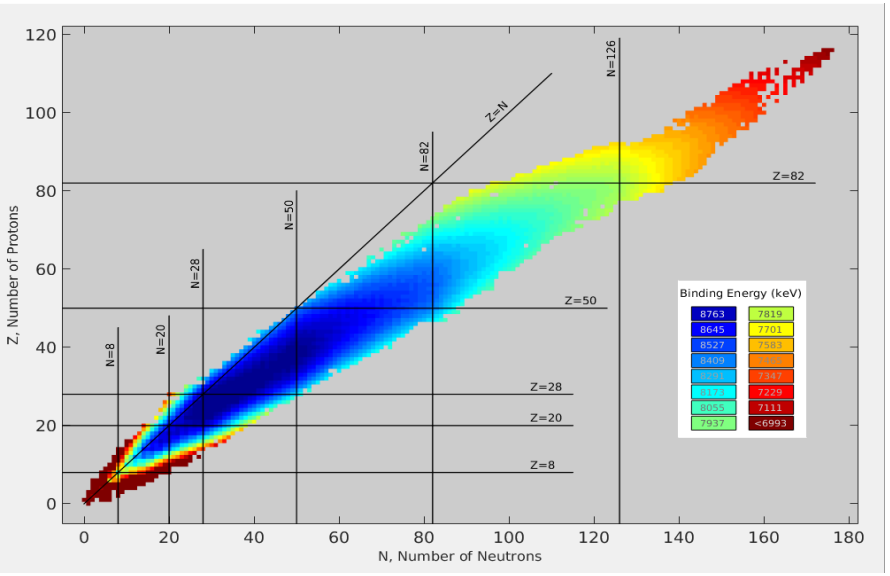
cz. objętościowy
a_V = 15.8 MeV

powierzchniowy
a_S = 18.3 MeV

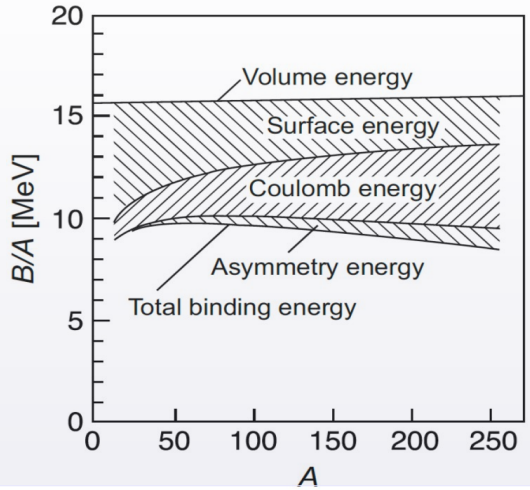
coulombowski
a_C = 0.714 MeV

asymetrii
a_A = 23.2 MeV

pairing
δ = 11.2 MeV



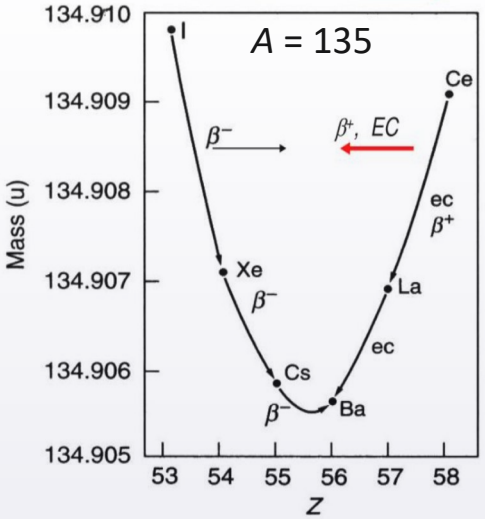
- Wkład a_V scala jądro, a wkłady a_S, a_C i a_A osłabiają wiązanie.



- Przekrój przez **A = const** ujawnia „**parabolę mas**”.

1) Człon asymetrii $\sim -(N-Z)^2$ skłania, aby najsilniej związanymi jądrami były te wzdłuż diagonali.

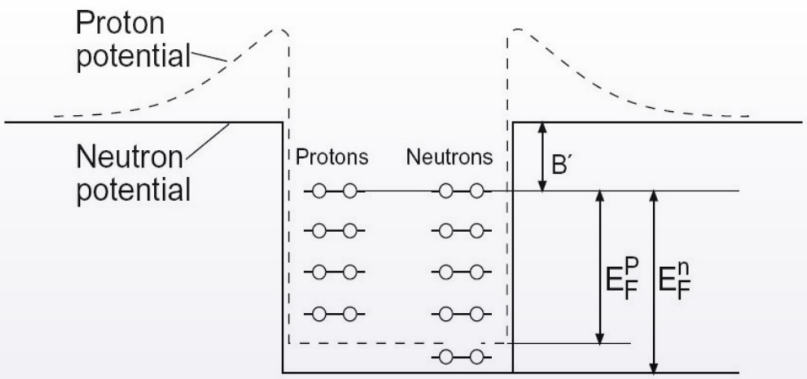
2) Ale człon Coulomba $\sim -Z^2$ osłabia wiązanie jąder o dużym Z.
$\Rightarrow$ przesuwa max B_J ku mniejszym Z.



Model „gazu” Fermiego dla nukleonów

- **Model „gazu” Fermiego** (w skrócie; omówienie np. tutaj).

  Każdy nukleon – to obiekt kwantowy w studni potencjału: kulistej (objętość V) i jednorodnej (U = const).



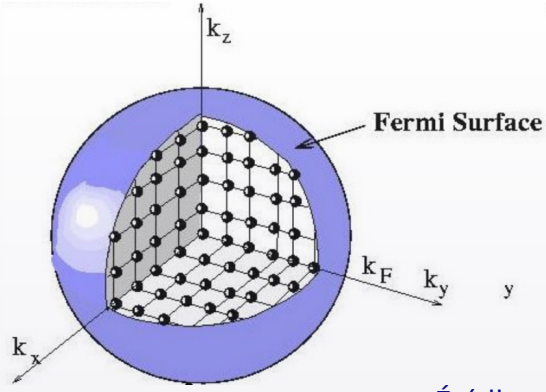
- Równanie Schrödingera dla sześcianu o objętości L^3

  ⇒ fale stojące w 3D o skwantowanych pędach $p_i = \hbar k_i = \frac{\hbar \pi}{L} \cdot n_i$

  ⇒ Mamy $E_{\mathrm{Kin}} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2 m_N}$. Im wyższe n_i, tym większa E_{kin}.

  („*ruch Fermiego*”)

- Ale energia ma limit ⇒ stany są w „**kuli pędów**”. Obrazuje to szkic:



Źródło

Zakaz Pauliego: w 1 stanie może się znajdować tylko 1 fermion.

Przestrzeń fazowa: $\bar{x}, \bar{p}$: $\mathbb{R}^6$. Każdy stan zajmuje całą $V_{\text{jądra}}$.

Właściwie, każdy nukleon ma 2 możliwości $m_S \in \{-½, +½\}$ i może być {p, n} .

⇒ w elementarnej kostce 6-wymiarowej objętości są 4 stany.

W modelu Fermiego wyprowadza się, że w komórce o objętości h^3 są max. 4 stany, a różniczkowo – jest dA stanów w objętości $V_{\text{Jądra}} \cdot \mathrm{d}p^3$.

Ważna proporcja:

$$\frac{dA}{4} = \frac{V_{jądra} \cdot dp^3}{h^3}$$

A nukleonów gęsto upakowuje stany w „kuli pędów” o promieniach $\in [0, p_F]$. (**p_F = pęd Fermiego**)

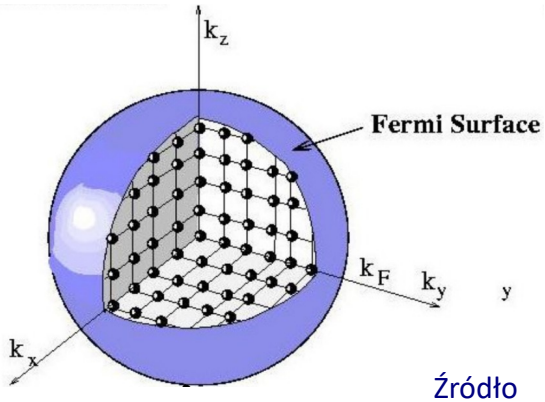
Model „gazu” Fermiego dla nukleonów

- Najwyższy zapełniony stan: $\epsilon_F\,(p_F)$, ***energia (pęd) Fermiego***. Ile to wynosi? (c.d.)

Ważna proporcja: $$\frac{dA}{4} = \frac{V_{jądra}\cdot dp^3}{h^3}$$

- ***A*** nukleonów gęsto upakowuje stany w „kuli pędów” o promieniach $\in [0, p_F]$.

$$A = \frac{4V}{h^3}\int dp^3 = \frac{4V}{(2\pi\hbar)^3}\cdot\frac{4}{3}\pi p_F^3$$



Źródło

➡ **Pęd Fermiego:** $$p_F = \hbar\sqrt[3]{\frac{3\pi^2}{2}\frac{A}{V}} = \hbar\sqrt[3]{3\pi^2\frac{n_0}{2}}$$

$$p_F \approx 265\ \text{MeV}$$

➡ **Energia Fermiego:** $$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_N} = \frac{(\hbar c)^2}{2m_N c^2}\left(3\pi\frac{n_0}{2}\right)^{2/3}$$

$$\epsilon_F \approx 37\ \text{MeV}$$

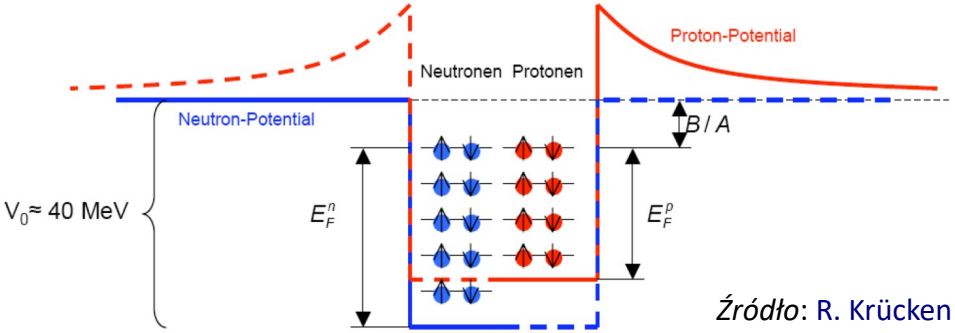
- Spostrzeżenie: Energia Fermiego zależy od koncentracji w jądrze.
Zderzając jądra, m.in. je zagęszczamy, a następnie rozrzedzamy.
Licząc bilans energii, musimy pamiętać o tej zależności.

$$\epsilon_F \sim n^{2/3}$$

Model „gazu” Fermiego a neutrony/protony

- Rozważmy teraz neutrony i protony osobno. Jeśli $N \neq Z$, to jądro jest „niesymetryczne”.

  W komórce dla neutronów o 6-objętości h^3 może być ich 2 ($m_s \in \{+½\ \ -½\}$).
  Tak samo dla protonów.



Źródło: R. Krücken

- Proporcje:

$$\frac{dN}{2} = \frac{V_{jądra} \cdot dp_n^3}{h^3} \qquad \frac{dZ}{2} = \frac{V_{jądra} \cdot dp_p^3}{h^3}$$

N neutronów (***Z*** protonów) gęsto upakowuje stany w „kuli pędów” o $p \in [0, p_F]$.

$$N = \frac{2V}{h^3}\int dp^3 = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{4}{3}\pi p_{F,n}^3 \qquad Z = \frac{2V}{h^3}\int dp^3 = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{4}{3}\pi p_{F,p}^3$$

- **Pęd Fermiego:**

$$p_{F,n} = \hbar\sqrt[3]{3\pi^2\frac{N}{V}} = \hbar\sqrt[3]{3\pi^2\, n_{0,n}} \qquad p_{F,p} = \hbar\sqrt[3]{3\pi^2\frac{Z}{V}} = \hbar\sqrt[3]{3\pi^2\, n_{0,p}}$$

- **Energia Fermiego:**

$$E_{F,n} = \frac{p_{F,n}^2}{2m_N} = \frac{(\hbar c)^2}{2m_N c^2}(3\pi n_n)^{2/3} \qquad \epsilon_{F,p} = \frac{p_{F,p}^2}{2m_N} = \frac{(\hbar c)^2}{2m_N c^2}(3\pi n_p)^{2/3}$$

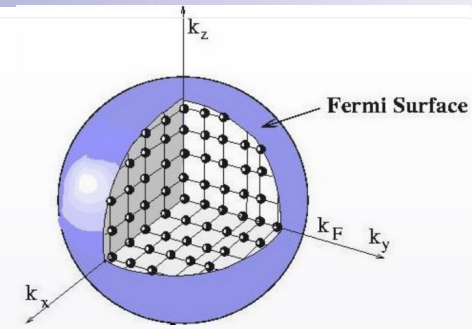
Model „gazu” Fermiego dla nukleonów

- Dostępne stany pędowe (energetyczne) w jądrze – to wszystkie stany w kuli pędów.

  W stanie podstawowym obsadzenie stanów energii kinetycznej od 0 aż do poziomu ϵ_F jest stuprocentowe:

  → **statystyka Fermiego-Diraca dla temperatury $T = 0$** wygląda tak:

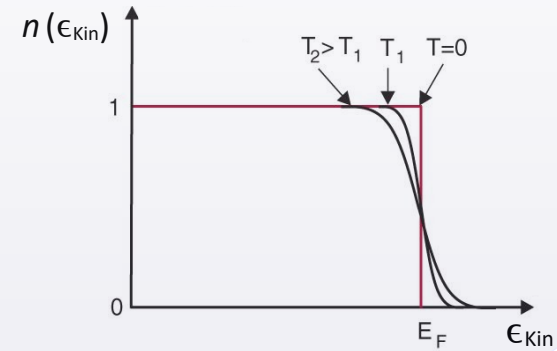
$$P(\epsilon_{Kin},\ T=0) = \begin{cases} 1 & \epsilon_{Kin} < \epsilon_F \\ 0 & \epsilon_{Kin} > \epsilon_F \end{cases}$$



- Przy zderzeniu jąder materia się podgrzewa, więc rozkład rozmywa się ku wyższym E_{Kin}.

  → **statystyka Fermiego-Diraca dla temperatury $T > 0$**:

$$P(\epsilon_{Kin},\ T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_{Kin}-\epsilon_F}{k_B T}\right) + 1}$$



- Rozdzielmy *dostępne* stany (wszystkie możliwości w kuli pędów) od kwestii, czy są one *obsadzone*, czy nie.
- Policzmy dostępność stanów przy danej ϵ_{Kin}. (Uproszczenie: wariant nukleonowy)

$$\frac{dA}{4} = \frac{V_{jądra} \cdot 4\pi p^2 dp}{h^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \epsilon_{Kin} = \dfrac{p^2}{2m_N} \\ dp = \dfrac{\sqrt{2m_N}}{2\sqrt{\epsilon_{Kin}}}\, d\epsilon_{Kin} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad dA(\epsilon_{Kin}) = \underbrace{\frac{V}{\pi^2 \hbar^3}(2m_N)^{3/2}\epsilon_{Kin}^{1/2}}_{g(\epsilon_{Kin})} \cdot d\epsilon_{Kin}$$

$g(\epsilon_{Kin})$

gęstość dostępnych poziomów energii kinet.

Model „gazu” Fermiego dla nukleonów

Gęstość $g(\epsilon_{Kin})$ dostępnych poziomów energii kinetycznej: $$dA(\epsilon_{Kin}) = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3}(2m_N)^{3/2}\epsilon_{Kin}^{1/2} \cdot d\epsilon_{Kin}$$

- Rozważmy jeszcze **średnią energię kinetyczną nukleonu** :

$$\bar{\epsilon}_{Kin} = \frac{E_{Kin}^{Total}}{A} = \frac{\int_0^\infty \epsilon_{Kin} \cdot g(\epsilon_{Kin}) \cdot P(\epsilon_{Kin})\, d\epsilon_{Kin}}{A}$$

Ile ona wynosi w $T = 0$?

$$\bar{\epsilon}_{Kin}(T=0) = \frac{1}{A}\int_0^{\epsilon_F} \epsilon_K \cdot g(\epsilon_K)\, d\epsilon_K = \left| \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_N}\left(\frac{3\pi^2}{2}\frac{A}{V}\right)^{2/3} \Rightarrow g(\epsilon) = \frac{3A}{2\epsilon_F^{3/2}}\epsilon_{Kin}^{1/2} \right| = \frac{3}{5}\epsilon_F = \mathbf{22{,}2\ MeV}$$

- Przy $T > 0$ nie ma odgórnego limitu energii (dziedziną jest [0, ∞]).

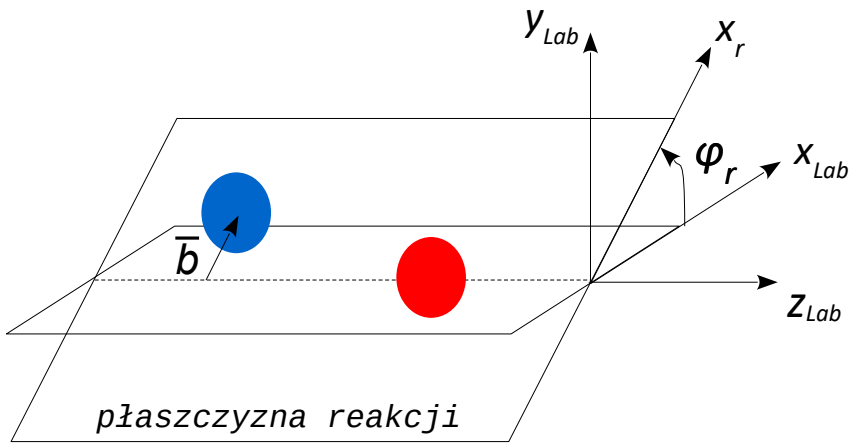
Ale jest sens pytać, jak $\bar{\epsilon}_{Kin}$ wzrasta z *temperaturą*. Znajdziemy to, dyskutując przejście fazowe ciecz-gaz.

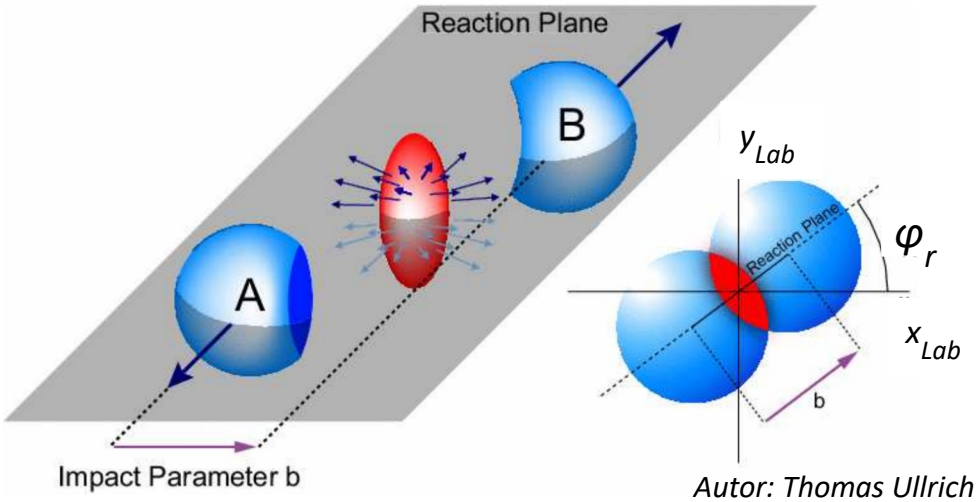
- A jak $\bar{\epsilon}_{Kin}$ wzrasta z *koncentracją* n ? → Tak jak ϵ_{Fermi} , czyli:

$$\bar{\epsilon}_{Kin} \sim n^{2/3}$$

Konwencja układu odniesienia

- Środki jąder w stanie początkowym definiują **płaszczyznę reakcji** (reaction plane, RP).
  Układ odniesienia: oś Z zgodna z biegiem wiązki, X w płaszczyźnie, Y prawoskrętnie.
  Wobec układu Lab, płaszczyzna reakcji przekręcona jest o kąt φ_r .
  Parametr zderzenia (impact parameter, *b*) : $\perp$ składowa wektora odległości między środkami jąder na początku.





Autor: Thomas Ullrich

- Krótkozasięgowość sił jądrowych $\rightarrow$ reakcja zachodzi $\sim$ przy stykających się jądrach
  $\rightarrow$ b $\sim$ kilka(naście) fm

  W eksperymentach nie kontrolujemy ani parametru *b*, ani kąta φ_r (zachodzą wszystkie możliwości).

  Jeżeli w danych znajdziemy zmienne korelujące z *b* i φ_r , to $\forall$ eventu możemy rekonstruować te wielkości z pewną dokładnością.

  Brak rekonstrukcji φ_r $\rightarrow$ jakiekolwiek sygnały w tej zmiennej się zacierają do rozkładu izotropowego.

- Opis cząstki przez czterowektory, np.: położenia, czteropędu

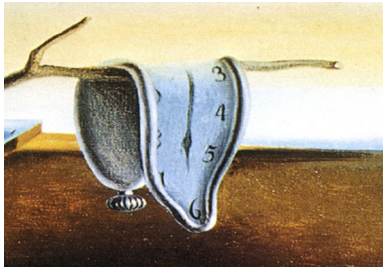
$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c},\ \vec{p}\right)$$

gdzie: $E = \gamma mc^2$, $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

i wprowadza się: $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\vec{\beta} \equiv \vec{v}/c$

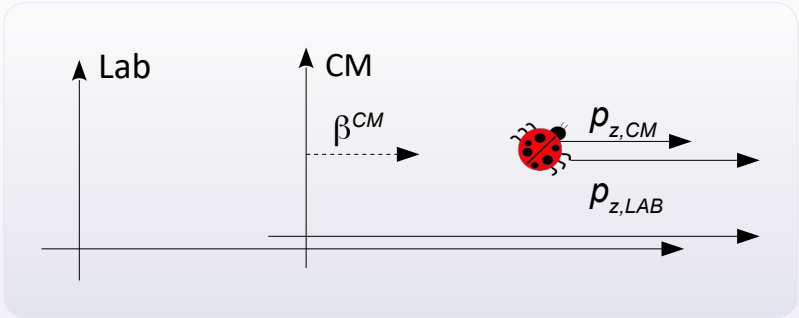
- Wówczas: $\gamma = \frac{E}{mc^2}$, $\vec{\beta} = \frac{c\,\vec{p}}{E}$

- Nb. $T = E - mc^2 = (\gamma - 1)\ mc^2$



- Przejście między układami współrzędnych: *Transformacja Lorentza* (*boost*)

$$\begin{cases} E_{Lab} = \gamma^{CM}\left(E_{CM} + \beta^{CM}\, cp_{z,CM}\right) \\ cp_{z,Lab} = \gamma^{CM}\left(cp_{z,CM} + \beta^{CM}\, E_{CM}\right) \\ cp_{x/y,Lab} = cp_{x/y,CM} \end{cases}$$



Pęd poprzeczny: $p_T \equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ (niezmiennik)

Częsta notacja: c = 1, [m] = [p] = [E] (= MeV , GeV, …)

- Opis cząstki przez czterowektory, np.: położenia, czteropędu

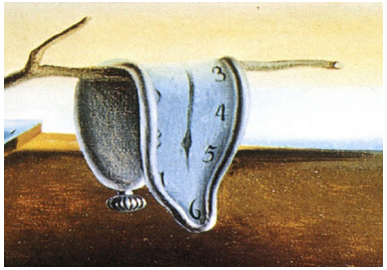
$$p^{\mu} = (E, \vec{p})$$

gdzie: $E = \gamma m$, $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

i wprowadza się: $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\vec{\beta} \equiv \vec{v}$

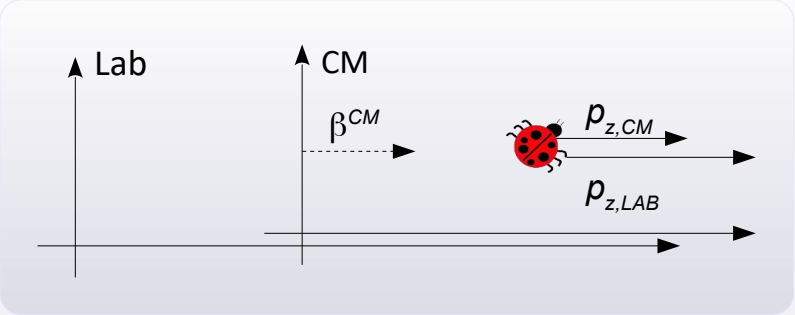
- Wówczas: $\gamma = \frac{E}{m}$, $\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}$

- Nb. $T = E - m = (\gamma - 1)\, m$



- Przejście między układami współrzędnych: *Transformacja Lorentza* (*boost*)

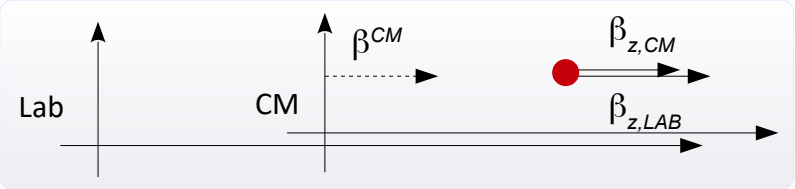
$$\begin{cases} E_{Lab} = \gamma^{CM} \left(E_{CM} + \beta^{CM} \; p_{z,CM} \right) \\ p_{z,Lab} = \gamma^{CM} \left(p_{z,CM} + \beta^{CM} \; E_{CM} \right) \\ p_{x/y,Lab} = p_{x/y,CM} \end{cases}$$



Pęd poprzeczny: $p_T \equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ (niezmiennik)

Pospieszność = Rapidity

- Transformacja *Galileusza* : *v* dodają się liniowo.
  Transformacja *Lorentza* : nieliniowo.

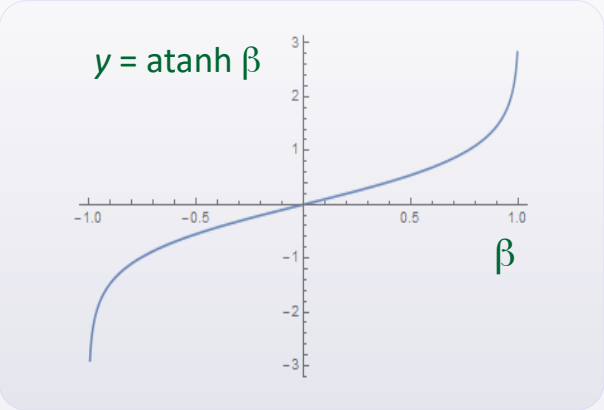


$$\beta_{z,Lab} = \frac{\beta_{z,CM} + \beta^{CM}}{1 + \beta_{z,CM}\beta^{CM}}$$

, przy czym $\beta_i \in [-1,\ 1]$

Idea: przekształcenie rozciągające [-1, 1] w [-∞, ∞] .

$$y \equiv atanh(\beta)$$



(tożsamość)

$$y_z \equiv atanh(\beta_z) \equiv \frac{1}{2}\ \ln \frac{1 + \beta_z}{1 - \beta_z}$$

Przy czym:

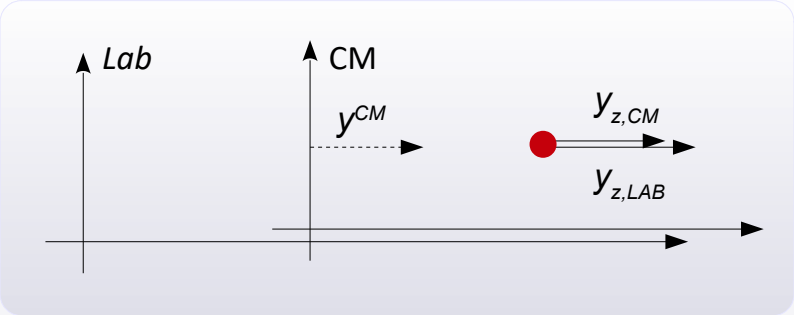
$$\frac{E + p_z c}{E - p_z c} = \frac{\gamma mc^2 + \gamma m\beta_z c^2}{\gamma mc^2 - \gamma m\beta_z c^2} = \ldots = \frac{1 + \beta_z}{1 - \beta_z}$$

$$y_z = \frac{1}{2}\ \ln \frac{E + p_z}{E - p_z}$$

- Jak **transformuje** się taka „rozciągnięta” prędkość?

$$y \equiv atanh(\beta) \quad \longrightarrow \quad \beta \equiv \tanh y$$

Tożsamość: $$\frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} = \tanh(a + b)$$



- Transformacja β:

$$\beta_{z,Lab} = \frac{\beta_{z,CM} + \beta^{CM}}{1 + \beta_{z,CM}\beta^{CM}}$$

$\tanh(y_{z,Lab})$ $\qquad$ $\tanh(y_{z,CM} + y^{CM})$

Transformacja *y*: $$y_{z,Lab} = y_{z,CM} + y^{CM}$$

Pospieszność:

- transformuje się liniowo
- zakres $y \in [-\infty, \infty]$
  (nb. ruch „wstecz” $\Leftrightarrow$ $y < 0$)
- w granicy nierelatywistycznej $\rightarrow$ β

jak v nierelatywistyczna!

- **„Masa poprzeczna”** :

$$m_T \equiv \sqrt{p_t^2 + m^2}$$

(niezmiennik Transformacji Lorentza)
Uwaga: ta zmienna zaczyna się od *m*.

„Zredukowana m_T” :

$$m_T - m \equiv \sqrt{p_t^2 + m^2} - m$$

(porównując do E_{Kin}, widzimy, że jest to „poprzeczna energia kinetyczna”)

- **„Zredukowana pospieszność”** :

$$y_0 \equiv \frac{y - y_{CM}}{y_{CM}}$$

Dla fixed-target, jądra symetryczne:

$y = 0$ (posp. tarczy) $\rightarrow$ $y_0 = -1$
$y = y_{CM}$ (*midrapidity*) $\rightarrow$ $y_0 = 0$
$y = y_{Beam}$ $\rightarrow$ $y_0 = +1$

- **Tożsamości relatywistyczne**:

$$\begin{cases} E = m_T \cdot ch\, y_z \\ p_z = m_T \cdot sh\, y_z \end{cases}$$

- **Różniczkowy element pędu w dwóch układach**:

$$dp^3 = dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z = dp_x \cdot dp_y \cdot \left(E \cdot dy_z\right)$$

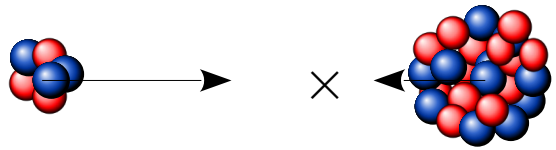
$$\frac{dp^3}{E} = dp_x \cdot dp_y \cdot dy_z$$

(niezmiennik transformacji Lorentza!)

Układ Lab a układy CM

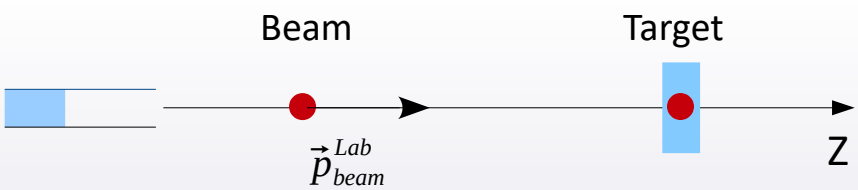
- Definiujemy **układ środka masy (CM)** jako taki, w którym $\sum_i \vec{p}_{i,CM} = \vec{0}$
- CM AA (jądro-jądro) vs CM NN („średnich” dwóch nukleonów) : Dla jąder identycznych układy są tożsame. Ale nie dla jąder o różnych rozmiarach:

CM AA

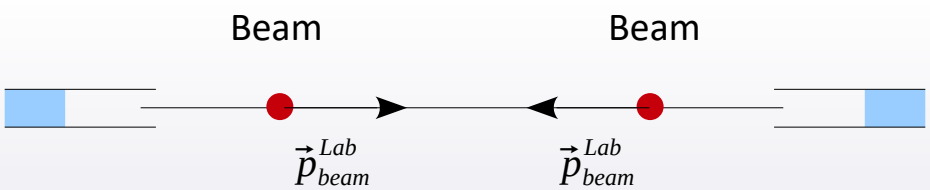


CM NN

- Dwie odmienne sytuacje eksperymentalne:



Układ stacjonarnej tarczy / Fixed target



Układ wiązek przeciwbieżnych / Collider

Lab = CM AA

- Układ **Fixed target:** prędkość i pospieszność środka układu CM w układzie Lab:

$$\vec{\beta}^{CM} = \frac{\sum_i \vec{p}_{i,Lab}}{\sum_i E_{i,Lab}} \quad \Rightarrow \quad y_Z^{CM} = atanh\left(\beta_Z^{CM}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta_Z^{CM}}{1-\beta_Z^{CM}}$$

Całkowity przekrój czynny σ

- W ujęciu geometrycznym: *punktowe* pociski nakierowane na przeszkody o przekroju koła

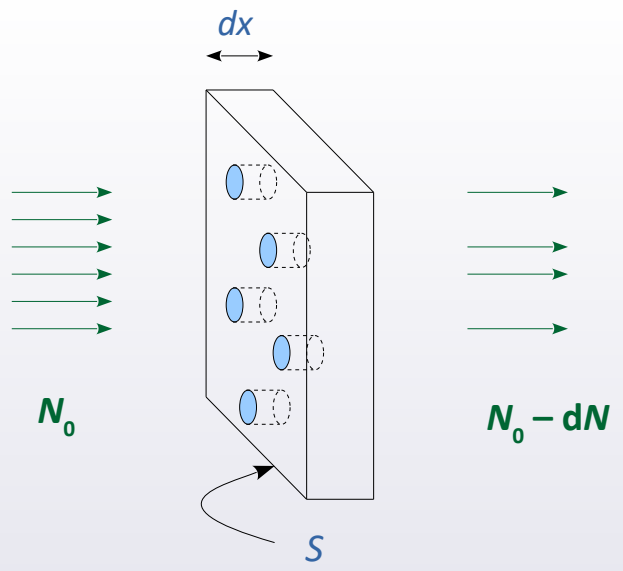
$$\begin{cases} \dfrac{-dN}{N_0} = \dfrac{dS}{S} \\ dS = \sigma \cdot dN_{tarcza} \end{cases}$$

Zał.: cienka tarcza

Przekrój ⊥ 1 centrum

$n_{tarcza} \cdot S\, dx$

N_0 : pierwotna liczba pocisków wiązki (w j. czasu)
dN : liczba pocisków „usuniętych” z wiązki (w j. czasu)
σ : przekrój poprzeczny 1 centrum rozpraszającego
n : koncentracja centrów w tarczy



- $$dN = -N_0 \cdot n_{tarcza} \cdot \sigma \cdot dx$$

$$N(x) = N_0 \cdot \exp(-n_{tarcza} \cdot \sigma \cdot x)$$

- *Uwaga*: $\sigma \sim$ prawdopodobieństwo usunięcia z wiązki

Odniesienie do rozproszeń i zderzeń jąder:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{\text{Elastyczne}} + \sigma_{\text{Reakcja}}$$

- Dla $\sigma_{\text{Reakcja}} = S_{\text{jądra}}$, $\sigma_{\text{Reakcja}} \approx \pi R^2_{\text{jądra}} = \pi (r_0 A^{1/3})^2$

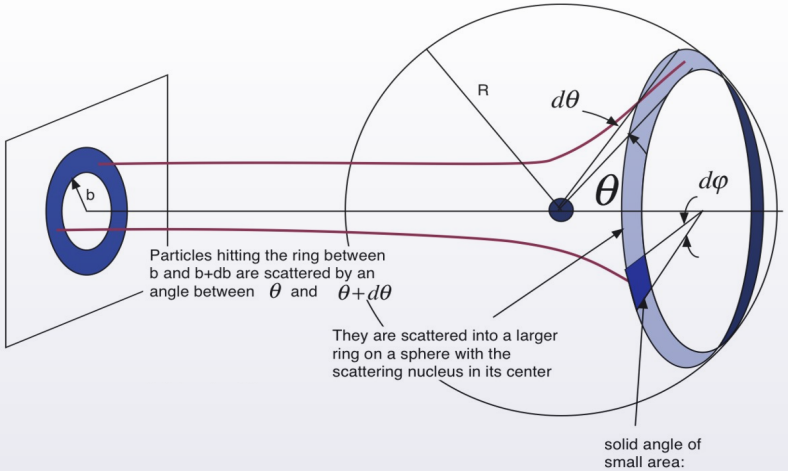
r_0 = 1.12 fm . Jeśli A = 120, $\sigma_{\text{Reakcja}} = 1.1 \times 10^{-28}\ \text{m}^2 \equiv 1.1\,\text{b}$ (barn)

Rozpraszanie. Różniczkowy przekrój czynny

- Różniczkowy przekrój czynny:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{dN_{out}/d\Omega}{dN_{in}/dS_{wiązki}} \quad , \quad \sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\text{liczba cząstek rozproszonych w jednostkowy kąt bryłowy / 1s}}{\text{liczba cząstek padających na jednostkę pow. tarczy / 1s}}$$



Źródło: hep.physics.wayne.edu/~harr/courses/5210/w15/lecture29.htm

- Jeżeli każda cząstka padająca się rozprasza,

$$dN_{in} = dN_{out} \quad \Rightarrow \quad d\sigma = dS_{wiązki} \quad \Big\} \quad dS_{wiązki} = 2\pi\, b\, db \quad \Big\}$$

- Zwykle w eksperymentach: kąt φ_r w Lab – przypadkowy. Bez rekonstrukcji – rozkład φ_r się zaciera.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dS_{wiązki}}{d\Omega} = \frac{2\pi\ b\,db}{2\pi\ \sin\theta\, d\theta} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

$\theta = f(b)$: „**funkcja odchylenia**” .
Zawiera informacje o oddziaływaniach

Rozpraszanie na dwóch kulach

- *Przykład jest instruktywny przy zderzeniach AA, mimo ogromnego uproszczenia. Wszystkie pociski w polu ⊥ wiązki = σ , zostaną z niej usunięte.*

- Z zależności geometrycznych (por. dolny rys.) :

$$b = R\sin\alpha = R\cos\frac{\theta}{2}$$

(funkcja odchylenia)

- Podstawiamy do wzoru na $d\sigma/d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \ldots = \frac{R^2}{4} \qquad \frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

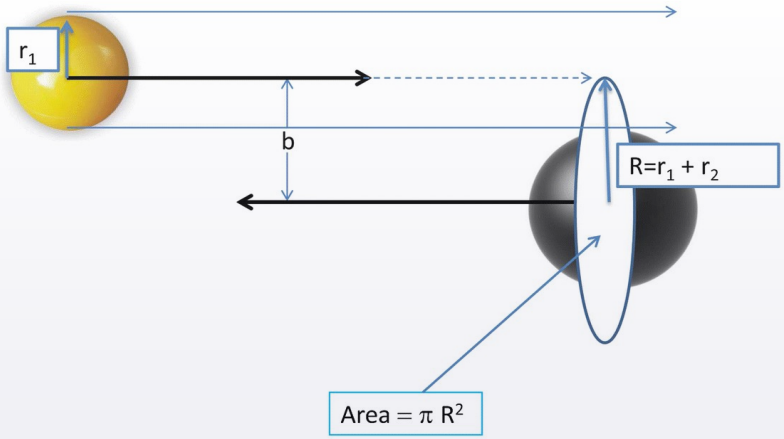
(wynik ≠ f(θ) → emisja izotropowa!)

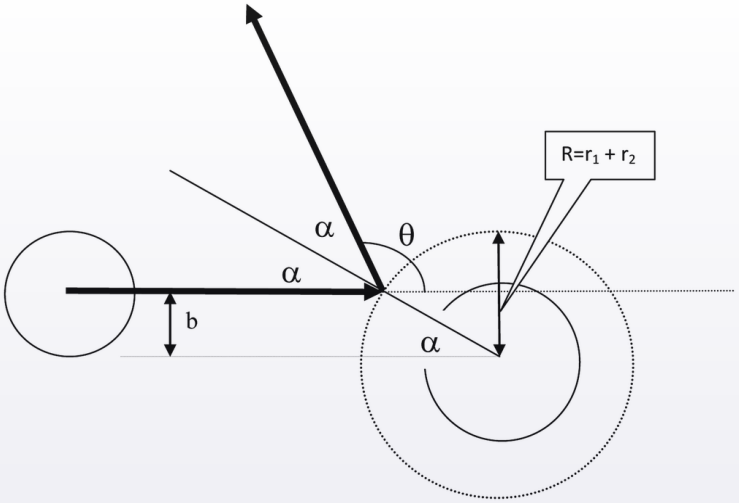
- $$\sigma = \int_0^{4\pi}\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \int\frac{R^2}{4}d\Omega = \pi R^2 = \pi(r_1+r_2)^2$$

- Alternatywnie: całkowanie po parametrach *b* „biorących udział w zderzeniu”

$$\sigma = 2\pi\int_0^{b_{max}} b\,db = \pi b_{max}^2$$

$$\Rightarrow \quad b_{max} = r_1 + r_2$$





Źródło: pubs.rsc.org/en/content/chapterhtml/2015/bk9781849738309-00001

Zajście zderzenia

- Wpływ pola Coulomba na zderzenie jąder

  Przekrój czynny na reakcję

- Centralność zderzenia
  - Model geometryczny
  - Model Glaubera
- Prawdopodobieństwo zderzenia w tarczy

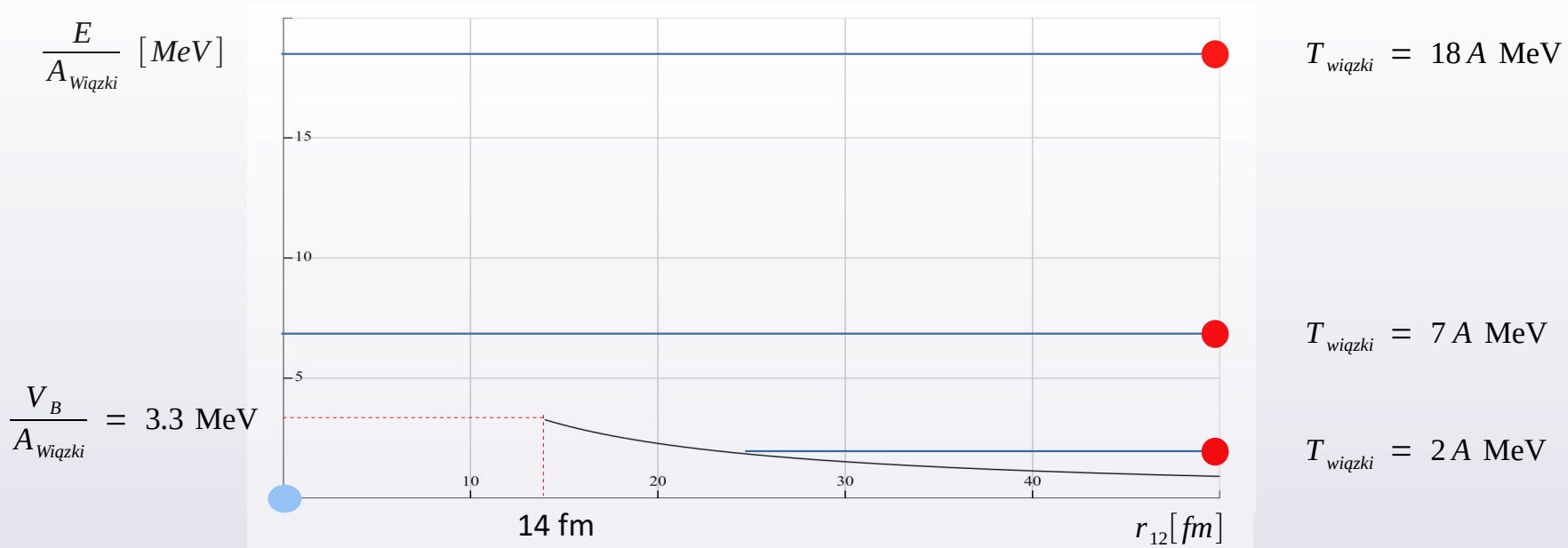
Wpływ pola Coulomba na zderzenie jąder

- Zderzające się jądra muszą pokonać ***barierę kulombowską*** (V_B = En. pot. pola Coulomba na odległości = stykowi jąder)

Energia potencjalna pola Coulomba: $V_{Coulomb}(r_{12}) = \dfrac{ke^2 Z_1 Z_2}{r_{12}}$, r_{12} : odległość między środkami

Promień jądra (w przybliżeniu): $r(A) = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1.2$ fm

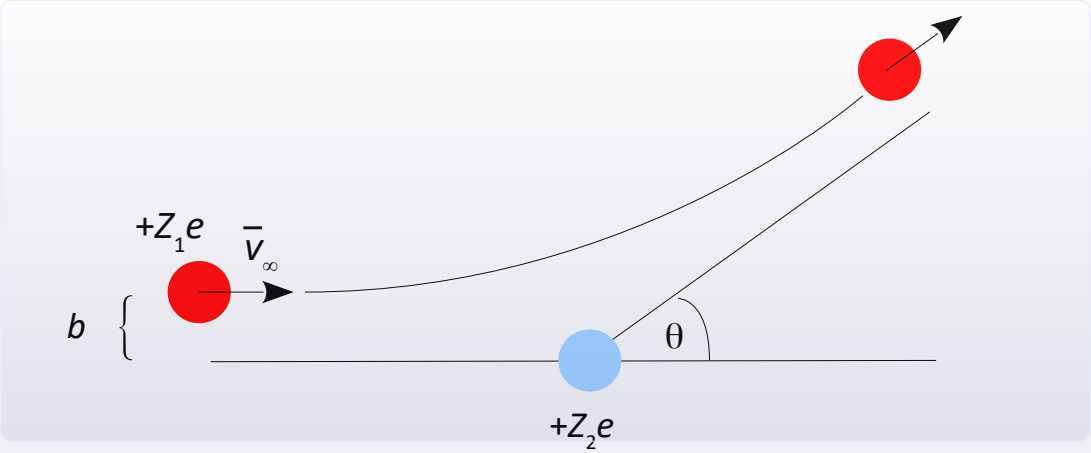
- Np. dla zderzeń $^{197}_{79}Au$ z $^{197}_{79}Au$: $r_{Au} + r_{Au} \approx 14\,fm$

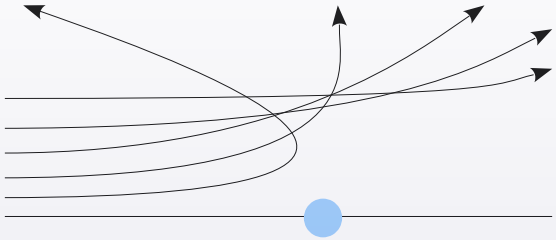


W zderzeniach jąder $V^{Coulomb} \lesssim 5A$ MeV. Przy $T_{wiązki} \sim 50A$ MeV, jest już tylko niewielkie osłabienie prędkości.

Rozpraszanie Rutherforda w polu kulombowskim

- W ujęciu klasycznym:





Hamiltonian z $V \sim \frac{Z_1 Z_2}{r}$ → $\theta(b) = 2\ atan\ \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{b \cdot \mu\, v_\infty^2}$, μ : masa zredukowana

por. wykład o reakcjach, s. 20-22

Kąt rozproszenia θ monotonicznie maleje z b !

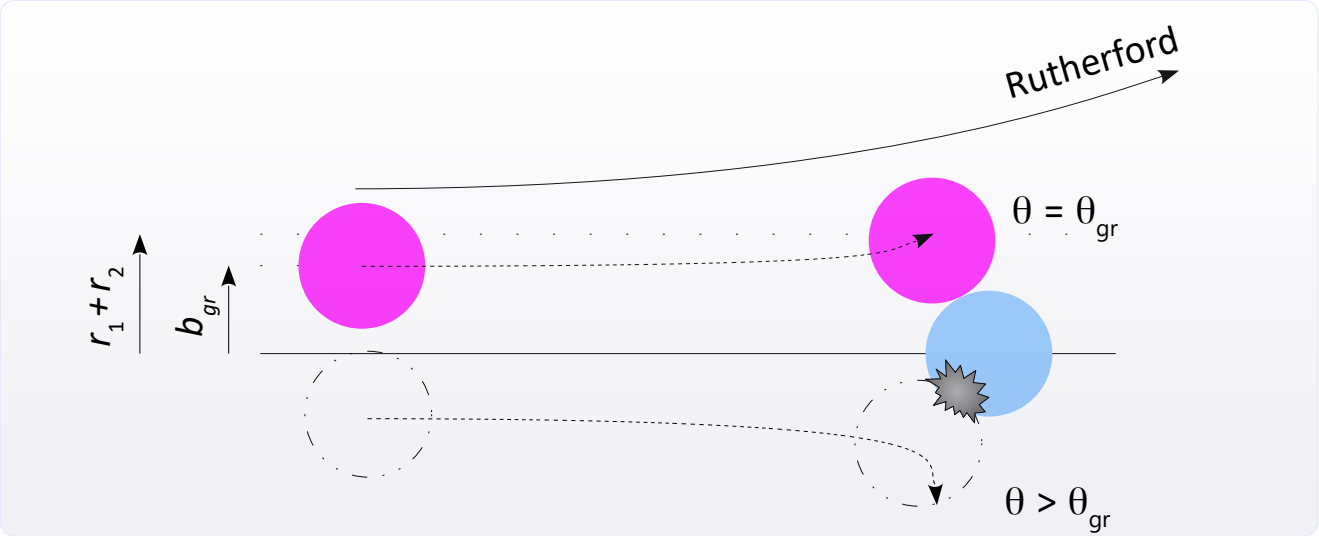
Cząstka o wysokim b → niewielkie odchylenie.

→ $$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = \left(\frac{k Z_1 Z_2 e^2}{4 E_{Kin}^{CM}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$, gdzie $E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$

⇧ Cząstki o wysokich E_{Kin} „odczują” niewiele ($\sim 1/E_{Kin}^2$)

- $$\int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega = \infty$$ Każda cząstka w wiązce „odczuje” to oddziaływanie.

Przekrój czynny na reakcję

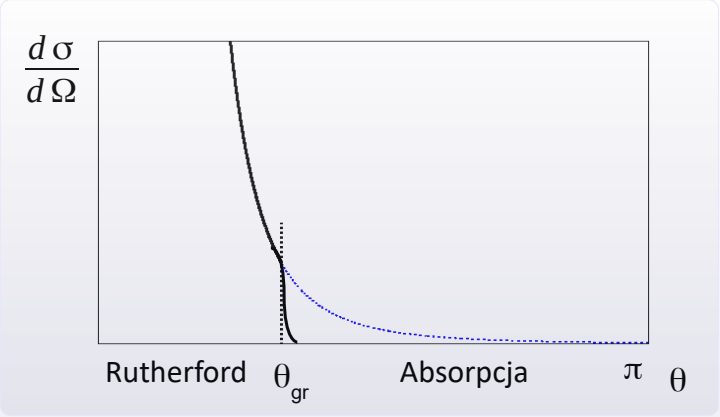


- ***Model silnej absorpcji***:

$$\theta \in [0,\ \theta_{gr}]\ : \qquad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{rozp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} \qquad (\Delta\sigma_r = 0)$$

$$\theta \in [\theta_{gr},\ \pi]\ : \qquad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{rozp} = 0$$

(wszystkie cząstki, które by się rozproszyły, dokładają się do $\sigma_{Reakcja}$)



θ_{gr} : ***"grazing angle"***

Przekrój czynny na reakcję c.d.

- $$\sigma_{\text{Reakcja}} = \int_{\Delta\Omega} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} d\Omega = 2\pi \cdot \int_{\theta_{gr}}^{\pi} \left(\frac{k Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \cdot \sin\theta\, d\theta = \ldots$$

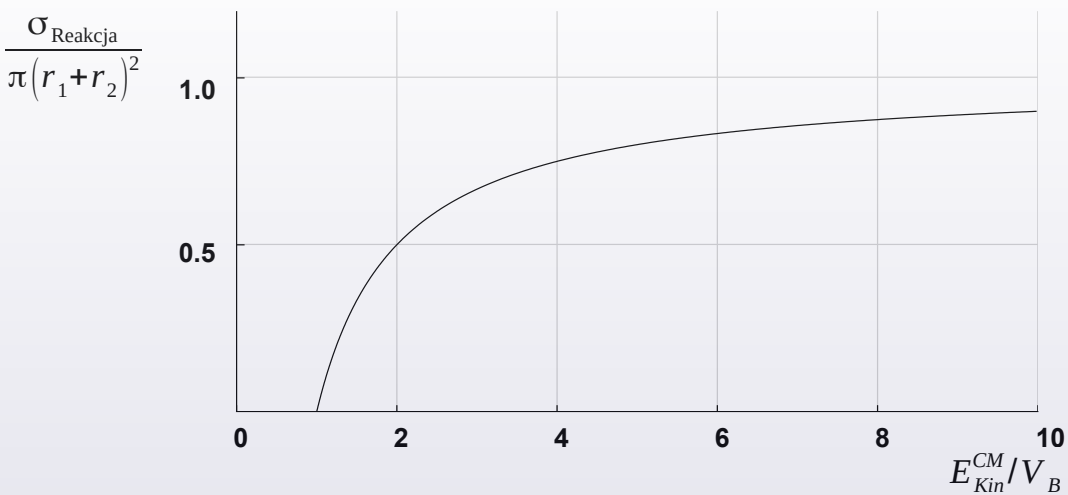
  por. wykład, s. 20-22

$$\sigma_{\text{Reakcja}} = \underbrace{\pi\left(r_1 + r_2\right)^2}_{\text{Zderzenie kul}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{V_B}{E_{Kin}^{CM}}\right)}_{\text{Poprawka}}$$

, gdzie : $E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2$, $\underbrace{V_B = k\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_1 + r_2}}_{\text{E pot. bariery Coulomba}}$

- Ale $r \sim A^{1/3}$ → $\sigma_{\text{Reakcja}} \sim \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)^2$

- $\sigma_r = f(E)$: *„funkcja wzbudzenia"* (*"excitation function"*)



- Reakcja możliwa tylko dla $E_{Kin}^{CM} > V_B$

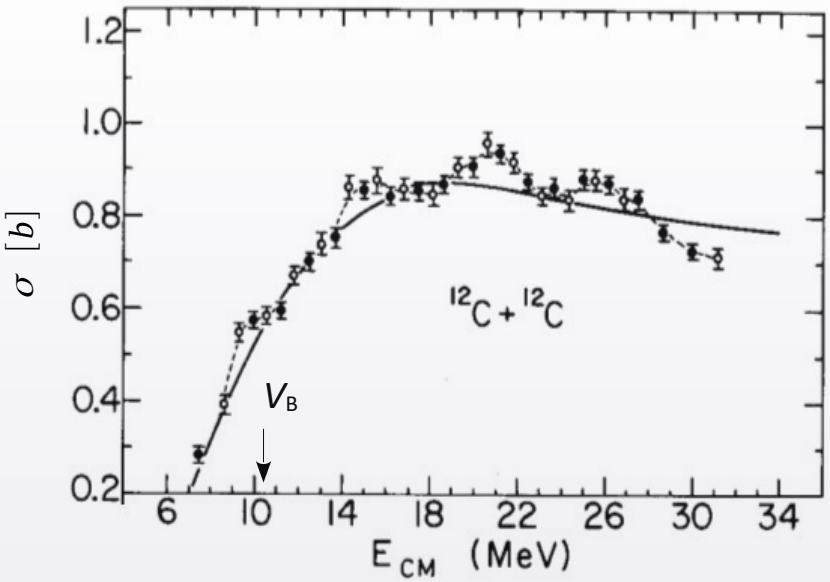
- Poprawka < 1:

  jony o $b \lesssim b_{gr}$,
  zanim dolecą do jądra tarczy,
  nieco się odchylą.

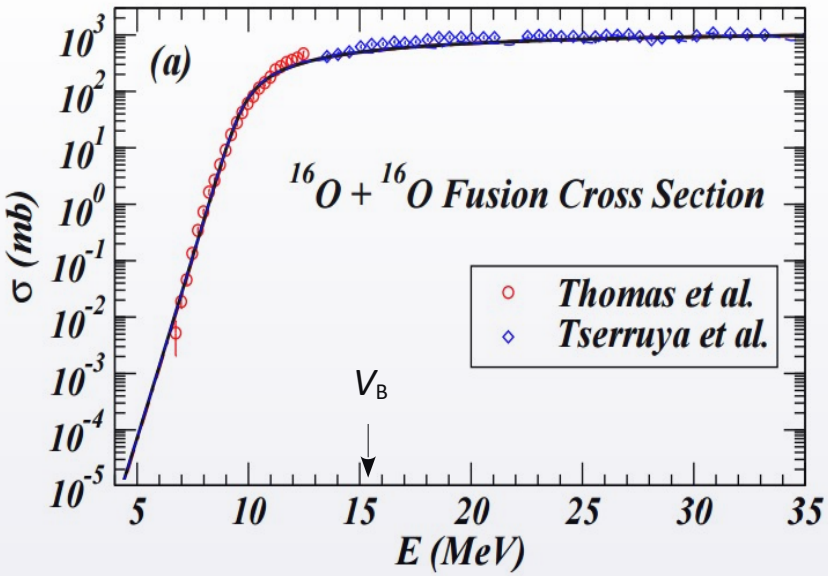
  → część uniknie absorpcji.

Przekrój czynny na reakcję: wyniki pomiarów

- Wykresy: **doświadczalne przekroje czynne na fuzję** (niskie energie kinetyczne wiązki)



C.Y.Wong, Phys.Rev.C 86, 064603 (2012)



Objaśnienie osi X: E_{CM} lub E $\equiv$ T_{Beam} w CM (nie na 1 nukleon)

- *Spostrzeżenie*: Przy $E \sim$ kilka MeV, $\sigma(E)$ narasta i nasyca się do: $\pi(r_1+r_2)^2$

Wykres $^{12}C + ^{12}C$ (skala liniowa) : wzrost $\approx$ poprawka Coulomba

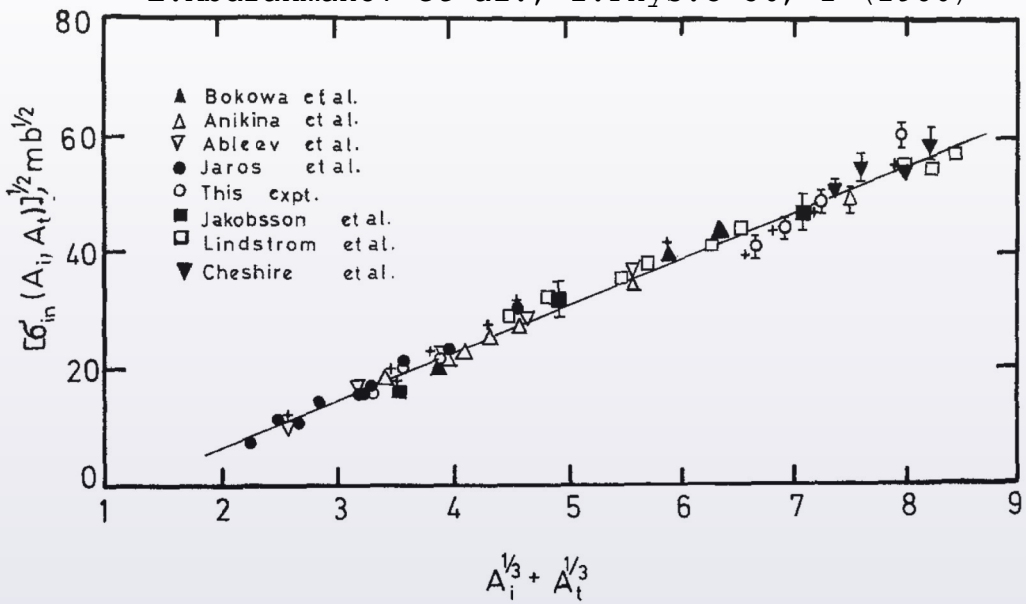
Wykres $^{16}O + ^{16}O$ (skala log!) : istnienie fuzji przy $E < V_B$ – to kwantowy efekt tunelowania przez barierę Coulomba.

Przekrój czynny na reakcję: wyniki pomiarów

- Przechodzimy do energii relatywistycznych. Tu $E \gg V_B$. Spodziewamy się, że $\sigma_{\text{Reakcja}} \rightarrow \approx \pi\left(r_1 + r_2\right)^2$

- Sprawdźmy to. Dane eksperymentalne ze zderzeń różnych jąder przy p_{Beam} = 4.2 A GeV/c.

E.Abdrahmanov et al., Z.Phys.C 56, 1 (1980)



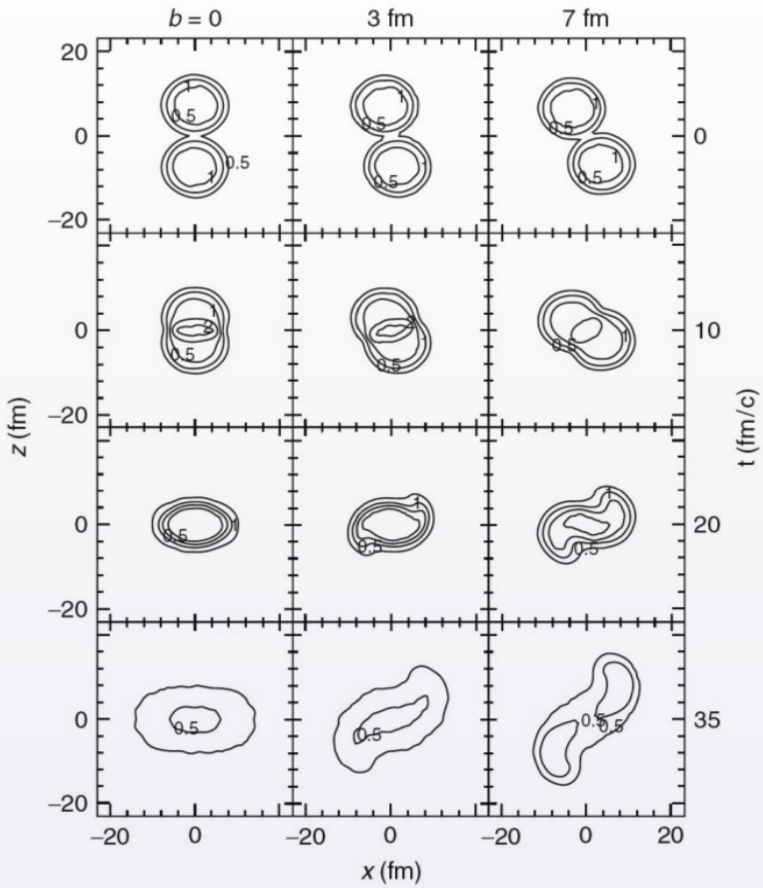
- Wykres sprawdza liniowe skalowanie $\sqrt{\sigma}$ od $A_1^{1/3} + A_2^{1/3}$

  Prosta to dopasowanie: $\sigma = \pi R_0^2 \left[A_1^{1/3} + A_2^{1/2} - b\right]^2$

  Wynik: $R_0 = 1.48 \pm 0.03 \ fm$, $b = 1.32 \pm 0.05$ … niemal jak przekrój na zderzenie kontaktowe kul!

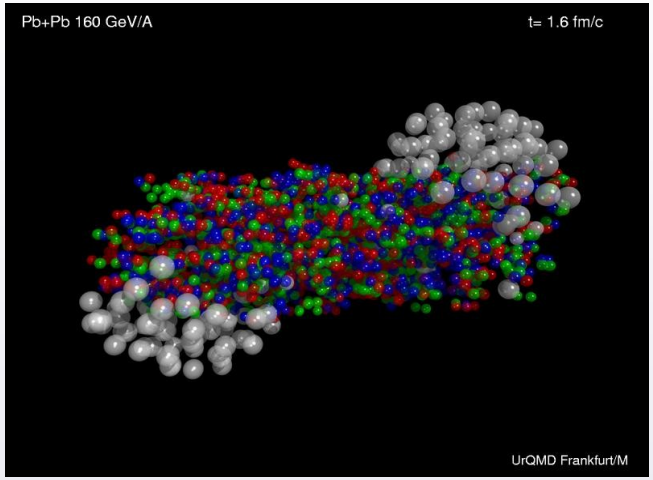
Model geometryczny participants-spectators

- Symulacja zderzenia Au+Au przy T_{Beam} = 0.4*A* GeV dla trzech różnych parametrów zderzenia (model BUU)



P. Danielewicz, Phys. Rev. C 51, 716 (1995)

- Symulacja zderzenia Au+Au przy T_{Beam} = 160*A* GeV Zderzenie o pośrednim *b* (model UrQMD)



urqmd.org

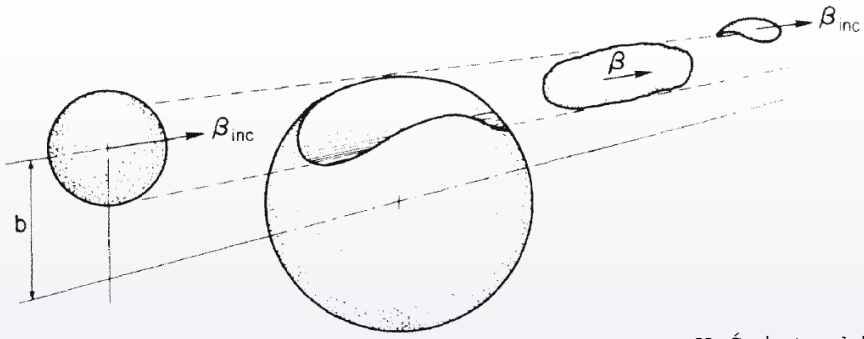
Kule białe : hadrony
Kule kolorowe : kwarki i gluony

Wyodrębnione strefy nukleonów:

uczestników (participants) i **obserwatorów (spectators)**

Model geometryczny participants-spectators

- **Model geometryczny**
  "participants-spectators"
  (1976/77)



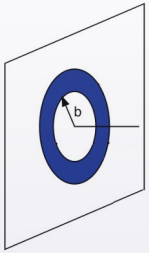
Jądra to jednorodne kule.
Zderzają się przy parametrze zderzenia *b*
$\longrightarrow$ przekrycie zbliżone do walca.
Powstaje "*fireball*" / "*collision zone*" (*strefa zderzenia*).

W.Świątecki (1976) unpublished
J.Gosset et al., Phys. Rev. C 16, 629 (1977)
G.D.Westfall et al., Phys.Rev.Lett. 37,1202(1976)

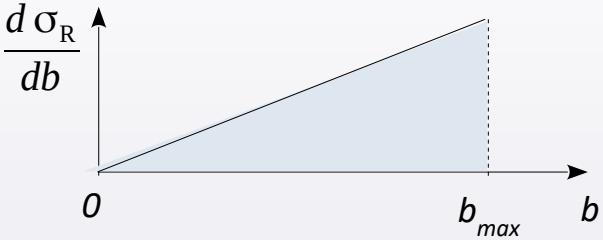
- **Partycypanci** (nukleony uczestniczące w zderzeniu) - vs - **spektatorzy** (widzowie).
  Dla jąder identycznych ($2 \cdot A$ nukleonów) o promieniach *R* każde, w zderzeniu przy param. *b* liczba partycypantów (A_{part}) :

$$A_{part}(b) = 2A \cdot \left[1 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 3\right)\frac{b}{2R} + \left(3 - 2\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)\left(\frac{b}{2R}\right)^3\right]$$

- W eksperymencie nie możemy zafiksować *b*. Realizują się wszystkie $b \in (0, b_{Max})$.
  W modelu geometrycznym rozkład $d\sigma/db$ ma kształt ostrego trójkąta.



$$d\sigma = 2\pi b\, db$$

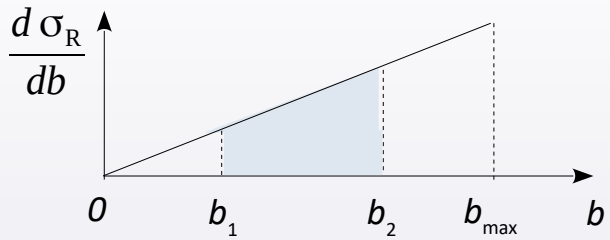


- Całkowity przekrój czynny:

$$\sigma_R = \pi b_{max}^2 = \pi\left[r_0\left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3}\right)\right]^2$$

Model geometryczny participants-spectators

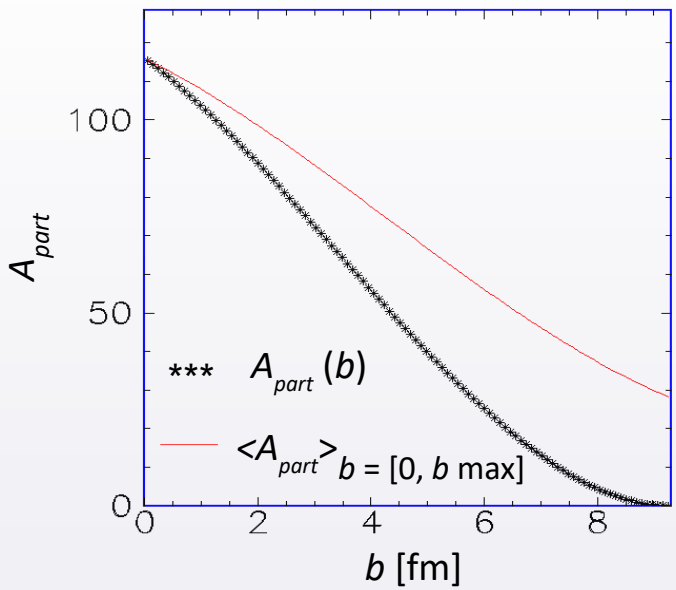
- Przypuśćmy, że można wybrać przedział $b \in (b_1, b_2)$. ⇔ w modelu geometrycznym oznacza to przedział A_{part}.



Wartość średnia:

$$\langle A_{part} \rangle_{b \in [b_1, b_2]} = \frac{1}{\int_0^{b_{max}} 2\pi b\, db} \cdot \int_{b_1}^{b_2} A_{part}(b)\; 2\pi b\, db$$

- **Przykład:** zderzenie ^{58}Ni + ^{58}Ni



- Np. dla zderzeń przy $b \in [0, 5]$ fm

A_{part} (0 fm) = 116 $\langle A_{part} \rangle_b$ = 67

A_{part} (5 fm) = 40

- Ok, ale co w eksperymencie naprawdę będzie świadczyć o parametrze b lub liczbie A_{part} ?

⇨ istnieją obserwable „**proxy**”, silnie skorelowane z b.

Q: Jak one wyglądają ?

Jak kontrolować centralność zderzenia?

- **Obserwacja**: im zderzenie centralniejsze ($b \to 0$) , tym więcej cząstek wybija się poza linię wiązki (w wyższe kąty θ) .

- Np. zderzenia Ni + Ni przy T_{Beam} = 1.9*A* GeV:

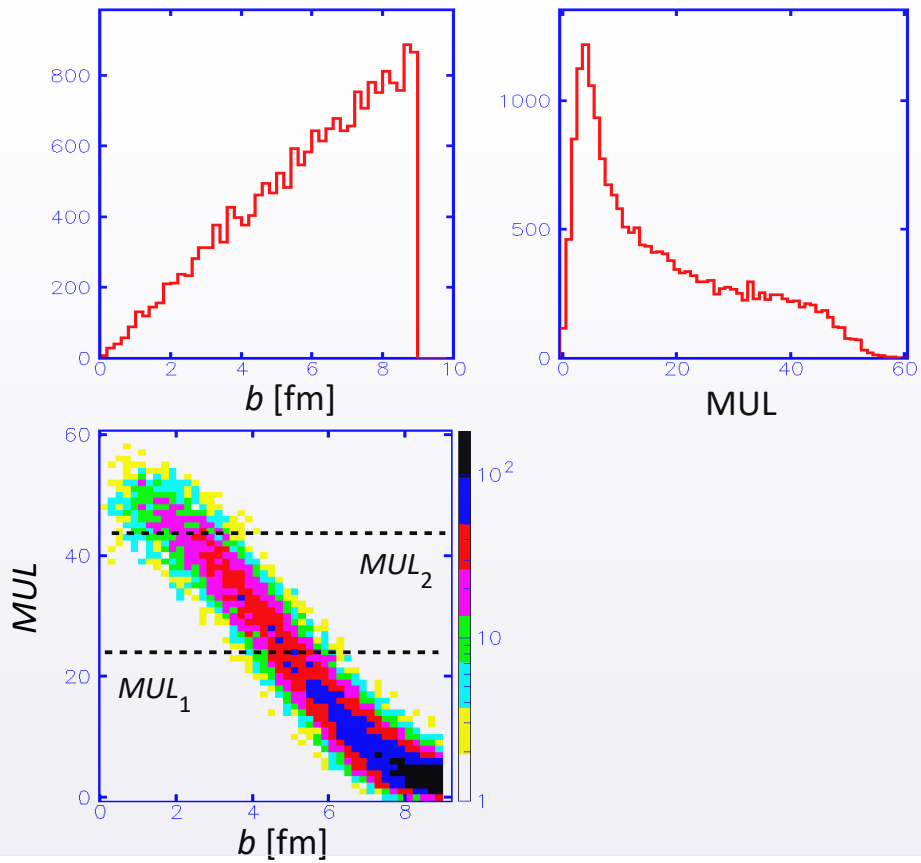
  Symulacja. Model zderzenia : IQMD ,
  Układ doświadczalny : FOPI ,
  Symulator układu : GEANT

  „MUL" = krotność cząstek naładowanych wyemitowanych w kąty
  $\theta_{LAB} \in [\, 7^\circ , 100^\circ \,]$.

- $$\int_{b_1}^{b_2} 2\pi b\, db \;\; \overset{\Delta\sigma_r}{=} \;\; \sim \int_{MUL_1}^{MUL_2} dMUL$$

- $$\textbf{Centralność } [C_1 \;\ldots\; C_2] \;\; \% \;=\; \frac{\sum_{MUL_1}^{MUL_2} dMUL}{\sum MUL}$$

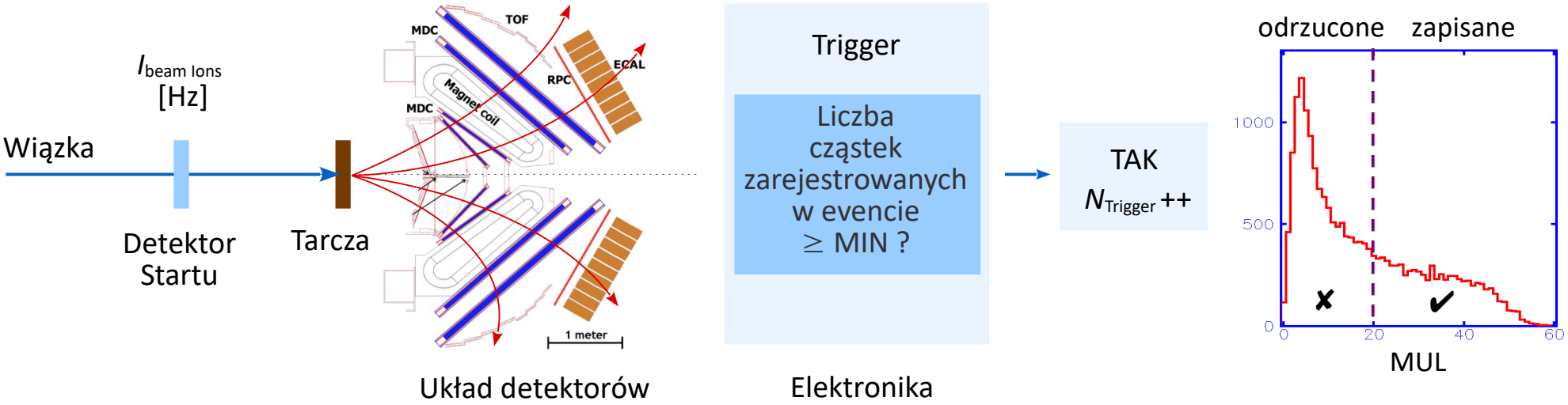
W eksperymencie można zażądać, aby układ np. rejestrował zdarzenie $\Leftrightarrow$ $MUL \in [M_1 \ldots M_2]$
Zadanie to spełnia elektroniczny *układ* ***trygera***.



Nazewnictwo: zderzenia **centralne**, **semi-centralne**, **peryferyjne...**

Tryger centralności

- Częścią elektroniki jest **tryger centralności** , pozwalający narzucić minimalne akceptowalne *MUL*. (Szkic poglądowy)



- Przed tarczą: ***detektor startu*** rejestruje N_{Beam} jonów wiązki.
- Przechodząc przez tarczę, jony mają szansę na reakcję P_{Int} . Czyli: $N_{\text{Beam}} \cdot P_{\text{Int}}$ = tyle zajdzie zderzeń w tarczy.
- Akceptację trygera centralności przechodzi N_{Trigger} zdarzeń.

$$\frac{N_{\text{Trigger}}}{N_{\text{Beam}} \cdot P_{\text{Int}}} = \text{Centralność [\%]} \approx \frac{\Delta\sigma\ (b = [0, b_{\text{Limit}}])}{\sigma_{\text{R}}} \approx \frac{\pi b_{\text{Limit}}^2}{\pi\left[r_0\left(A_B^{1/3} + A_T^{1/3}\right)\right]^2}$$

- *Uwaga*: szkic jest poglądowy. Nie uwzględnia czasu martwego („**dead time**”). Przyczyna: zapis na dysku ma limit przepustowości. Aby nie zatkać dysku, po nadejściu sygnału blokuje się możliwość zapisu na pewien czas. Upraszcza też działanie trygera. Często jest to tryger analogowy, oparty o wysokości sygnału napięciowego.

Doświadczalny przekrój czynny dla klasy centralności

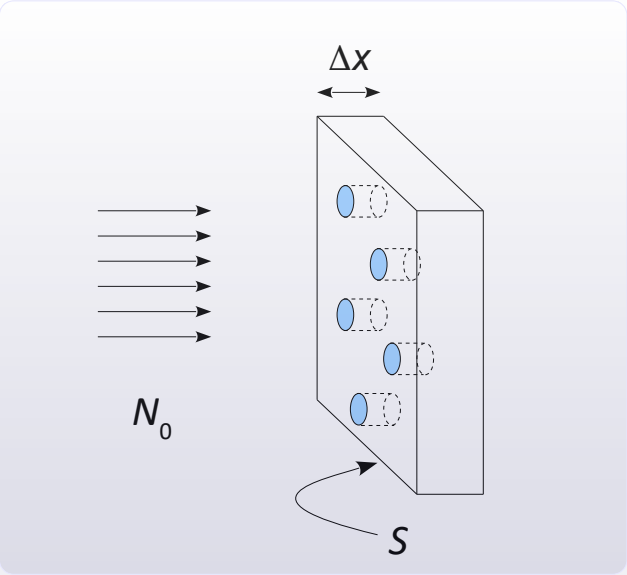
- W ramach modelu np. geometrycznego możemy frakcję zaakceptowanych eventów „przetłumaczyć” na przedział parametrów b (lub liczby A_{part}) .

$$\frac{N_{\text{Trigger}}}{N_{\text{Beam}} \cdot P_{\text{Int}}} = \text{Centralność [\%]} \approx \frac{\Delta\sigma\ (b = [0, b_{\text{Limit}}])}{\sigma_{\text{R}}} \approx \frac{\pi b_{\text{Limit}}^2}{\pi\left[r_0\left(A_B^{1/3} + A_T^{1/3}\right)\right]^2}$$

- **Prawdopodobieństwo interakcji P_{Int}** (zderzenia jądra wiązki z jądrem tarczy)

$$\begin{cases} P_{\text{Int}} = \dfrac{\Delta S}{S} \\ \Delta S = \sigma_{\text{R}} \cdot n_T \cdot S \cdot \Delta x \\ \dfrac{n_T}{N_A} = \dfrac{\rho_T}{A_T} \\ \sigma_{\text{R}} \approx \pi\left[r_0\left(A_B^{1/3} + A_T^{1/3}\right)\right]^2 \end{cases}$$

$$P_{\text{Int}} = \sigma_{\text{R}} \cdot \frac{(\rho\,\Delta x)_T}{A_T} \cdot N_A$$



- Typowe tarcze mają grubości tak dobrane, aby: $P_{\text{Int}} \sim 1\%$

$$P_{\text{Int}} \sim (\rho\,\Delta x)_T$$

Grubość tarczy często podawana w: $\rho\,\Delta x$ [mg/cm²]

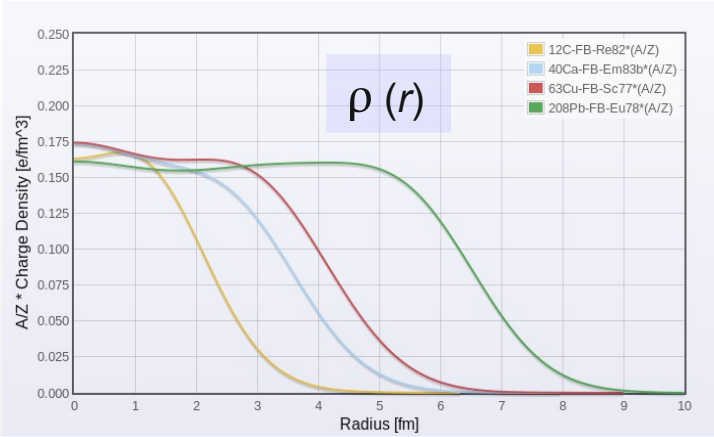
Ku modelowi Glaubera

- Relatywistyczne zderzenie jąder:
  - profil jądra jest rozmyty.

    Najprostszy model: rozkład Fermiego

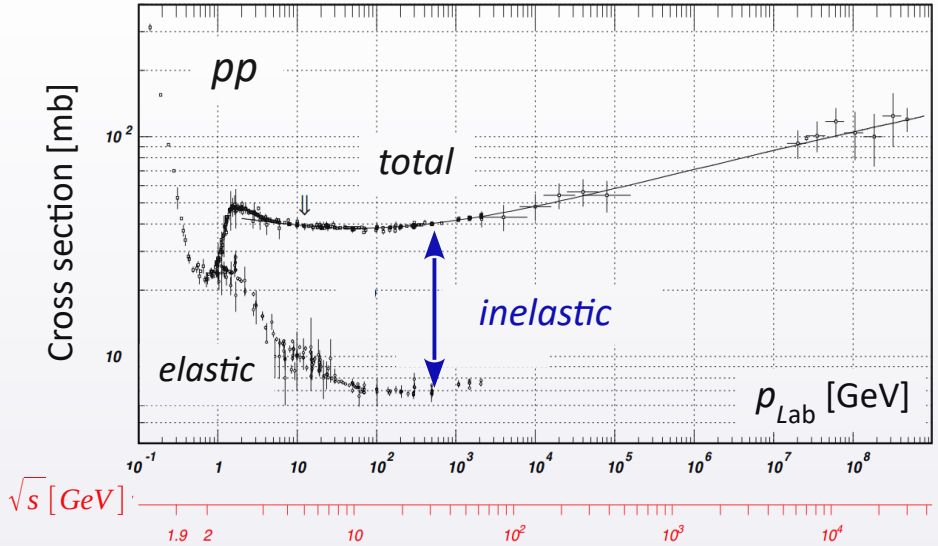
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\exp\left(\frac{r-r_0}{d}\right) + 1}$$

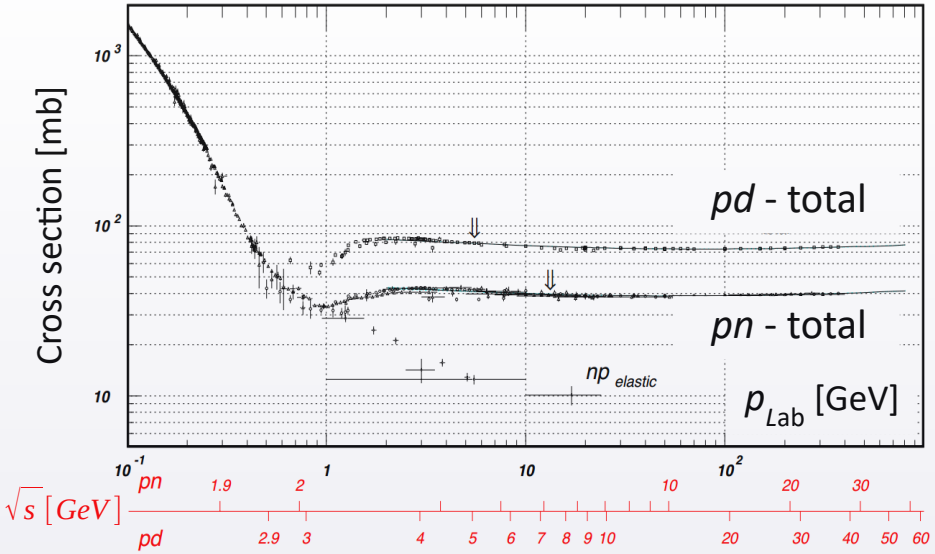
  - zbudowane z sumy zderzeń NN, niezależnych od siebie.
  - Przekrój czynny na zderzenie NN nie jest stały:



faculty.virginia.edu/ncd

journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.86.010001





$\sigma_{inelastic}$: wahnięcie + szerokie plateau $\sigma_{NN} \approx 30 .. 50$ mb

Model Glaubera: wariant optyczny

- Zderzenie jąder A z B przy (ustalonym) parametrze zderzenia b. Jądra mają zadane profile $\rho(r)$.
  Zderzenie jąder rozumiemy jako **sumę zderzeń indywidualnych nukleonów, każde z przekrojem czynnym ~ σ_{NN}** .
- *Opis:* `M. Miller et al.` `Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 57, 205 (2007)`
  Talk: `J. Wilkinson` `Glauber modelling in hi-ener nucl. coll.`
- **Optyczny**
  Ciągły rozkład $\varrho(r)$.
  Funkcje analityczne,
  próbkowane są całki

  ⇐ **Model Glaubera** ⇒

  Monte Carlo
  Pozycjonujemy A+B
  nukleonów, według $\varrho(r)$.

Krok 1: średnia szansa na 1 zderzenie NN = ?

- 3D → 2D. **Funkcja grubości T_A** [fm^{-2}] :

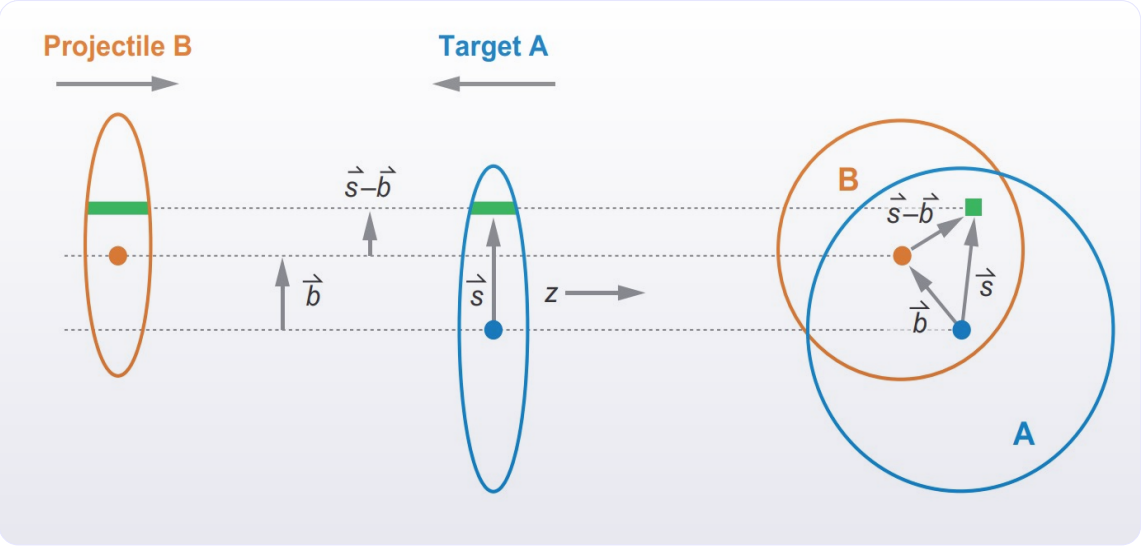
$$T_A(\vec{s}) = \int \rho_A\left(\sqrt{\vec{s}^2+z^2}\right)\, dz \qquad \int \rho_T\, d^3r = 1$$

(szansa znalezienia nukleonu na 1 fm^2 pola ⊥)

- **Funkcja przekrycia T_{AB}** :

$$T_{AB}(\vec{b}) = \int d^2s\; T_A(\vec{s})\; T_B(\vec{s}-\vec{b})$$

(szansa, że przy ustalonym b
nukleon z A napotka nukleon z B) [1/fm^2]



⇒ $T_{AB}(b) \cdot \sigma_{NN,\,inel.}$ = prawdopodobieństwo *pojedynczego* zderzenia NN

Model Glaubera: wariant optyczny

- Ustawiamy jądra na parametrze zderzenia *b*. Nukleony „próbują się zderzyć”, z sukcesem lub porażką.
  Średnie **prawdopodobieństwo *pojedynczego* zderzenia NN** to: $T_{AB}(b) \cdot \sigma_{NN}$.
  Ilość zderzeń NN = liczba „sukcesów” w A · B próbach ↔ podlega rozkładowi **binomialnemu**:

$$P(n,b) = \binom{AB}{n} \left[T_{AB}\sigma_{NN,inel}\right]^n \left[1 - T_{AB}\sigma_{NN,inel}\right]^{AB-n}$$

- **Całkowity przekrój czynny na zderzenie jądro-jądro** (AA). Do zderzenia AA dojdzie, gdy zajdzie min. 1 zderzenie NN:

P (min. 1 zderzenie NN) = 1 – *P* (0 zderzeń NN) ➡ $\sigma_{AB,inel} = 2\pi \int_0^\infty \left\{1 - \left[1 - T_{AB}(b)\sigma_{NN,inel}\right]^{AB}\right\} bdb$

- **Średnia liczba „binarnych” zderzeń NN**:

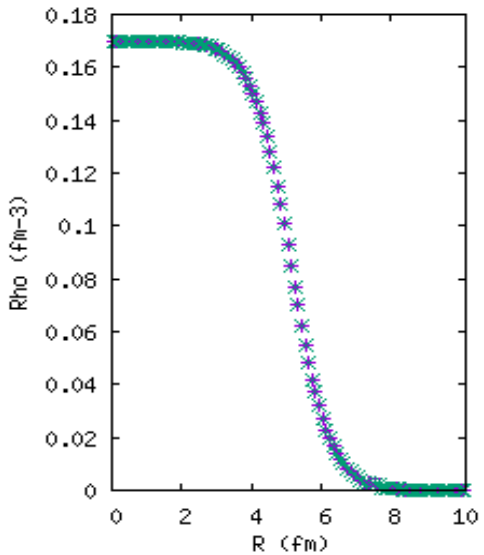
$$N_{coll}(b) = \sum_{n=1}^{AB} nP(n,b) = \ldots = AB \cdot T_{AB}(b)\sigma_{NN,inel}$$

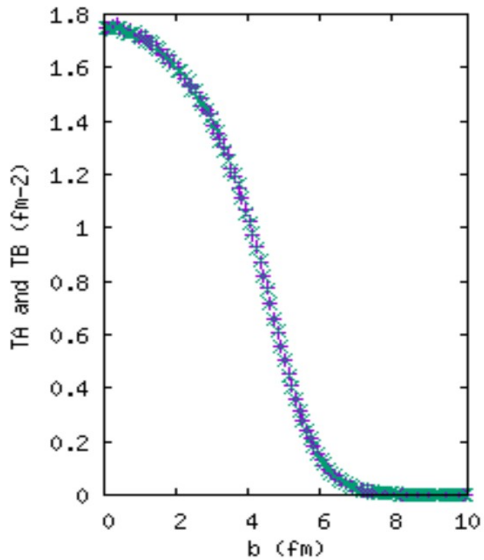
- **Średnia liczba nukleonów-partycypantów**:

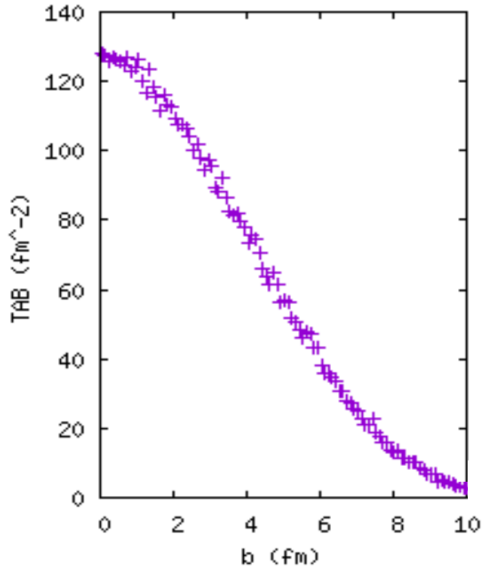
$$N_{part}(b) = A\int T_A(\vec{s}) \left\{1 - \left[1 - T_B(\vec{s}-\vec{b})\sigma_{NN,inel}\right]^B\right\} d^2s +$$

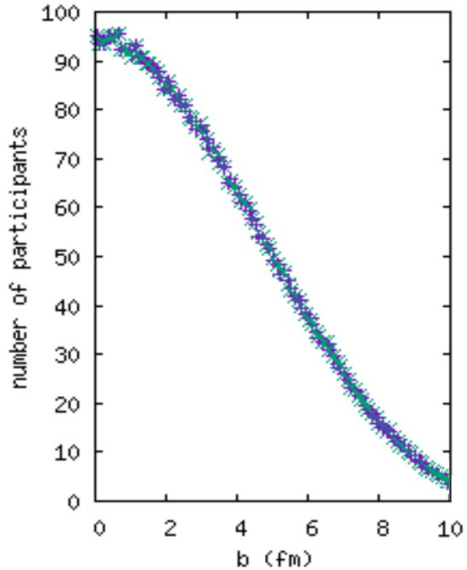
$$B\int T_B(\vec{s}-\vec{b}) \left\{1 - \left[1 - T_A(\vec{s}) \sigma_{NN,inel}\right]^A\right\} d^2s$$

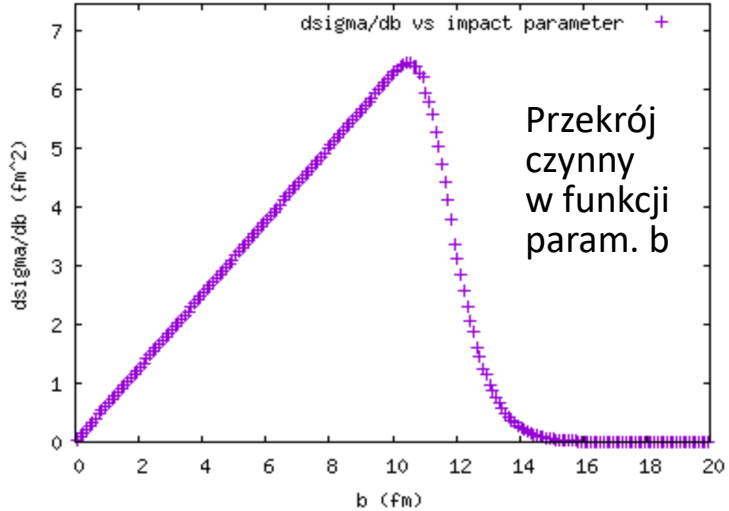
- "Overlap" : optyczny model Glaubera online . Np. dla zderzenia $^{108}Ag + ^{108}Ag$ (załóżmy $\sigma_{NN,\ inel.} = 25$ mb)











Przekrój czynny w funkcji param. b

- Sprawdźmy wpływ ustawień na $\langle A_{part} \rangle$ i $\langle N_{Coll} \rangle$:

	Jednolite kule	R. Fermiego $\sigma_{NN} = 20$ mb	R. Fermiego $\sigma_{NN} = 30$ mb
$\langle A_{part} \rangle_b$	55	44.5	48.5
$\langle N_{coll} \rangle_b$	92	65	76

Model Glaubera: wariant Monte Carlo

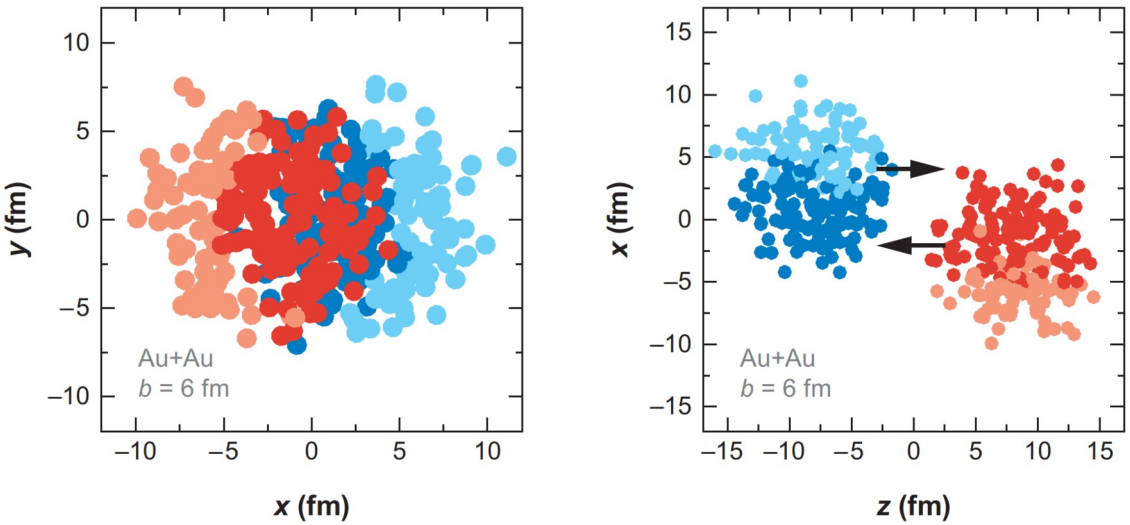
- Nukleony rozmieszcza się w jądrach zgodnie z ich rozkładem ϱ(r) .

  Parę przekrywających się nukleonów traktuje się jako „pojedyncze zderzenie NN”.

  Jako „przekrywanie się” uznaje się sytuację, gdy odległość między środkami nukleonów:

$$d < \sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{NN,\ inel.}}}{\pi}}$$

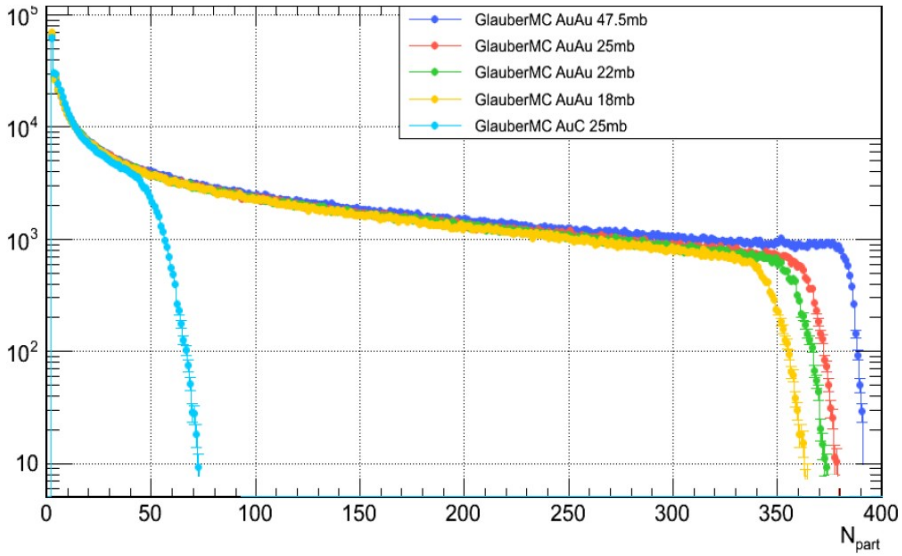
  ”**wounded nucleons**” („zranione nukleony”)



M. Miller et al. Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 57, 205 (2007)

- Dostępne kody symulacyjne, m.in. **TGlauberMC** [ref.] , **Glissando** [ref.]

- Przykładowy rozkład A_{part} z modelu Glaubera (MC):

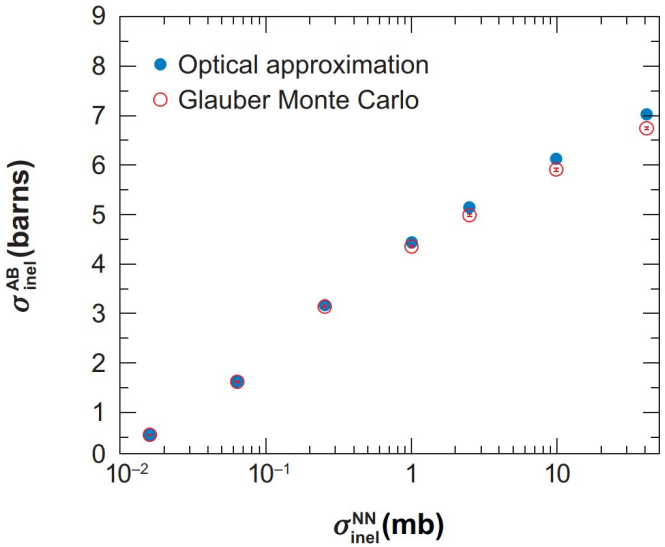


Model Glaubera: wariant Monte Carlo

- Wariant optyczny – vs – Monte Carlo:

  W tych samych warunkach, rozbieżności w wartościach średnich są bardzo małe [rys: zależność $\sigma_{AA} = f(\sigma_{NN})$]

  Zaletą MC jest możliwość symulowania fluktuacji (odchyłek).



M. Miller et al. Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 57, 205 (2007)

- Otrzymany rozkład A_{part} – to jeszcze nie jest miejsce porównań z eksperymentem:
  1. zwykle mierzymy jedynie cząstki naładowane (protony)
  2. detektor ma ograniczony rozmiar → zarejestruje tylko część cząstek.
  3. nawet gdy cząstka wpadnie, to: układ ma pewną niewydajność rejestracji torów (wydajność $\equiv \varepsilon$) .

- Rozkład A_{part} z symulacji „Glauber MC" trzeba zawęzić do N_{ch} rejestrowanych cząstek, uwzględniając fluktuacje. Na każdego partycypanta przypada „prawdopodobieństwo P wytworzenia cząstki rejestrowanej".

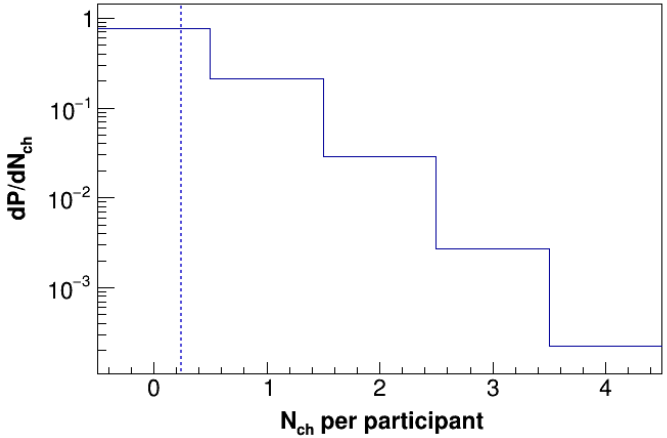
  Oczywiście, N_{ch} rośnie proporcjonalnie z A_{part} .

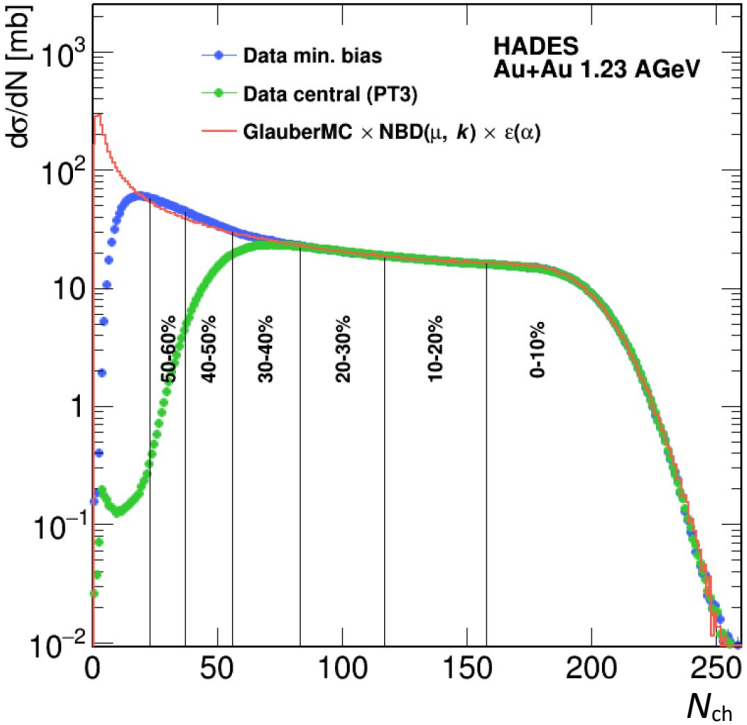
Model Glaubera a dane doświadczalne

- ... Na każdego partycypanta przypada prawdopodobieństwo *P* wytworzenia cząstki rejestrowanej.
  Rozkład *P*: stosuje się **ujemny rozkład dwumianowy** (**negative binomial distribution, NBD**) o średniej μ i parametrze szerokości *k*:

$$P_{\mu,k}(n) = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(k)} \cdot \frac{(\mu/k)^n}{(\mu/k+1)^{n+k}}$$

Przykład dla Au+Au @ 1.2A GeV (HADES):





Wykres: rozkład krotności cząstek **naładowanych**.
(**to** jest mierzone)

- Glauber MC
- Eksperyment, ”minimum bias”
- Eksperyment, ”tryger centralny”

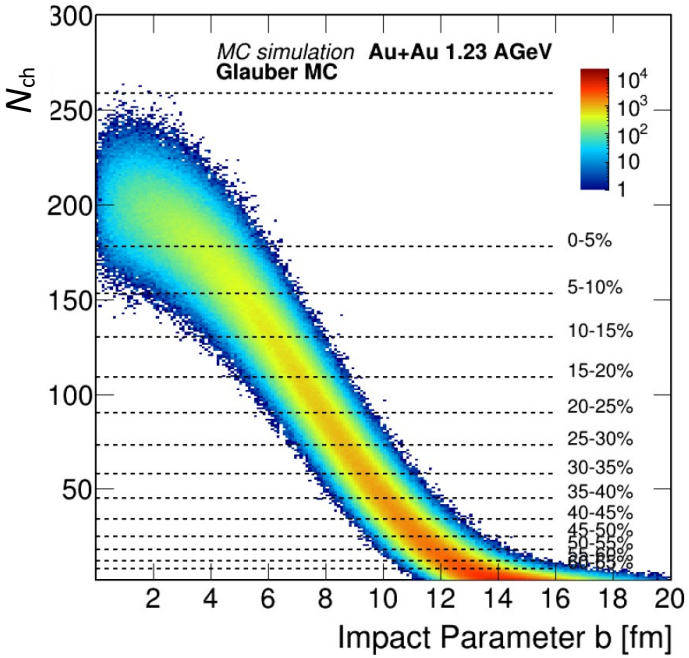
Dobra zgodność modelu z eksperymentem.

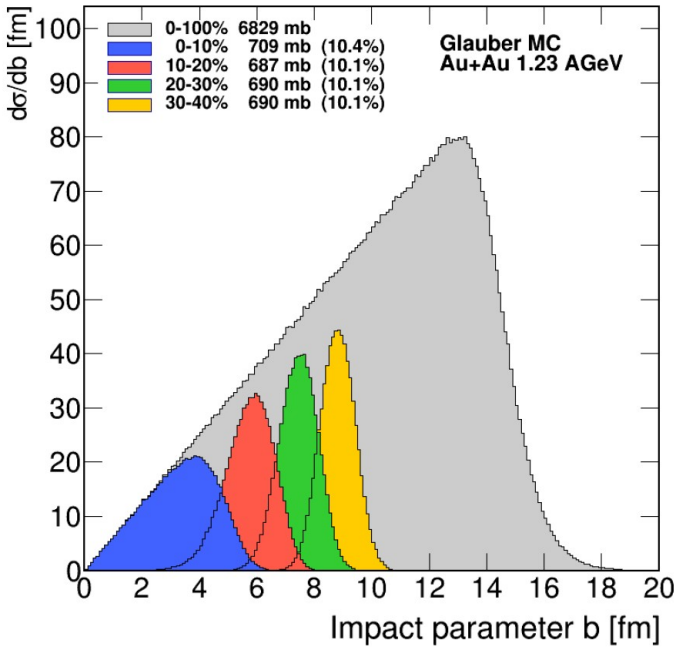
Doświadczalnie na tym wykresie definiuje się „**klasy centralności**” .

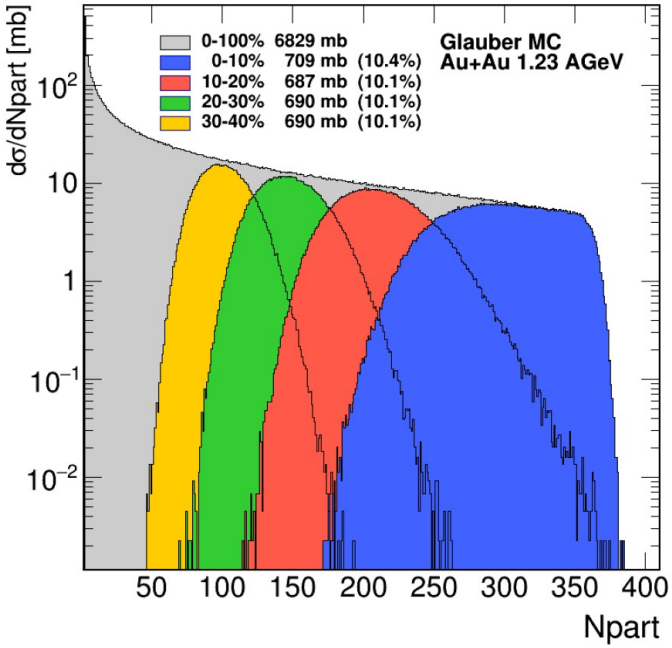
J. Adamczewski-Musch et al. (HADES), EPJA 54, 85 (2018)

Model Glaubera a dane doświadczalne

- Klasę centralności określa się na rozkładzie krotności cząstek naładowanych (N_{ch}).
  Czy N_{ch} koreluje się z centralnością (z parametrem b) oraz z A_{part} ?







J. Adamczewski-Musch et al. (HADES), EPJA 54, 85 (2018)

Silna antykorelacja między parametrem b a N_{ch} .
W kolejnych przedziałach N_{ch} (**klasach centralności**) – jest średnio coraz mniejsze b.

Ale uwaga: w każdej klasie centralności zawsze mamy rozkład b .
Nawet wybór wąskiego zakresu N_{ch} $\rightarrow$ rozkład wartości N_{part} jest rozmyty. Choć wciąż $\langle N_{ch} \rangle \sim \langle A_{part} \rangle$.
Można jednak w każdej klasie centralności wyznaczać średnią, $\langle A_{part} \rangle_b$.

Model Glaubera: $d\sigma/db$ opada płynnie z b. Efekt oczekiwany, spowodowany rozmyciem jąder na ich brzegach.

Zwiększamy energię wiązki

- Obszar energii wiązek w pobliżu energii Fermiego
- Multifragmentacja jądra
- Przejście ciecz – gaz

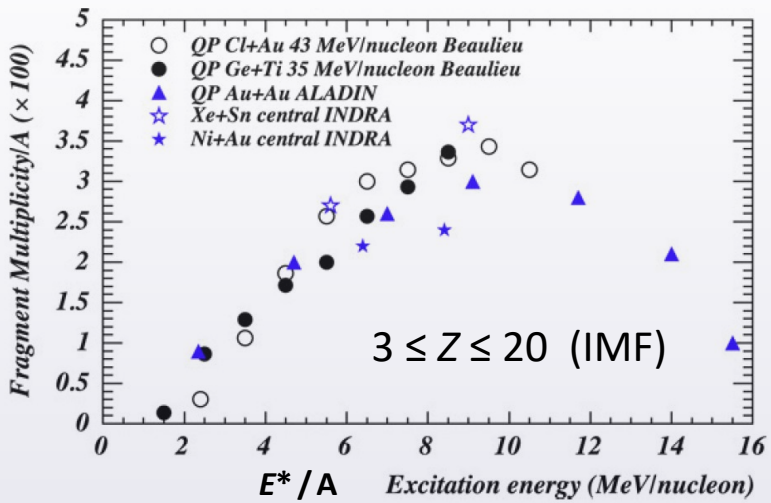
Multifragmentacja

- S. Das Gupta, A.Z. Mekjian, M.B. Tsang,
  "Liquid-gas phase transition in Nuclear Multifragmentation"
  s. 98

is comparable with τ_{re}. At excitation energy comparable to binding energy $\epsilon \approx 8$ MeV/nucleon the very existence of a long-lived compound nucleus is unlikely which leads to the scenario of an explosion-like process involving the whole nucleus. This will lead to multiple emission of nuclear fragments of different masses. This is what is called "multifragmentation" where 'multi' is more than two. Associated with multifragmentation is a term Intermedi-

- Nazewnictwo emitowanych cząstek:
  $1 \le Z \le 2$: **LCP** (**Light Charged Particle**)
  $3 \le Z \le 20$: **IMF** (**Intermediate Mass Fragment**)

- Produkcja IMF w funkcji **energii wzbudzenia, *E**** średnio na nukleon w jądrze [MeV/nukleon]
  (lub we wzbudzonym fragmencie, np. w spektatorze pochodzącym od jądra wiązki: *QP = quasiprojectile*).

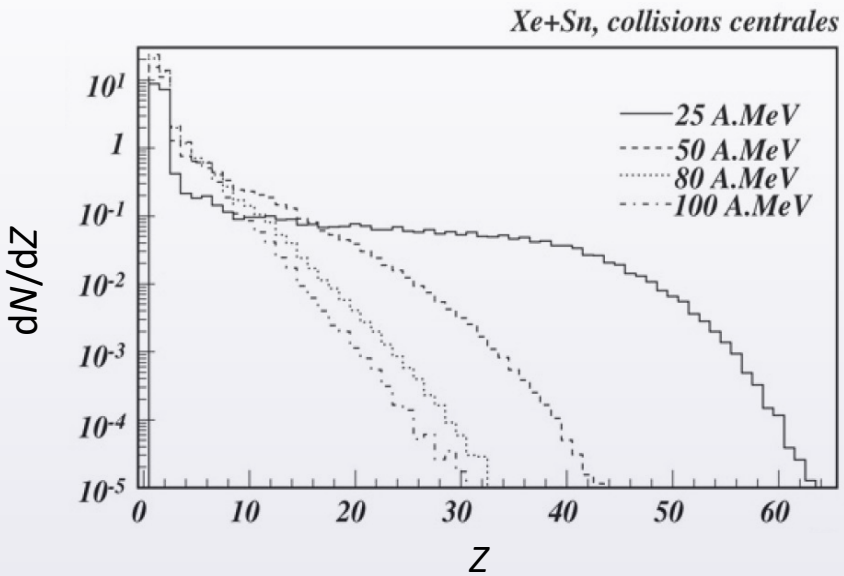


- $m_{\text{Frag}} + E^*_{\text{Frag}} = \sum_i m_i + \sum_i E_{\text{Kin, i}}$
- Początek produkcji IMF przy $E^*/A_{\text{Źródła}} \approx 2$ MeV.
  Maksimum produkcji przy $E^*/A_{\text{Źródła}} \approx 9$ MeV.
  (por. B_J /A ≈ 8 MeV)
- Q: Co się dzieje przy wyższych energiach?

B.Borderie, M.F.Rivet, Prog.Part.Nucl.Phys. 61, 551 (2008)

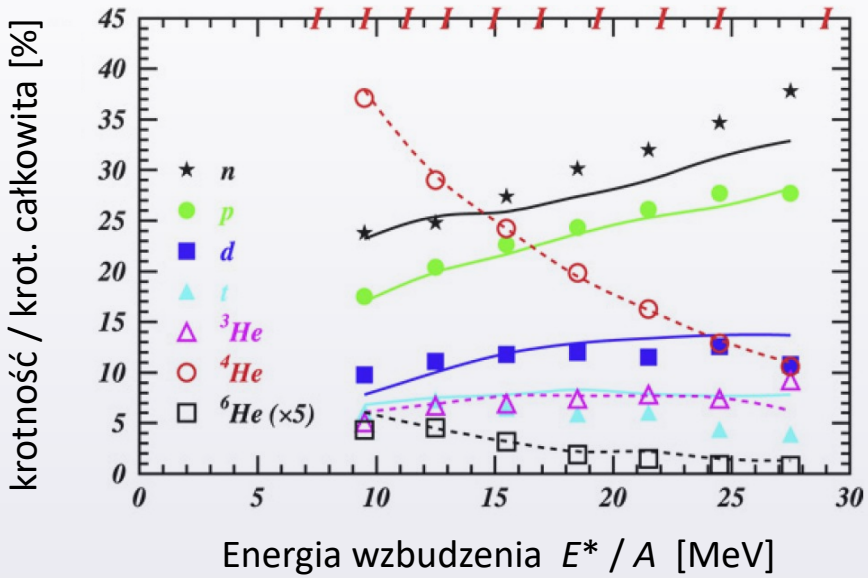
Multifragmentacja c.d.

- Rozkład liczby masowej Z fragmentów emitowanych ze zderzeń ^{129}Xe + ^{nat}Sn przy energiach wiązki 25A – 100A MeV



B.Borderie, M.F.Rivet, Prog.Part.Nucl.Phys. 61, 551 (2008)

- Procentowy wkład danych fragmentów w zależności od energii wzbudzenia E^* (quasi-) jądra .
  Dane dla zderzenia ^{95}Ar + ^{197}Au przy T_{Beam} = 95A MeV



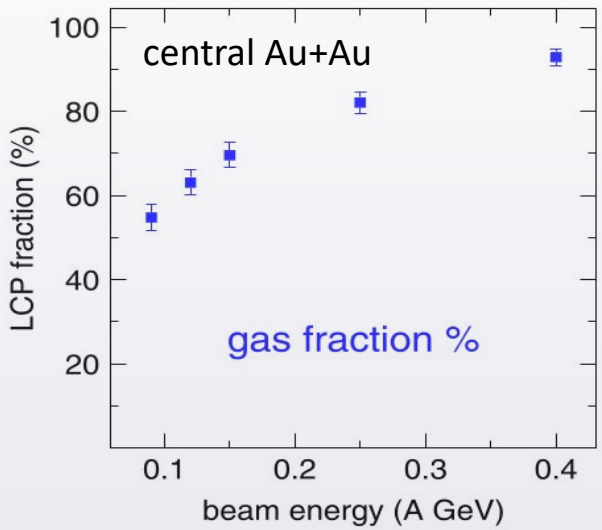
$$m_{\mathrm{Frag}} + E^*_{\mathrm{Frag}} = \sum_i m_i + \sum_i E_{\mathrm{Kin,\,i}}$$

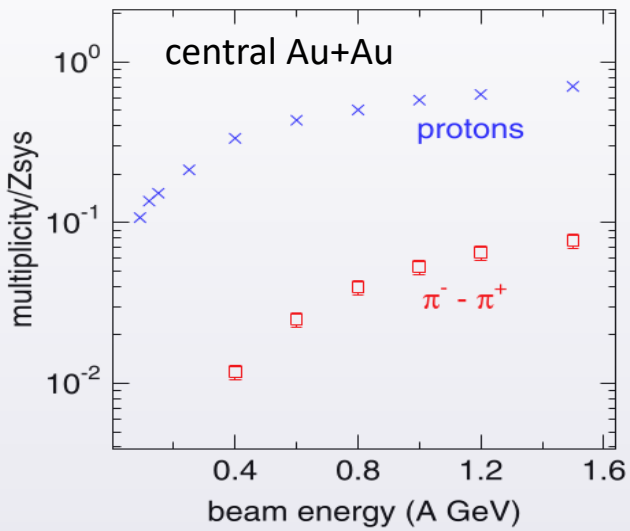
Im wyższa $E_{\mathrm{Wzbudzenia}} / A$:

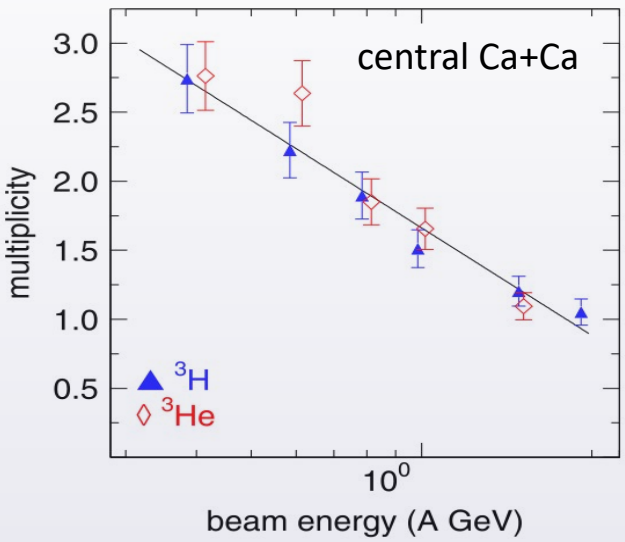
Rośnie wkład emisji fragmentów lekkich (LCP) kosztem cięższych (IMF).
Strefa zderzenia (lub dany spektator) dzieli się na coraz mniejsze fragmenty.

Dalsze zawężanie do emisji LCP

- **LCP** : $1 \le Z \le 2$ (Light Charged Particle) ~ cząsteczki gazu
  IMF : $3 \le Z \le 20$ (Intermediate Mass Fragment) ~ kropelki cieczy



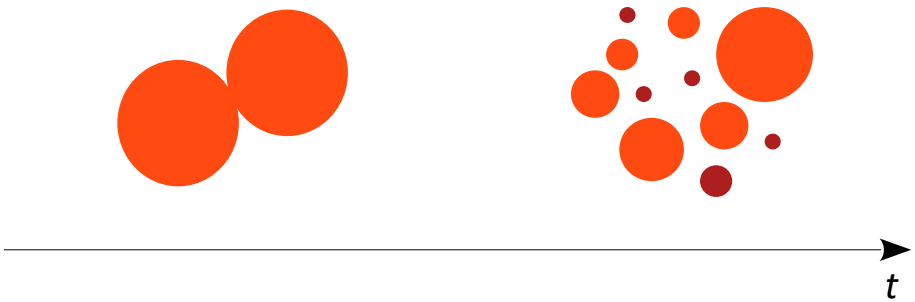




W.Reisdorf et al., Nucl.Phys. A 848, 366 (2010)

- Z energią wiązki: wzrost LCP kosztem IMF
- Równowaga „ciecz” – „gaz” (50 - 50) przy $T_B \sim 80A$ MeV
- Również krotność ^{3}H i ^{3}He maleje z energią wiązki

Przemiana fazowa ciecz-gaz: 1. rodzaju?



- Zmienia się **stan skupienia**: [**ciecz**] → [**gaz**]

  Główna cecha **przemiany fazowej 1. rodzaju**:
  - dostarczamy ciepło, a T = const

  Inne cechy przemian fazowych:
  - w trakcie przemiany współistnieją obie fazy
  - znaczne fluktuacje rozmiarów

- Zależność $E(T)$ w fazie **gazowej**. Np. gaz doskonały: $U = \frac{3}{2} N k_B T$ i w zmiennych jądrowych: $\frac{E^*}{A} \sim T$

- Faza **cieczy** – zbiór nukleonów, opisywanych w uproszczeniu przez model Fermiego.

- Dążymy do wyznaczenia średniej energię nukleonu ($\bar{\epsilon}$) w funkcji T.
  Zakładamy, że przy małych T potencjał jądrowy się nie zmienia. Zapiszmy **energię 1 nukleonu: ϵ**

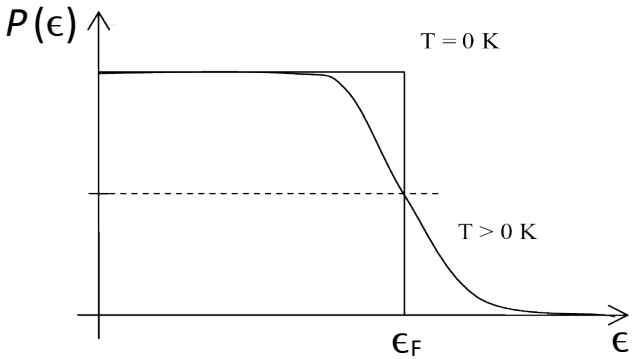
  Komponenty:
  - Liczba możliwych stanów dla nukleonu: gęstość stanów **$g(\epsilon)$**
  - rozkład prawdopodobieństwa obsadzenia kolejnych stanów o energii E_{Kin} : **$P(\epsilon)$**.

- **Rozkład obsadzenia *P*** przez fermiony stanów o energii ϵ:
(rozkład Fermiego-Diraca).

Dla $T = 0$
$$P(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \epsilon < \epsilon_F \\ 0 & \epsilon > \epsilon_F \end{cases}$$

Dla $T > 0$
$$P(\epsilon) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\epsilon - \epsilon_F}{T}\right)}$$

... rozpatrzymy przy $\epsilon \approx \epsilon_F$.



- **Ile jest możliwych stanów o energii E_{Kin}?**

„Stany” = stany wypełniające kulę pędów odpowiadających kolejnym modom drgań w studni 3D.
Pędy $\leftrightarrow$ energie kinetyczne.

Gęstość dostępnych stanów $g(E_{Kin})$, tj. ich ilość w przedziale $[E_K, E_K + dE_K]$:

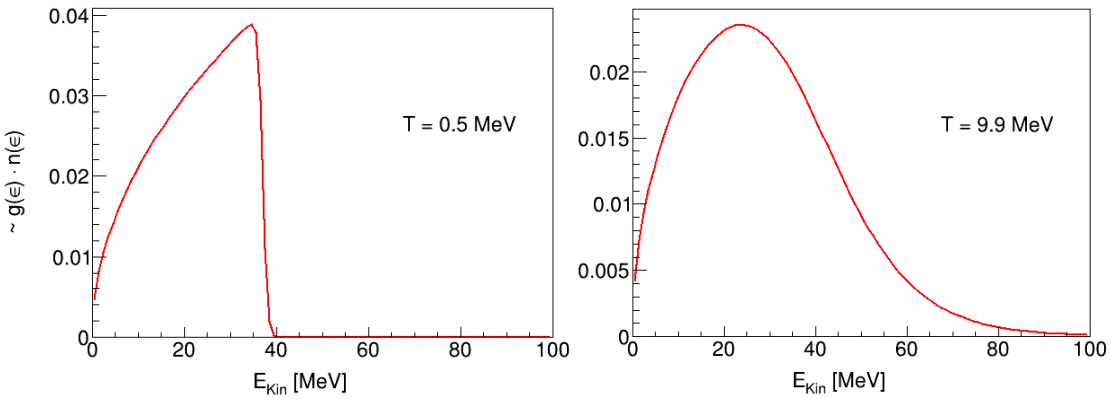
$$g(\epsilon_{Kin}) = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} (2m)^{3/2} \cdot \epsilon_{Kin}^{1/2}$$

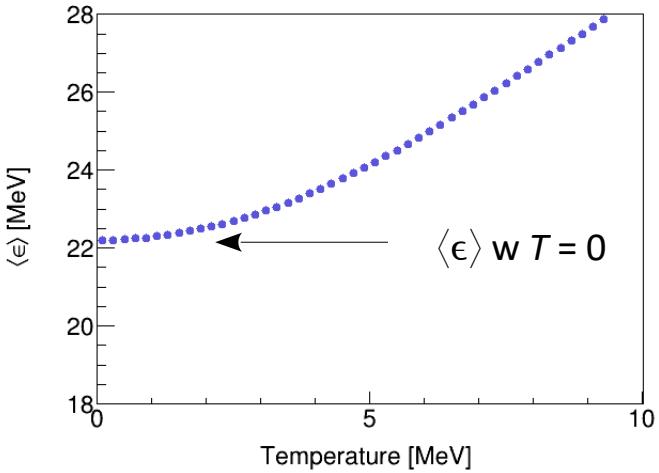
- **Średnia energia nukleonu $\bar{\epsilon}$** :

$$\bar{\epsilon} = \frac{E_{Kin}^{Tot}}{A} = \frac{\int_0^\infty \epsilon_{Kin} \cdot g(\epsilon_{Kin}) \cdot P(\epsilon_{Kin})\, d\epsilon_{Kin}}{A}$$

Zależność energii od temperatury dla cieczy nukleonów

Wyznaczymy numerycznie zależność $\bar{\epsilon}$ **(T)** **[FILM]** .





Rozwinięcie Taylora wokół $\epsilon \approx \epsilon_F$: $E_{Kin}^{Tot} = E_0 + g(\epsilon_F) \cdot \frac{\pi^2}{6} T^2$

Nadwyżka ponad E_0 – to właśnie **energia wzbudzenia, *E**** $E^* \Big|_{Kin}^{Tot} = \left[E - E_0\right]_{Kin}^{Tot} = g(\epsilon_F) \cdot \frac{\pi^2}{6} T^2$

Wniosek: w fazie ciekłej $\epsilon^* \sim T^2$

- **Q**: co pokaże eksperyment? …

Wybierano zderzenia nie-centralne ⇒ badano rozpad spektatora po jądrze wiązki.
Z produktów rekonstruowano ten fragment. Następnie: przejście do jego układu odniesienia.

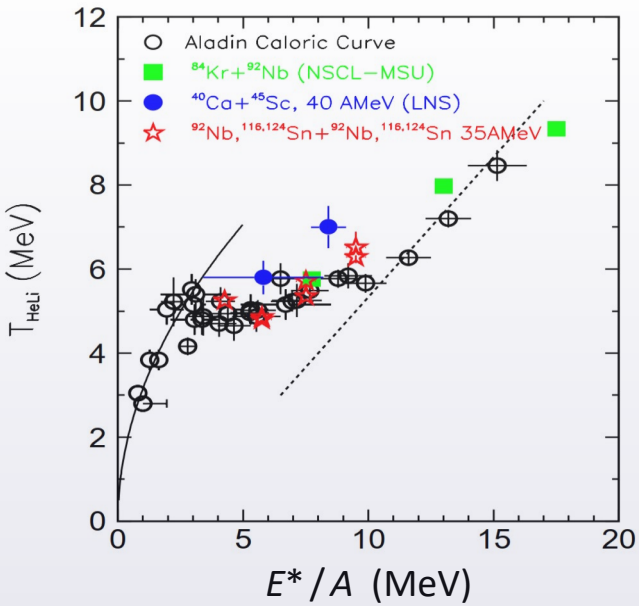
Energia wzbudzenia *E fragmentu F** : $m_F + E^* = \sum_i m_i + \sum_i E_{Kin,\,i}$

Przemiana fazowa ciecz-gaz: 1. rodzaju!

- **Pomiar temperatury** : Model statystyczny daje receptę na krotność wyemitowanych cząstek w funkcji T i V. Stosunek dwóch krotności redukuje zależność od V, a pozostawia $f(T)$.

Popularny wybór: $\frac{N(^3He)}{N(^4He)}$ i $\frac{N(^6Li)}{N(^7Li)}$. Pierwotny wzór: $T_{\text{He-Li}} = 16 \;/\; \ln\left(2.18 \times \frac{N_{^6\text{Li}}/N_{^7\text{Li}}}{N_{^3\text{He}}/N_{^4\text{He}}}\right)$

poprawiany m. in. o dopływy z rozpadów innych jonów)



- Eksperymentalna **krzywa kaloryczna**

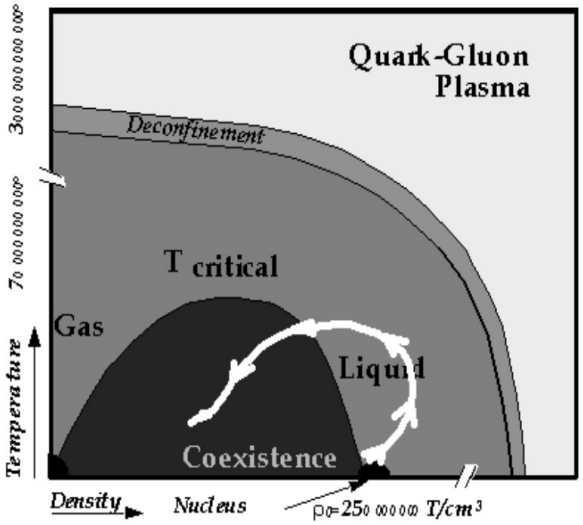
- ϵ^* niskie : $\epsilon^* \sim T^2$
  ϵ^* pośrednie : umiarkowane plateau
  ϵ^* wyższe : $\epsilon^* \sim T$

- ~ 1995 – 2005 …
  wątpliwości metodologiczne.

  ⇒ Analiza dodatkowych sygnatur (np. [1, 2])

  ⇒ **Wniosek:**
  przemiana fazowa 1. rodzaju !

- **Diagram fazowy materii jądrowej** (szkic)



M. D'Agostino et al., Nucl. Phys. A 749, 55c (2005)

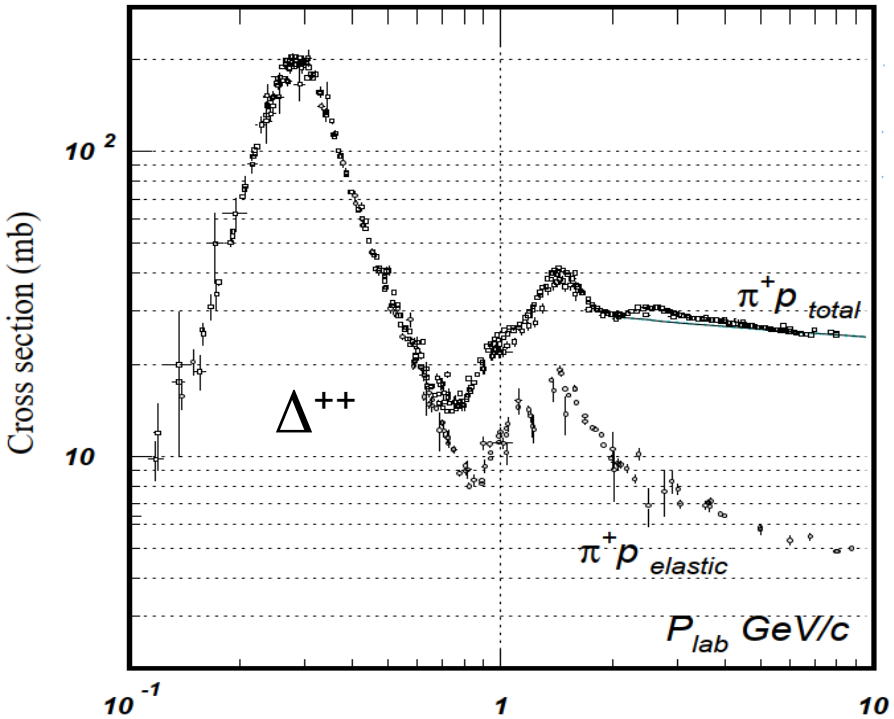
Produkcja nowych cząstek i rozpady

- Produkcja nowych cząstek
  - Rodzaje hadronów. Wykres Chew-Frautschiego
  - Zasady zachowania. Energia dostępna $\sqrt{s}$.
  - Energia progowa. Podprogowa produkcja cząstek.
- Rozpady cząstek (rekonstrukcja)
  - Związek
  - Metoda masy niezmienniczej. Mieszanie zdarzeń
  - Metoda masy brakującej
  - Wykres Dalitza
- Produkcja barionów Δ
- Symetria izospinowa
- Bilans produkcji dziwności

- Z rosnącą energią wiązki zaczynają się produkować nowe cząstki.
  Najpierw – hadrony złożone tylko z kwarków u i d (np. bariony Δ czy mezony π).
  Przy coraz wyższych energiach – z kolejnymi kwarkami: s, c, …

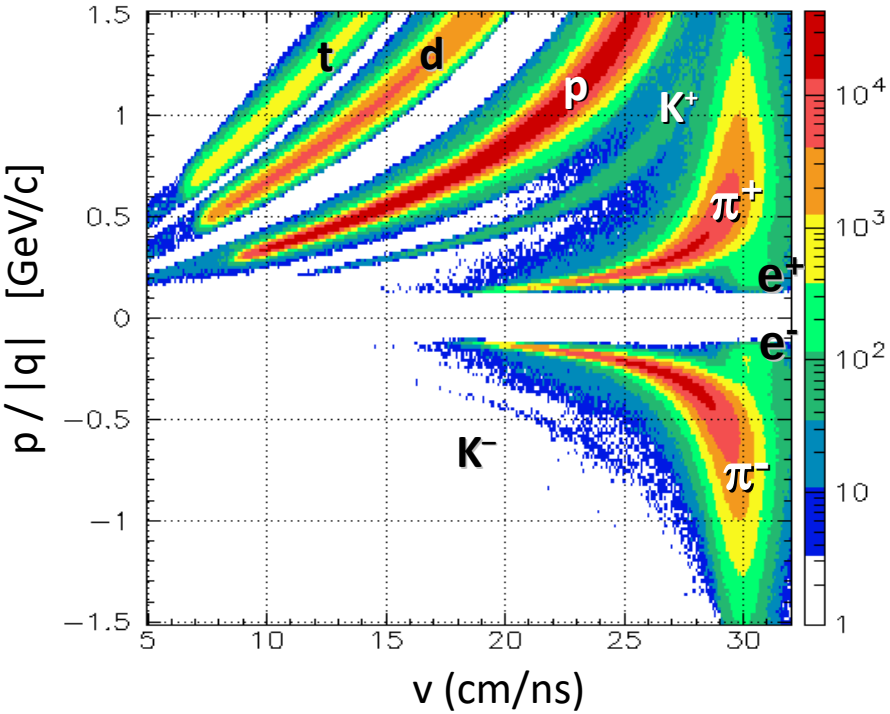
- Przekrój czynny na $p\pi^+ \rightarrow X$

  Widać m. in. rezonans Δ^{++}.



- *Przykład*: cząstki wyemitowane z Ni+Ni @ 1.9A GeV.

  Zliczenia na płaszczyźnie [*p*, *v*]
  koncentrują się wokół zależności $p = m\gamma v$.
  Stąd można identyfikować **masy** cząstek.
  Widać m.in. $\pi^{+/-}$, K^{+-}



Produkcja nowych cząstek

- Energie wiązek, przy których powstają nowe cząstki, odpowiadają na tyle małym $\lambda_{\text{de Broglie}}$, że **produkcję hadronu rozpatruje się jako reakcja, której uczestnikami są hadrony** (jeszcze wyższe energie $\rightarrow$ kwarki i gluony).

- Każda reakcja („w danym kanale") musi być **zgodna z zasadami zachowania**:

  E
  $\overline{p}$
  Q
  B (liczba barionowa)
  S (liczba dziwności)
  …
  Proporcje krotności hadronów z podmienionym u $\leftrightarrow$ d : symetria izospinowa (w dobrym przybliżeniu)

- Kinematyka: relatywistyczna.

  Utworzenie cząstki o danej m = zużycie E.
  Bilans $(E, \overline{p})$ liczony jest relatywistycznie.

- Podstawowych rodzajów hadronów nie ma za dużo, ale:

  - są **antyhadrony**
  - są **stany wzbudzone** [np. K*(892) to stan wzbudzony K]

- Typy mezonów i barionów można ułożyć w grafy, ze względu na ich budowę kwarkową (por. następna strona)

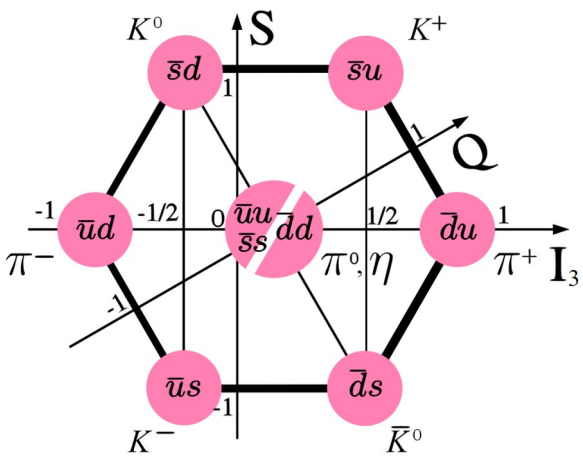
- Typy mezonów i barionów można ułożyć w grafy, ze względu na ich strukturę kwarkową.

Podstawowe grafy: (S = dziwność, I_3 = 3. składowa izospinu)

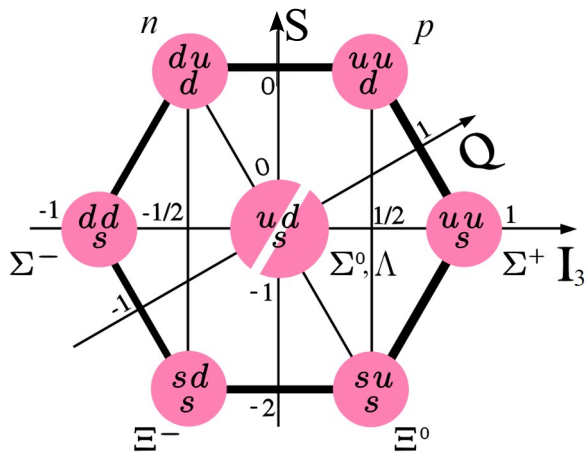
(Konwencja: $S(s) = -1$, $S(\bar{s}) = 1$. $I_3(u) = ½$, $I_3(d) = -½$)

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(n_u - n_d - \left(n_{\bar{u}} - n_{\bar{d}}\right)\right)$$

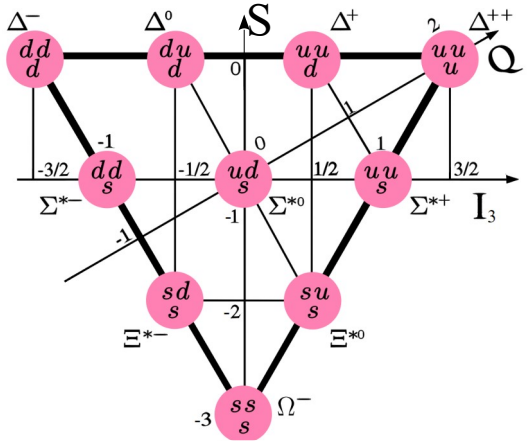
Nonet mezonów o spinie J = 0



Oktet barionów J = ½



Dekuplet barionów J = ³⁄₂



(Istnieje też nonet mezonów o spinie J = 1)

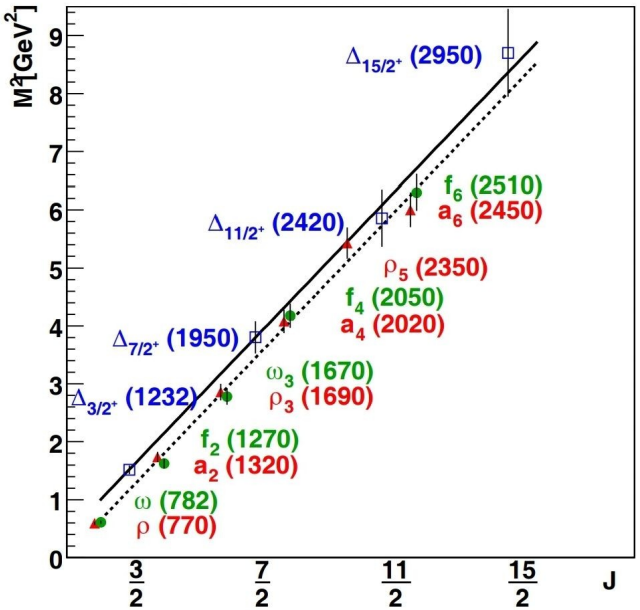
Hadrony: wykres Chew-Frautschiego

- Poza hadronami „podstawowymi”, odkryto setki hadronów masywniejszych.

  Okazuje się, że związek między m^2 a spinem J (tzw. **wykres Chew-Frautschiego**) wykazuje niezwykłą cechę:

$$J = c \cdot m^2 + d \qquad \text{gdzie } c, d \text{ – stałe.}$$

  (każda taka linia to tzw. **trajektoria Regge’go**).

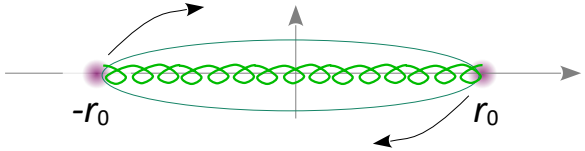


- **Uproszczone wyjaśnienie dla mezonów** [*D. Perkins „Wstęp do fiz. wysokich energii”*]

  - Hadrony składają się z kwarków, spajanych oddziaływaniem silnym, przenoszonym przez gluony.

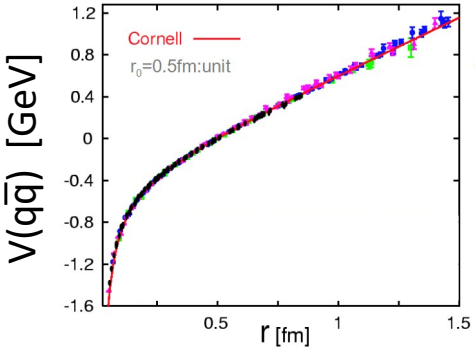
    Rozważmy układ 2 kwarków odległych od siebie o $2r_0$
    (u, d ważą b. mało wobec masy całego hadronu → uznajmy, że są bezmasowe) .
    Układ ten się obraca.

  - Linie pola kolorowego są ściągnięte w „**strunę gluonową**”.



  - Potencjał oddziaływania silnego uprościmy do:

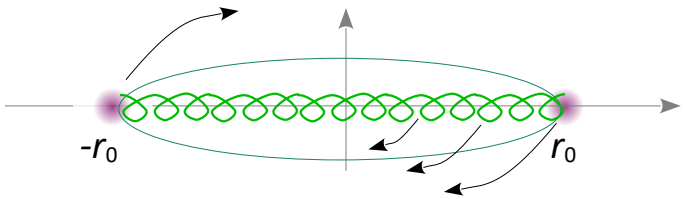
$$U(r) \approx k \cdot r \quad , \quad \text{gdzie } k = \text{gęstość energii na jednostkę długości struny}$$



Hadrony: wykres Chew-Frautschiego

- Każdy element na promieniu r wykonuje obrót z prędkością liniową $v(r)$.
  Środek struny nie porusza się, a jej kraniec wiruje z prędkością c.

$$\frac{v(r)}{c} = \frac{r}{r_0}$$



- Energia hadronu: to z jednej strony jego masa, a z drugiej: Σ energii elementów struny.

  Każdy element to kostka energii, która w swym układzie ma $dE = k\,dr$ i pęd 0.
  Ale w układzie CM hadronu element się porusza ⇒ potrzeba dokonać transformacji Lorentza:

$$dE^{\text{CM had}} = \gamma\, dE$$
$$c\, dp^{\text{CM had}} = \gamma \beta\, dE$$

⇒ Łącznie, energia:

$$M_{\text{hadr}} c^2 = E = 2\int_0^{r_0} \frac{k\,dr}{\sqrt{1 - \left[\frac{v(r)}{c}\right]^2}} = \ldots = k r_0 \pi$$

- Moment pędu hadronu: $\hbar \ell$ (orbitalny, od obrotu struny) + $\hbar s$ (spiny kwarków, niezmienialny)

  Policzmy część obrotową jako sumę po elementach struny:

$$\hbar l = \sum_i r_i \cdot p_i = \sum_i r_i \cdot \left(\frac{\gamma \beta\, dE_i}{c}\right) = \frac{2}{c^2}\int_0^{r_0} \frac{k\, r\, v\, dr}{\sqrt{1 - \left[\frac{v(r)}{c}\right]^2}} = \ldots = \frac{k r_0^2 \pi}{2 \hbar c}$$

➡ Eliminując z obu równań r_0, dostajemy $\ell \sim M^2$. Aby otrzymać J , do ℓ orbitalnego trzeba dodać spiny kwarków.
Dostajemy więc **J = const · M^2 + const**

W model struny gluonowej, w danej trajektorii Regge'go, hadrony masywniejsze od najlżejszego
– to wzbudzenia rotacyjne ze stanu podstawowego.

Energia dostępna – niezmiennik

- **Czterowektor**: obiekt fizyczny [A^0, A^1, A^2, A^3] , taki że gdy jest liczony w dwóch układach odniesienia, to transformacją wartości między tymi układami jest transformacja Lorentza.

Fakt: każdy iloczyn skalarny dwóch czterowektorów jest niezmiennikiem Transformacji Lorentza.

$$p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = const \qquad \rightarrow \text{ akurat jasne, bo: } \qquad E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2 = \text{niezmiennik} \equiv s$$

a jednocześnie:

$$\begin{cases} \sum_i E_i = const \\ \sum_i \vec{p}_i = const \end{cases}$$

→ „*s*" jest nie tylko niezmiennikiem. Jest też całką ruchu [f(t) = const].

- **Układ środka masy (CM)** : taki, w którym $\sum_i \vec{p}_{i,CM} = \vec{0}$

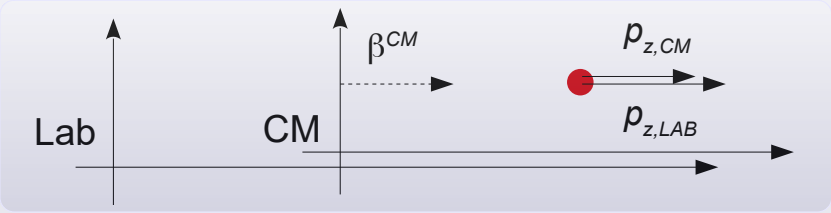
$$s \equiv \left(\sum_i E_{i,CM}\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_{i,CM}\right)^2 = \left(\sum_i E_{i,CM}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{s} = \sum_i E_{i,CM}$$

$\sqrt{s}$ nazywamy „**energią dostępną**"

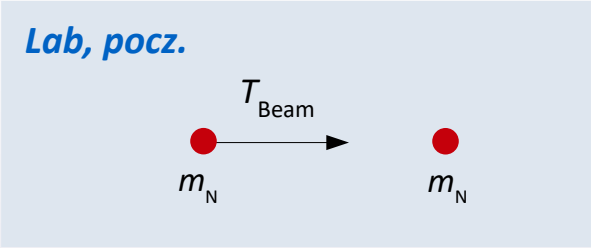
- Prędkość układu CM w układzie Lab:

$$\vec{\beta}^{CM} = \frac{\sum_i \vec{p}_{i,Lab}}{\sum_i E_{i,Lab}}$$



Energia kinetyczna wiązki a energia dostępna

- Dla zderzenia nukleon-nukleon (NN) na stacjonarnej tarczy:



W **Lab**:

$$s \equiv \left(2m_N + T_{Beam}\right)^2 - \vec{p}^{\,2}_{Beam}$$

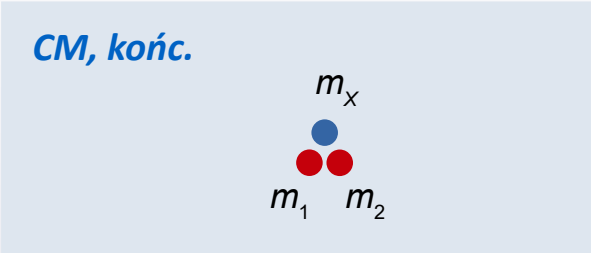
$$\ldots$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{2 \cdot m_N \left(2m_N + T_{Beam}\right)}$$

$\sqrt{s}$ monotonicznie rośnie z T_{Beam}

Np. dla T_{Beam} = 1 GeV, $\sqrt{s}$ = 2.3 GeV

- $\sqrt{s}$ jest często używana w kontekście produkcji cząstki. Dlaczego:



W **CM**:

$$\sqrt{s} = \sum_i E_{i,CM}$$

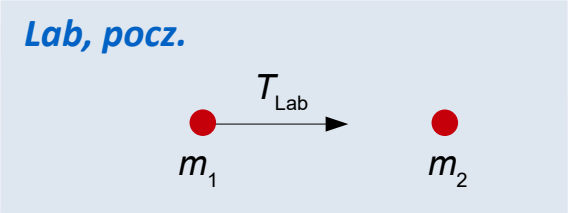
a gdyby w CM cała energia była tylko masą cząstek:

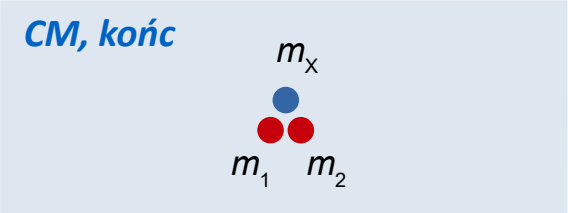
$$\sqrt{s} = \sum_i m_i$$

$\sqrt{s}$ ukazuje, ile masy można „wykreować” , zderzając rozpędzony nukleon z nukleonem stacjonarnej tarczy.

Progowa energia kinetyczna wiązki na produkcję cząstki

- **Energia progowa** : minimalna T potrzebna do produkcji cząstki o masie m_X w danym kanale (często kanał NN → ...) , liczona w konfiguracji fixed target





Lab, przed: $s \equiv \left(m_1 + m_2 + T^{\mathrm{Min}}_{1,\mathrm{Lab}}\right)^2 - \vec{p}^{\,2}_{1,\mathrm{Lab}}$

CM, po: $s \equiv \left(m_1 + m_2 + m_X\right)^2$

$$T^{Min}_{1,Lab} = \frac{m_X^2 + 2m_X(m_1 + m_2)}{2m_2}$$

Jeżeli $m_1 = m_2 = m_N$ *(N = nukleon)*

$$T^{\mathrm{Min}}_{\mathrm{Lab}} = \frac{m_X\,(m_X + 4m_N)}{2m_N}$$

→ potrzeba tym więcej energii, im więcej masy ma się wyprodukować. Budżet na masę narasta ~ pierwiastkowo z T_{Lab}.

- Np. progowa T_{Beam} dla produkcji mezonu π^0 ($m_{\pi 0}$ = 135 MeV) w zderzeniu NN:

$$T^{Min}_{\pi^0} = 280 \ \mathrm{MeV}$$

(*pasuje do obecnie rozważanego zakresu energii*)

Energia progowa na produkcję cząstki

- „Najtańsze” kanały produkcji w zderzeniu nukleonu wiązki na nukleonie stacjonarnej tarczy :

  Uwaga:

  - Obowiązują **zasady zachowania**: ładunku Q , liczby barionowej B , dziwności S , ...
  - W zderzeniu ciężkich jonów, w stanie początkowym: • dziwność $S = 0$ • brak antymaterii.
    → niektóre kanały, choć dozwolone energetycznie, i tak są zablokowane.

Cząstka	Skład kwarkowy	Masa [GeV]	„Najtańszy” kanał NN	T^{Min} [GeV]
π^+	$u\bar{d}$	0.139	$NN \rightarrow NN\,\pi^+$	0.29
K^+	$u\bar{s}$	0.494	$NN \rightarrow N\,K^+\,\Lambda^0$	1.6
K^-	$s\bar{u}$	0.494	$NN \rightarrow NN\,K^+\,K^-$	2.5
p	uud	0.938	$NN \rightarrow NN\,p\bar{p}$	5.6

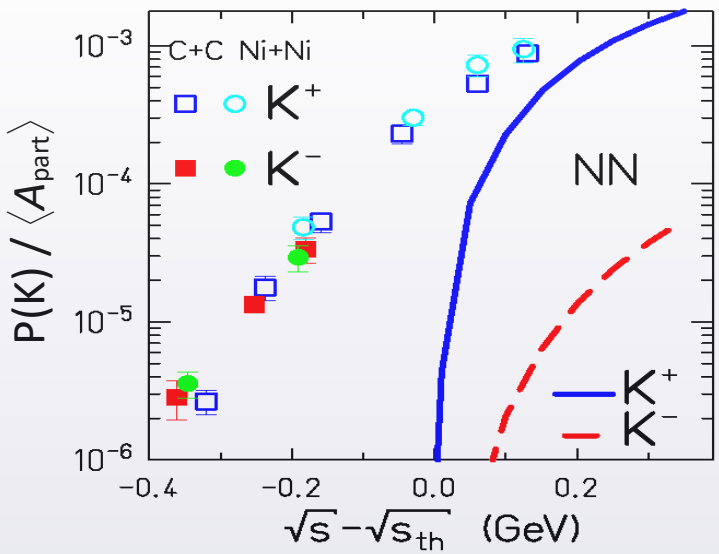
Nb. Λ^0 (uds) : barion z 1 kwarkiem dziwnym. $m_\Lambda = 1.116$ GeV, $q = 0$, $S = -1$

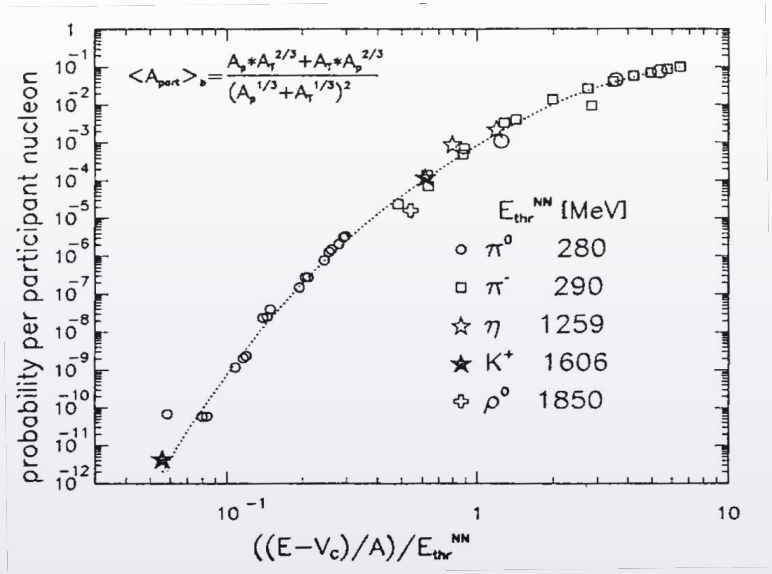
Barion : (zazwyczaj) ⟶ hadron złożony z 3 kwarków (liczba barionowa $B = 1$)

Produkcja nowych cząstek w zderzeniach AA

F. Laue et al., Phys. Rev. Lett. 82, 1640 (1999)

- **Przechodząc do zderzeń jądro-jądro (AA):**





V. Metag, Prog. Part. Nucl. Phys. 30, 75 (1993)

→ **dla AA, przy *T* wiązki poniżej wartości progu: wyraźna produkcja cząstek!**

- **Przyczyny podprogowej produkcji cząstek:**
  - Ruch własny nukleonów w jądrze („*ruch Fermiego*”)
  - Kanały wielociałowe (zderzenie > 2 nukleonów, np. $NNN \rightarrow NNN\pi^0$)
    Kanały wielostopniowe (np. ① $NN \rightarrow N\Delta$, a następnie ② $N\Delta \rightarrow NK^+\Lambda$)
  - Modyfikacje (m.in.) mas hadronów w gęstej i podgrzanej materii jądrowej

Energia progowa a ruch Fermiego

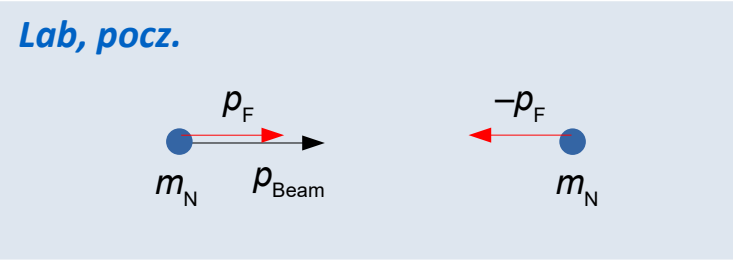
- Przypadek najbardziej sprzyjający powiększeniu *energii swobodnej* : dwa nukleony z $p = p_F$, wektory złożone konstruktywnie.

- Sposób obliczenia $\sqrt{s}$:

1) Boost p_F z układu jądra wiązki do Lab ($\rightarrow p_{Tot}$)

2) Modyfikacja „lewej" strony bilansu wielkości „*s*"

$$(E_{Tot} + E_{Target})^2 - (p_{Tot} - p_{Target})^2 = s = (2m_N + m_X)^2$$



Rozwiązanie analityczne:

$$\begin{cases} p_{Beam}^{Min} = m_N\left(1 + \frac{r}{2}\right)\left(1 + 2x^2\right)\sqrt{r(4 + r)} - 2p_F\left(1 + 2r + \frac{r^2}{2}\right)\sqrt{1 + x^2} \\ x = p_F / m_N \\ r = m_X / m_N \end{cases}$$

... nie na pamięć :)

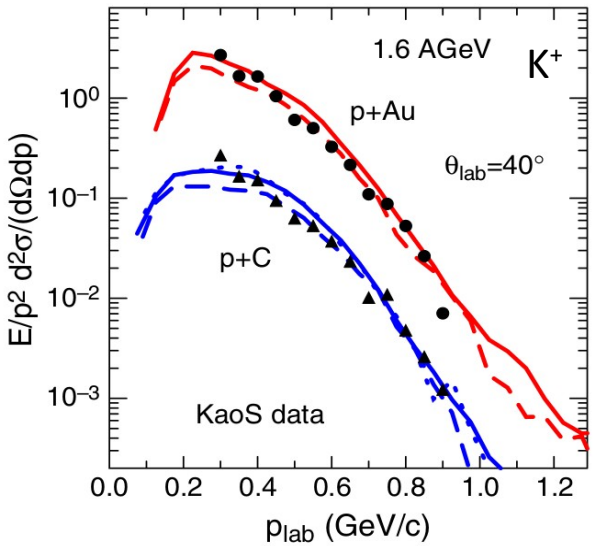
Cząstka	Masa [GeV]	„Najtańszy" kanał NN	T^{Min} (NN) [GeV]	T^{Min} (NN $\oplus$ p_F) [GeV]
π^+	0.139	NN $\rightarrow$ NN π^+	0.29	0.019
K^+	0.494	NN $\rightarrow$ N $K^+\Lambda$	1.58	0.60
K^-	0.494	NN $\rightarrow$ NN $K^+ K^-$	2.5	1.1
p	0.938	NN $\rightarrow$ NN $p\bar{p}$	5.6	2.8

Sukces! ale... *czy ruch Fermiego wyjaśnia całość produkcji cząstek?*

- ***Przykład***:

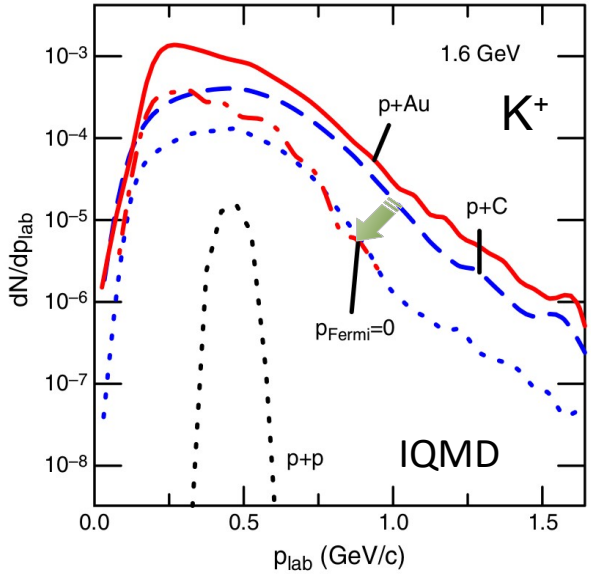
Symulacja produkcji mezonu K^+ w modelu IQMD,
w zderzeniach proton+proton , proton + ^{12}C i proton + ^{197}Au

- Dobrano T_{Lab} (p) = 1.60 GeV.
  (bo to minimalnie powyżej progu T^{Min} (NN) = 1.58 GeV)
- Zmierzony rozkład pędowy K^+ ze zderzeń p+C i p+Au
  jest całkowicie odtworzony (⇒ można tu zaufać modelowi).



W ramach symulacji:

- Rozkład p_{Lab} dla K^+ z p+p : wąski „jak igła”
- Rozkład p_{Lab} dla K^+ z p+C : wyższy i „rozległy”
- „wyłączenie” ruchu Fermiego w p+C
  → zawężenie rozkładu K^+, ale nie aż do „igły” z p+p
- Czy jednak oczekujemy zawężenia aż do przypadku p+p?
  Spróbujmy przeskalować p + p do p + ^{12}C.
  Zakładając, że krotność $K^+ \sim A$, powinniśmy przemnożyć rozkład K^+ z p+p przez 12. Wyjaśnimy wtedy wysokość. Ale nie szerokość!

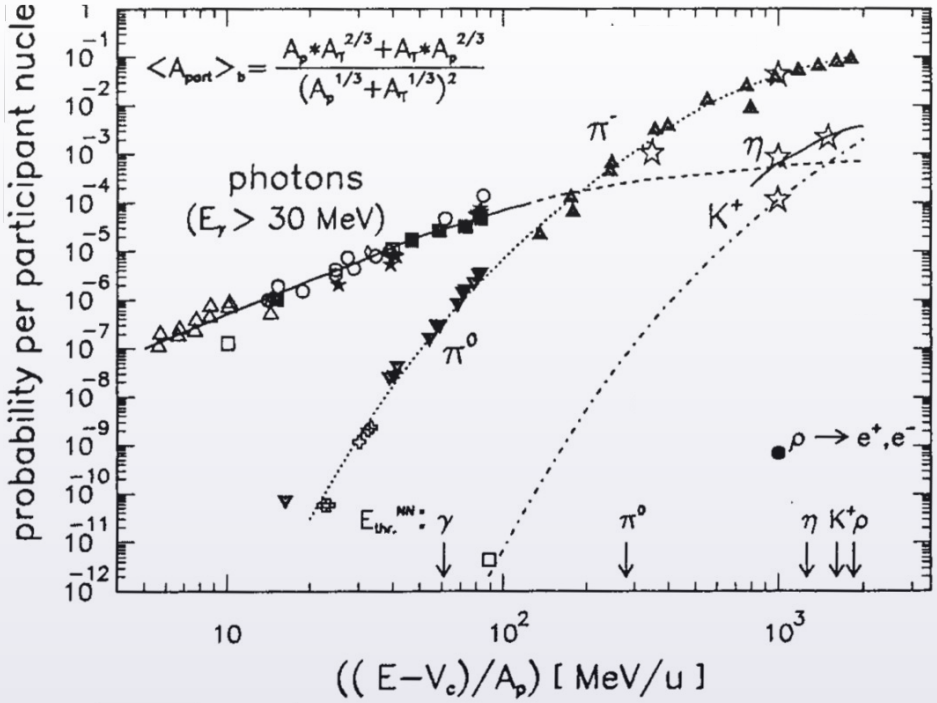


C.Hartnack et al., Phys.Rep. 510, 119 (2012)

Muszą być inne niż ruch Fermiego przyczyny podprogowej produkcji K^+

Produkcja mezonów

V.Metag, Prog. Part. Nucl. Phys. 30, 75 (1993)



Typ	Skład	*m* [GeV/c²]
π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$	135
π^-	$d\bar{u}$	140
K^+	$u\bar{s}$	495
η	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})$	548
ρ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$	776

- Krotność produkcji na zderzenie:

$$N_{\text{cząstka}} = \frac{\sigma_{\text{cząstka}}}{\sigma_{\text{zderzenie}}}$$

- Wykres:

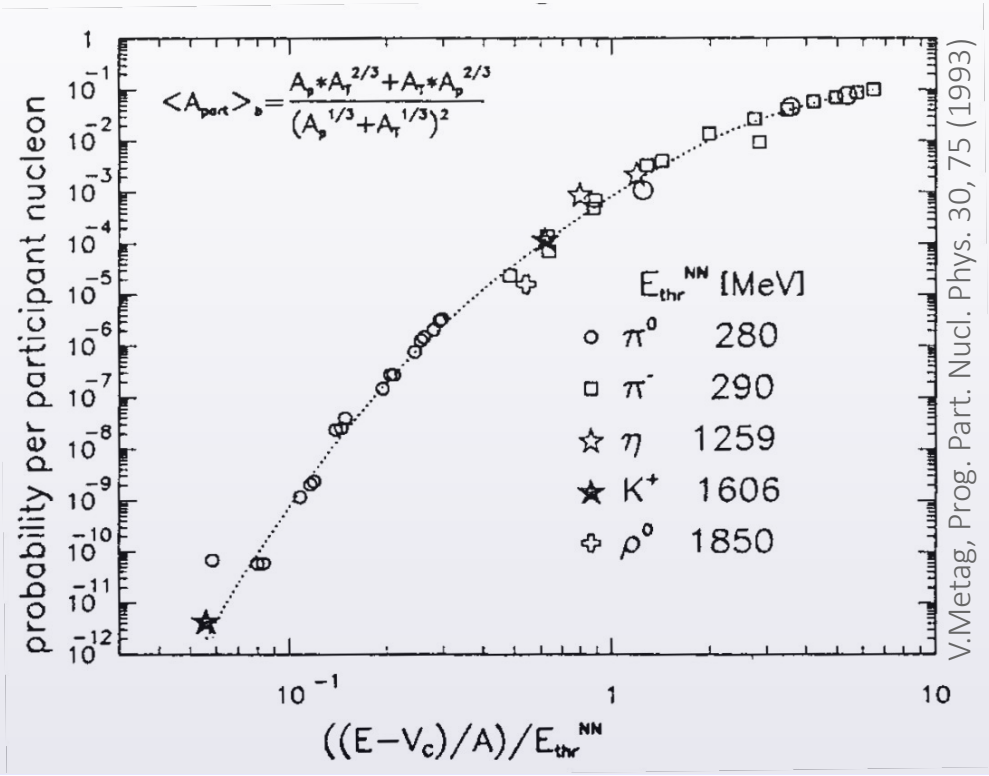
$$\frac{N_{\text{cząstka}}}{\langle A_{\text{part}}\rangle_b} = f\left(\frac{T_B - V_{Coul}}{A_T}\right)$$

- Produkcja fotonów i mezonów ($q\bar{q}$) :
  - dla każdej z cząstek narasta z T_{Beam} ,
  - rozpoczyna się głęboko poniżej progu NN
- Już od $T_{Beam} \approx 20A$ MeV : produkcja π^0 .

  Przy $T_{Beam} \approx 800A$ MeV (a nawet 80*A* MeV) : produkcja cząstek z kwarkiem dziwnym

- V. Metag, 1993:

  Jeśli dla każdego przypadku produkcji mezonu, podzielić T_{Beam} / A przez T progową dla tego mezonu, to niemal wszystkie dane uplasują się na jednej krzywej! (... bardzo silny efekt)



- Oś X:

$$\frac{T_B - V_{Coul}}{A_T} \Rightarrow \frac{T_B - V_{Coul}}{A_T} \Big/ T_{progowa\ NN}$$

- Skalowanie:

  przechodzi przez 11 rzędów wielkości !

$$\frac{P}{\langle A_{\text{part}}\rangle_b} = N \cdot \exp\left(P_0 + P_1 x + P_2 x^2\right)$$

$$\begin{cases} N = 9.36 \times 10^{-4} \\ P_0 = 3.76 \\ P_1 = -0.817 \\ P_2 = 0.091 \end{cases}$$

- Q: czyżby produkcję cząstek należało rozpatrywać globalnie, jako zjawisko zależne tylko od dostępnej energii?

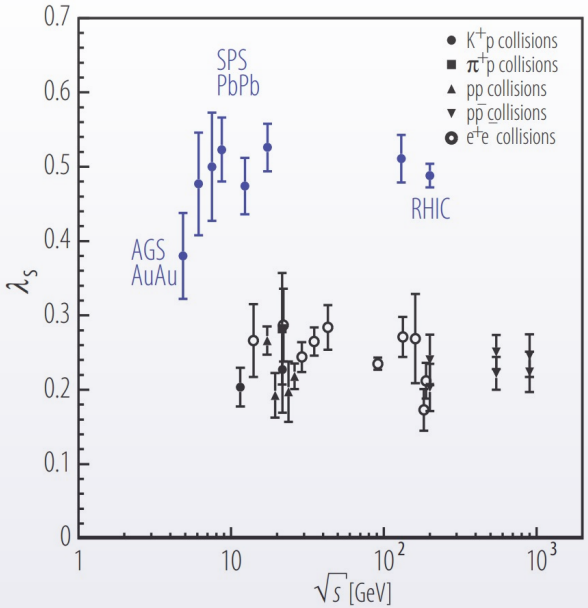
Produkcja hadronów w funkcji energii dostępnej

- W szerszym zakresie energii dostępnych:
  - narasta krotność wszystkich hadronów
  - Dziwność:

wkład opisywany przez "**Wróblewski factor**" λ_s

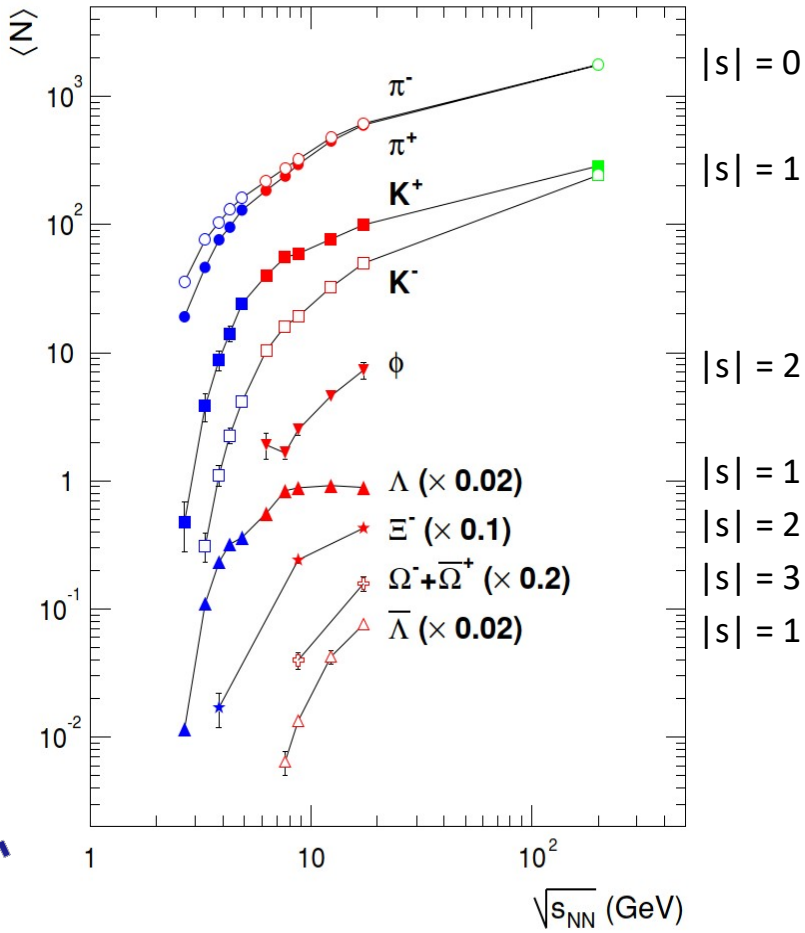
$$\lambda_s \equiv \frac{s\bar{s}}{\frac{1}{2}\cdot\left(u\bar{u} + d\bar{d}\right)}$$

F. Becattini, R. Fries, "QCD Confinement Transition: Hadron Formation", Springer (2010)



W zderzeniach jądro-jądro, przy $\sqrt{s_{NN}} \sim 10$ GeV wkład dziwności osiąga 25%.

Au+Au, zderzenia centralne



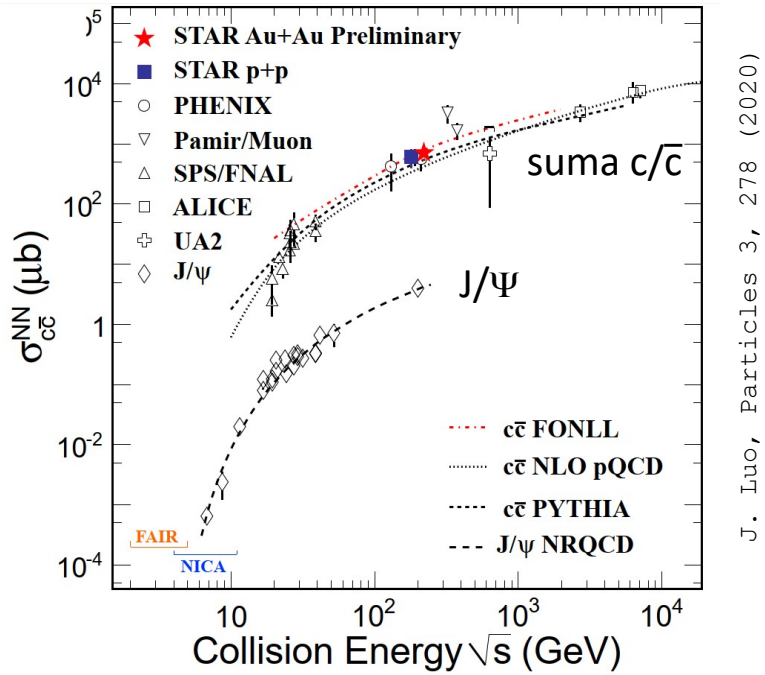
C. Blume, J. Phys. G 31, S57 (2005)

- Hadrony z dziwnością. Zauważalna hierarchia krotności:

$$N(|S|=0) > N(|S|=1) > N(|S|=2) > N(|S|=3)$$

Produkcja hadronów w funkcji energii dostępnej

- Podstawowe hadrony z kwarkiem c:
  - mezony: $D^+ (c\bar{d})$ $D^0 (c\bar{u})$ $D_s^+ (c\bar{s})$ oraz $J/\psi (c\bar{c})$
    (anty) $D^- (\bar{c}d)$ $\bar{D}^0 (\bar{c}u)$ $D_s^- (\bar{c}s)$
  - bariony: Λ^+_c (udc) Σ^{++}_c (uuc) Σ^+_c (udc) Σ^0_c (ddc) .....
    (anty) ...

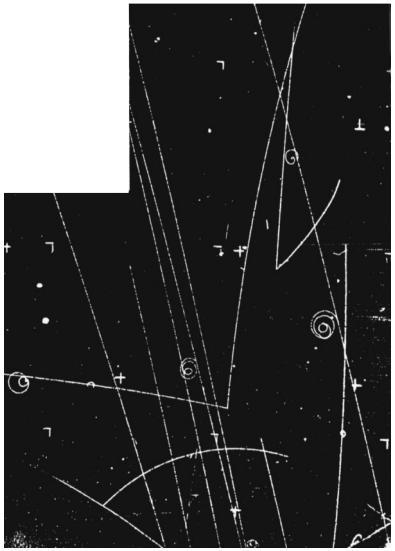


J. Luo, Particles 3, 278 (2020)

Porównajmy z $\sigma_{NN,\,inel.} \sim 40$ mb .
Produkcja powabu zaczyna mieć realny wpływ przy $\sqrt{s_{NN}} \gtrsim 100$ GeV

Rozpad cząstki

- Na zdjęciu: reakcja $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0$ w komorze pęcherzykowej w polu magnetycznym.
  Oba hadrony są obojętne, więc nie zostawiły śladu.
  Ale widać produkty ich rozpadu: $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ i $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$.

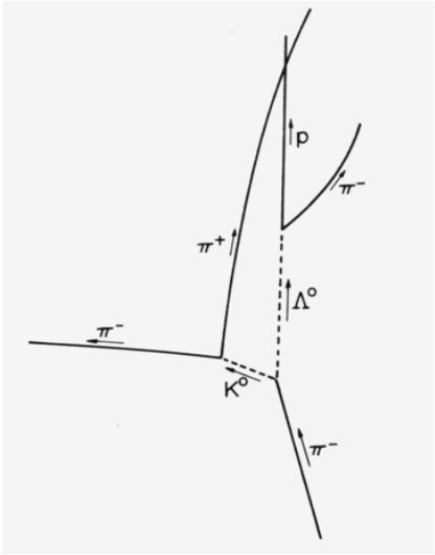


- **Rozpady** są skutkiem oddziaływań w cząstce: silnych, EM i słabych.
  Ogólny wyróżnik typu rozpadu: skala czasu życia (τ) przed rozpadem.

Typ rozpadu	τ [s]	Przykład
Silny	10^{-23} .. 10^{-21}	$\Delta^0 \rightarrow p \pi^- : \quad \tau = 5 \cdot 10^{-23}$ s
EM	10^{-20} .. 10^{-16}	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma : \quad \tau = 8 \cdot 10^{-17}$ s
Słaby	10^{-10} .. 10^{-8}	$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu : \quad \tau = 1.2 \cdot 10^{-8}$ s

Zwykle cząstka może rozpaść się na kilka sposobów.
Kanoniczny zasób wiedzy o cząstkach i rozpadach: **PDG** (Review of Particle Physics)

- Fotografia wykonana jest w układzie Lab.
  Jednak dla rozpadu naturalnym jest układ CM substratu. W nim substrat spoczywa.
  W CM też widać, że masa substratu $\geq$ suma mas produktów.
  Powrócimy do tego wkrótce.



Rozpad cząstki: związek $\Gamma = \hbar / \tau$

- [Rozważmy] cząstkę we własnym układzie współrzędnych. Ma ona energię $E = Mc^2$.
- Równanie kwantowe (Diraca, Kleina-Gordona, również Schrödingera):

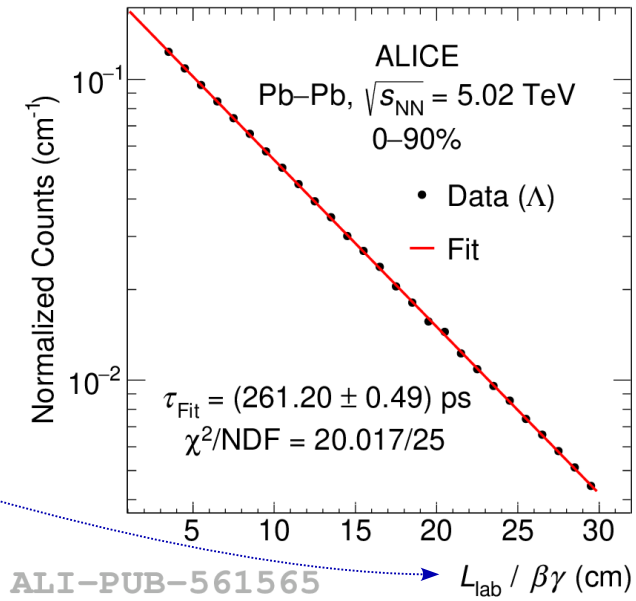
$$\psi(t) = \psi(0)\, e^{i\omega_0 t} \quad , \quad \text{gdzie} \quad \omega_0 = \frac{E}{\hbar}$$

- Cząstki nietrwałe rozpadają się wg **prawa rozpadu promieniotwórczego**:

$$N(t) = N(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Gdzie to widać? Np. długość toru lotu L_{Lab} barionu Λ od powstania do rozpadu.
Przelot Λ przez L_{Lab} ruchem jednostajnym z prędkością βc zabiera czas $t_{Lab} = \gamma \cdot t_{CM}$.
Mamy:

$$L_{Lab} = \beta c\, t_{Lab} = \beta c\, \gamma t_{CM} \quad \Rightarrow \quad t_{CM} = \frac{L_{Lab}}{\beta c \gamma}$$



- Prawdopodobieństwo przeżycia cząstki $P(t) \sim N(t)$, a zarazem $P \sim |\psi|^2$.

$$\Rightarrow \quad \psi(t) = \psi(0)\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad , \text{ ale jeszcze:} \quad \times e^{i \cdot \text{faza}}$$

Łącznie, $\psi(t) = \psi(0)\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \cdot e^{i\omega_0 t}$

Rozpad cząstki: związek $\Gamma = \hbar / \tau$

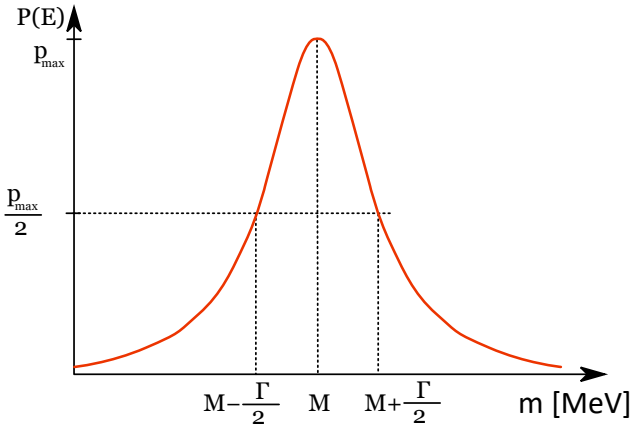
- Funkcję falową $\phi(\omega)$ w reprezentacji energii otrzymamy z transformaty Fouriera funkcji $\psi(t)$:

$$\phi(\omega) = \int_0^\infty \psi(t) e^{i\omega t} dt = \ldots = \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\frac{1}{2\tau}}$$

a prawdopodobieństwo – to $|\phi|^2$:

$$|\phi(\omega)|^2 \sim \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} \sim \frac{1}{(m - M)^2 c^2 + \left(\frac{\hbar}{2\tau}\right)^2}$$

(Rozkład Breita-Wignera)



- Szerokość połówkowa Γ (na której rozkład spada do połowy wartości max.) spełnia więc związek:

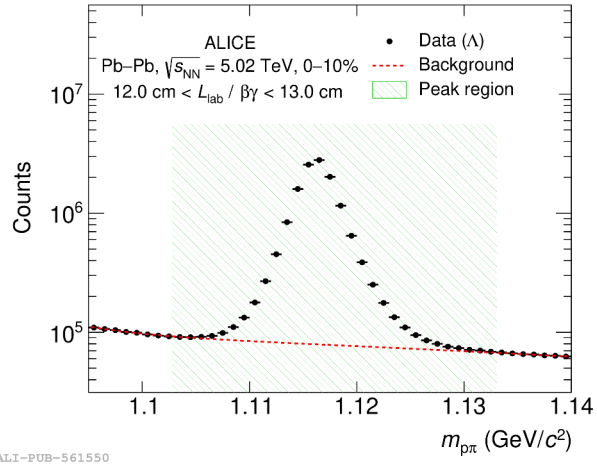
$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

- Ile ona wynosi np. dla Λ (τ = 261 ps) ?

$$\Gamma = \frac{\hbar c}{c\tau} = \frac{197.3 \text{ MeV fm}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 2.61 \cdot 10^{-10} \text{ s}} = 2.5 \cdot 10^{-12} \text{ MeV}$$

Hm, mało. A jak wyglądał zmierzony rozkład masy Λ ?
– ma szerokość kilku MeV…

Powód: obserwowana szerokość wynika z niepewności pomiaru detektorem.
Szerokość „kwantowa” (tzw. „**naturalna**”) dla Λ w tym ginie.



Rozpad cząstki: związek $\Gamma = \hbar / \tau$

- Oszacujmy, jakie czasy życia można zmierzyć z relacji $\Gamma = \hbar / \tau$, przyjmując obecne zdolności rozdzielcze detektorów $\Gamma_{min} \gtrsim 1$ MeV .

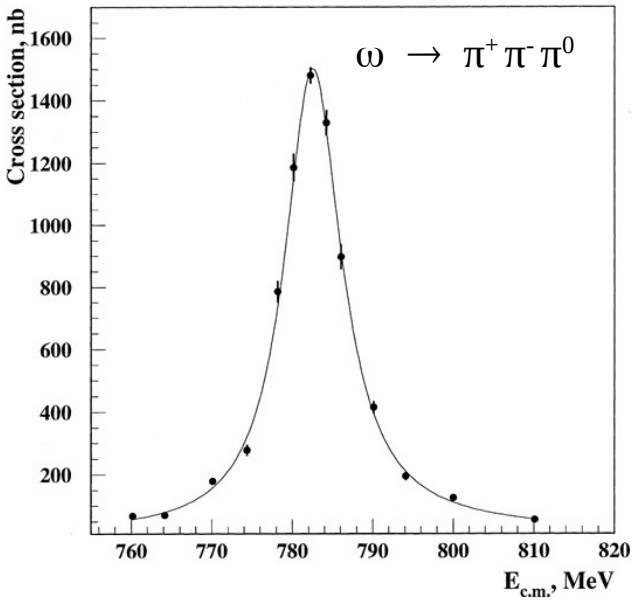
$$\tau \lesssim \frac{\hbar c}{\Gamma_{\min} c} = \frac{197.3 \text{ MeV fm}}{1 \text{ MeV} \cdot 3 \cdot 10^{8} \text{ ms}^{-1}} = 6.5 \cdot 10^{-22} \text{ s} \approx 200 \text{ fm}/c$$

➡ Obecnie, z rozkładu masy możemy wydobyć τ jedynie dla cząstek najkrócej żyjących (to klasa cząstek rozpadających się silnie) .

- Przykład:

rozkład masy mezonu ω w kanale $\pi^+ \pi^- \pi^0$ posiada $\Gamma = 8.7$ MeV.

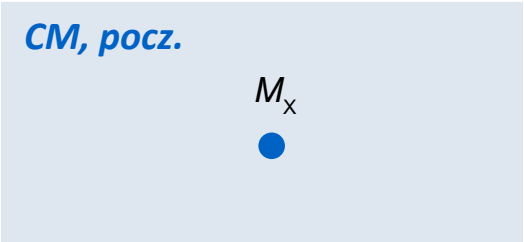
$\Rightarrow$ mezon ω ma czas życia $\tau = 7.6 \cdot 10^{-23}$ s.

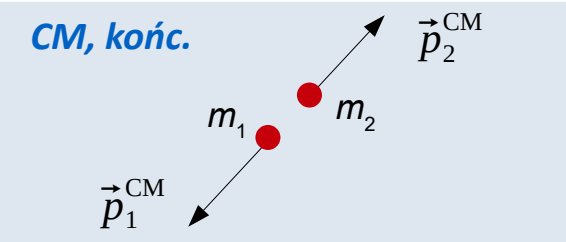


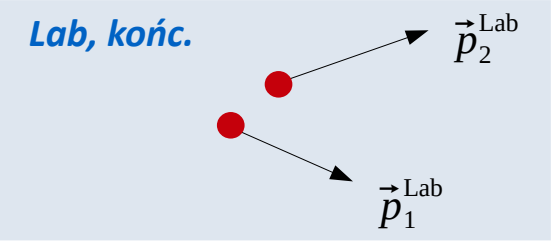
R.R.Akhmetshin et al., Phys. Lett. B 476, 33 (2000)

Hipoteza rozpadu cząstki: masa niezmiennicza

- Poszukujemy cząstki X, której nie możemy zaobserwować wprost, ale ma ona taki kanał rozpadu, w którym wszystkie produkty ($m_{1,2,\ldots}$) możemy zmierzyć.







$$M_X^2 = s = \left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2 = M_{Inv}^2$$

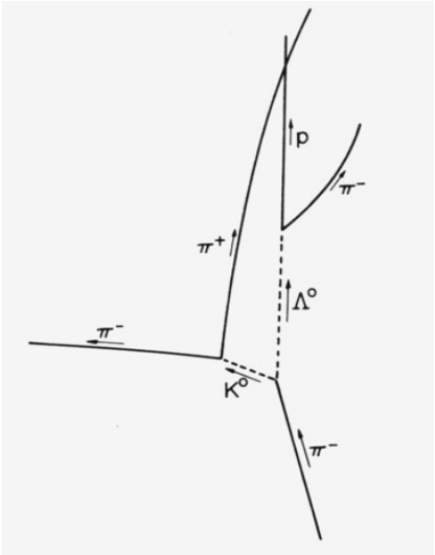
Masa niezmiennicza (invariant mass)

- Powróćmy do obrazka rozpadów K^0 i Λ (każde rozpada się na 2 ciała) .
  W obu przypadkach masa substratu $\geq$ suma mas produktów.

  W układzie CM cząstki M_X zasada zachowania pędu nakłada, aby $|\bar{p}_1| = |\bar{p}_2|$.

  Z bilansu E dostępnej ($\sqrt{s}$) wynika, że **długości p_i w CM** są jednoznaczne:

$$\left|p_1^{CM}\right| = \left|p_2^{CM}\right| = \frac{\sqrt{\left(M_X^2 - (m_1 + m_2)^2\right)\left(M_X^2 - (m_1 - m_2)^2\right)}}{2M_X}$$



Hipoteza rozpadu cząstki: masa niezmiennicza

- ***Problem***: w każdym evencie może być więcej cząstek typu takiego, jak produkty (1, 2, …) .
  Nie wiemy, które z nich (jeśli w ogóle któreś) są rzeczywiście produktami rozpadu cząstki X .

  ⇒ dla wszystkich kombinacji tworzymy rozkład M_{Inv} .
  Sprawdzamy, czy przy wartości M_X jest maksimum („peak”).

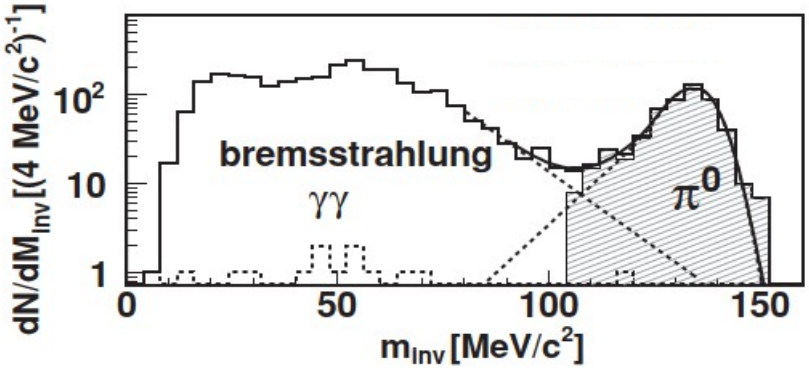
- **Przykład**:

  Poszukiwanie $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ze zderzeń Ta+Au @ 40A MeV.

  Maksimum od π^0 wyraźne, na tle innych par $\gamma\gamma$.

  Te „inne” wysokoenergetyczne fotony pochodzą bezpośrednio ze strefy zderzenia:

  Gdy cząstka naładowana w polu EM innych cząstek zmienia pęd, to wysyła foton.
  Nazwa: **promieniowanie hamowania** („**bremsstrahlung**”) .



KP et al, Phys. Rev. C 81, 054912 (2010)

Hipoteza rozpadu cząstki: masa niezmiennicza

- Jak widać, para cząstek „kandydatów na produkty rozpadu” ma alternatywę:
  cząstki pochodzące wprost z reakcji, nieskorelowane ze sobą.

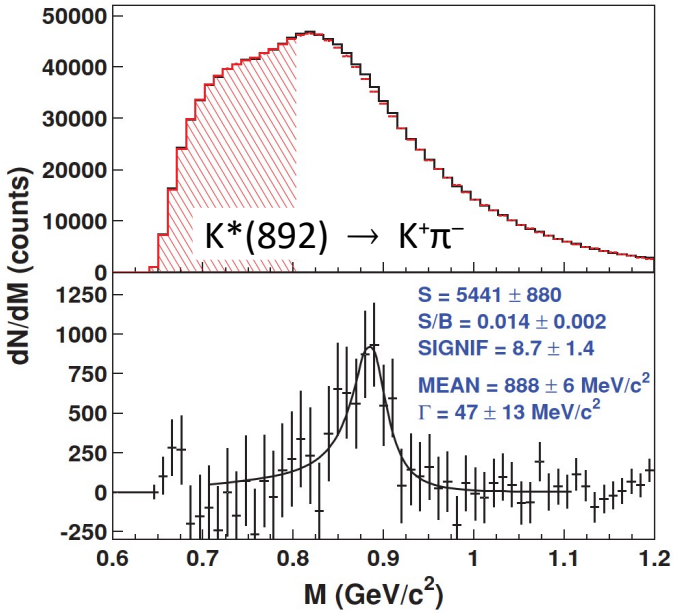
  Można tę alternatywę odfiltrować, jeśli cząstka poszukiwana rozpada się wyraźnie poza tarczą.
  Do tego trzeba zrekonstruować **wierzchołek** („**vertex**”) **zderzenia jąder** oraz **vertex rozpadu cząstki**.

⊙ Do tego – detektory muszą mieć odpowiednią rozdzielczość.
Obecna technologia pozwala rozróżniać vertexy dla cząstek o czasach życia $\tau \gtrsim 10^{-13}$ s.

Cząstki rozpadające się na drodze oddziaływań słabych – daje się więc wydzielić.
Tych rozpadających się silnie ($\tau \approx 10^{-22}$ s) i EM ($\tau \approx 10^{-18}$ s) zwykle się nie da (tą metodą).
Np. dla π^0, $\tau \approx 10^{-16}$ s $\Rightarrow$ nie daje się.

Gdy na dodatek produkty rozpadu są hadronami takich typów,
które w reakcji są skądinąd obficie produkowane,
$\Rightarrow$ to w widmie M_{Inv} sygnał z rozpadu może (prawie) zaniknąć
w tle od nieskorelowanych cząstek z reakcji.

Przykład dla $K^*(892) \rightarrow K^+\pi^-$:



X. Lopez et al. Phys. Rev. C 81, 061902(R) (2010)

Hipoteza rozpadu cząstki: masa niezmiennicza

- **Przypadek „dobry”**: $\Lambda \rightarrow p\pi^-$.

  Event ze zderzenia jąder atomowych: wiele π^-, jeszcze więcej protonów.
  Większość tych cząstek nie pochodzi z rozpadu Λ.

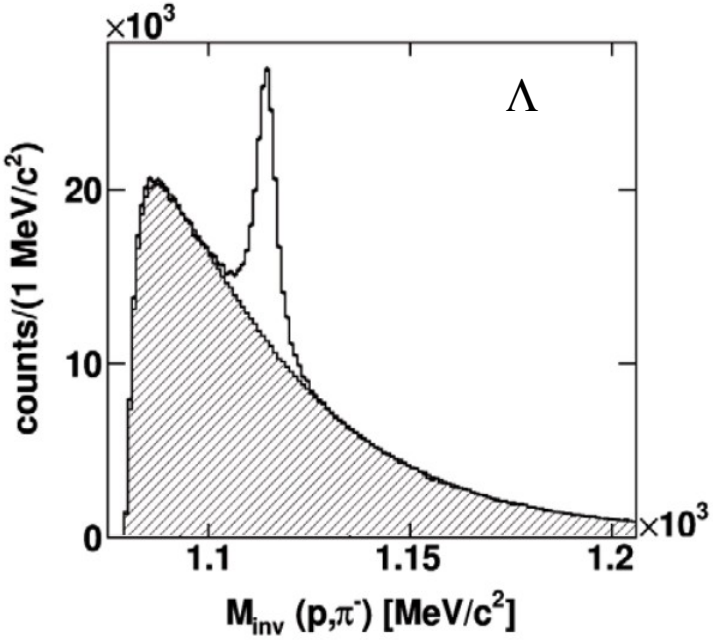
- Średni czas życia $\tau(\Lambda) = 2.6 \cdot 10^{-10}$ s.
  Oszacujmy, jak daleko od tarczy nastąpi rozpad.
  Przyjmijmy eksperyment na stacjonarnej tarczy i Λ poruszająca się z prędkością CM NN.

  Załóżmy np. $\beta_{NN} = 0.75$. Typowa droga Λ :

$$L_\Lambda = \gamma_{NN} \cdot (\beta_{NN}\, c) \cdot \tau = 8.8 \text{ cm}$$

→ Pary $\{p\pi^-\}$ dobrane przypadkiem (głównie wprost ze zderzenia) można odrzucić, akceptując tylko takie pary, których wierzchołek powstania $\gtrsim$ ok. 1 cm.

- Aby otrzymać rozkład na wykresie, zastosowano takie cięcie.
  Jednak rozważono więcej cech (por. następna strona)



G. Agakishiev et al. (HADES), Eur. Phys. Jour. A 47, 21 (2011)

Topologia rozpadów cząstek V0

- Cząstka ciężka, rozpadająca się na parę: „**cząstka V**”. Jeżeli jest neutralna – mówimy „**cząstka V0**”.
  Przykłady: $\Lambda \to p\pi^-$, $K^0_s \to \pi^+\pi^-$, $\phi \to K^+K^-$, $D^0 \to \pi^- K^+$, $J/\psi \to \mu^+\mu^-$, ...

- **Metoda rekonstrukcji**:
  [*krok 1*] skombinowanie w pary wszystkich torów o typach z produktów rozpadu – są to „kandydaci” danego rozpadu.
  [*krok 2*] dla każdej pary torów – rozważenie „topologii” (cech kształtu).

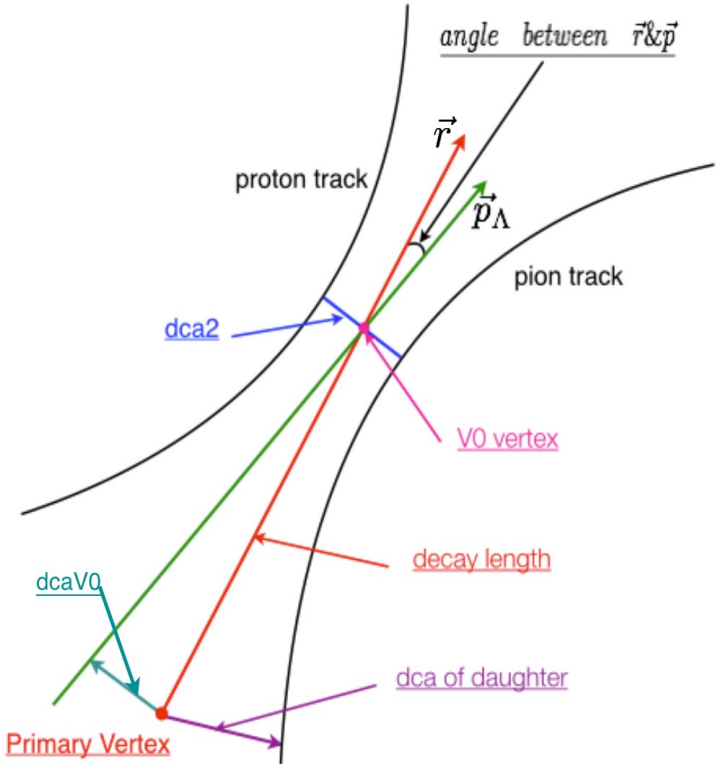
① Aby odciąć większość par bezpośrednio z reakcji,
vertex V0 powinien być oddalony od **Vertexu reakcji** (”**Primary Vertex**”)
⇒ filtr: **decay length** > min .

② W eksperymencie na stacjonarnej tarczy, prędkość v^{CM} jest „do przodu”
⇒ **składowa Z Vertexu V0** ma pozycję > 0 (lub: bardziej + niż -).

③ Idealnie, tory pary powinny się zbiec w **Vertexie rozpadu V0**.
Niedokładności pomiaru ⊕ rozpraszanie w powietrzu ⇒
zrekonstruowane tory miną się w pewnej odległości (na rys. : **dca2**).
Pary fałszywe mają duże **dca2** ⇒ filtr: **dca2** < max .

④ Skoro tory produktów zbiegają się przy Vertexie V0,
to nie zbiegają się przy Vertexie Reakcji
⇒ filtr: „**dca of daughter**” > min .

⑤ **Z 4-pędów produktów składa się 4-pęd kandydata na „rodzica”**.
Nienaładowany substrat porusza się po linii prostej.
Jeśli pochodzi on z reakcji, to $\bar{p}$ wskazuje na **Primary Vertex**.
⇒ filtr: „**dcaV0**” < max .



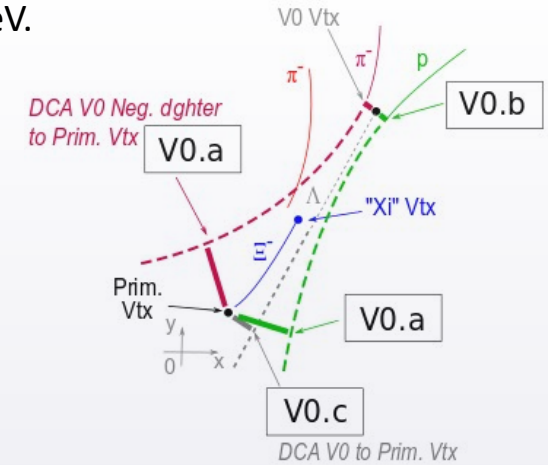
[Źródło: STAR @ BNL]

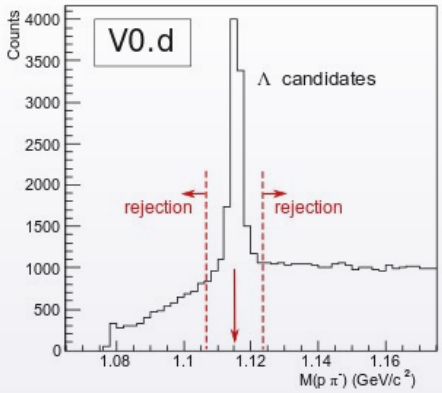
Przykład innej rekonstrukcji: barion Ξ^-

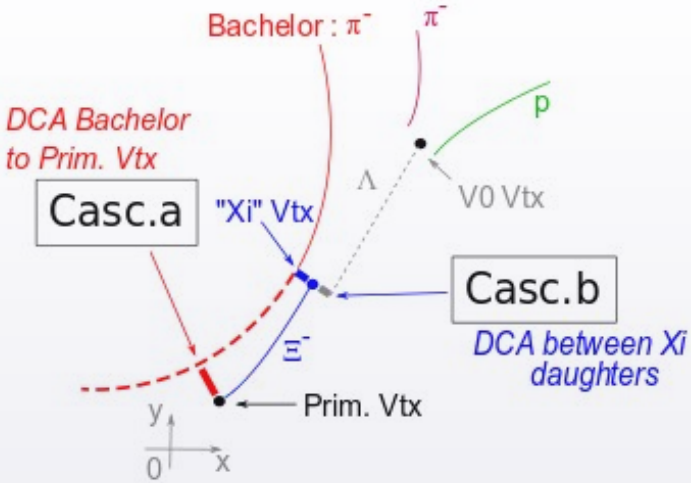
- Ξ^- [*ksi minus*] składa się z kwarków dss i ma masę 1322 MeV.
  Po $\tau \sim 1.6 \cdot 10^{-10}$ s rozpada się $\rightarrow \Lambda \pi^-$ (BR $\sim$ 100%).

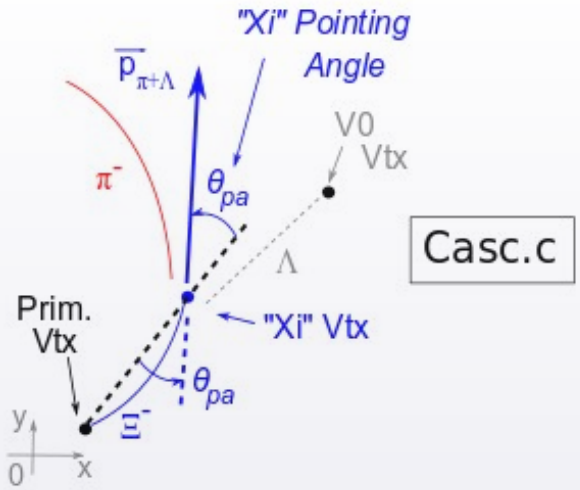
- **Metoda rekonstrukcji**:
  [*krok 1*] rekonstrukcja Λ z par $p\pi^-$
  [*krok 2*] rekonstrukcja Ξ^- z par $\Lambda\pi^-$

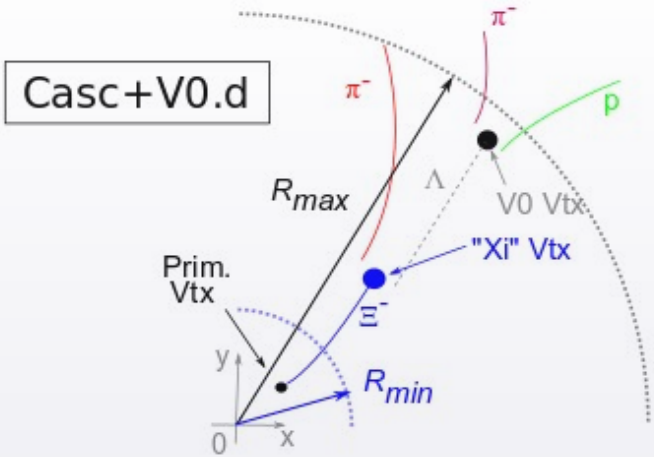
  [Źródło: ALICE @ CERN]





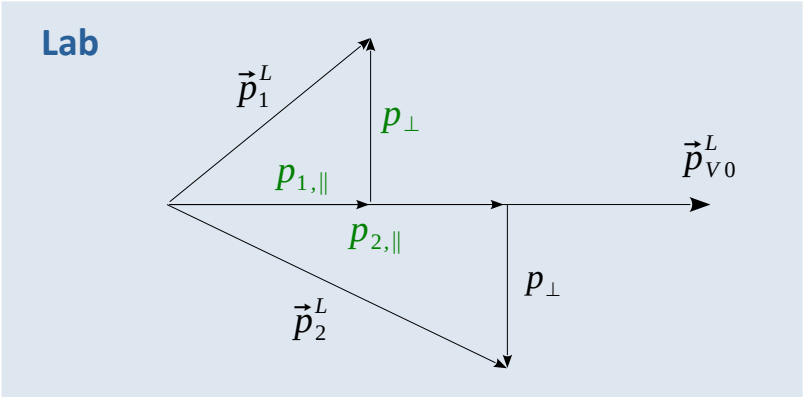






Rozpady V0: wykres Armenterosa-Podolanskiego

- **Spostrzeżenie dla bardzo szybkich ($\beta \approx 1$) cząstek rozpadających się na 2** J. Podolanski, R. Armenteros, Phil. Mag. 45, 13 (1954)



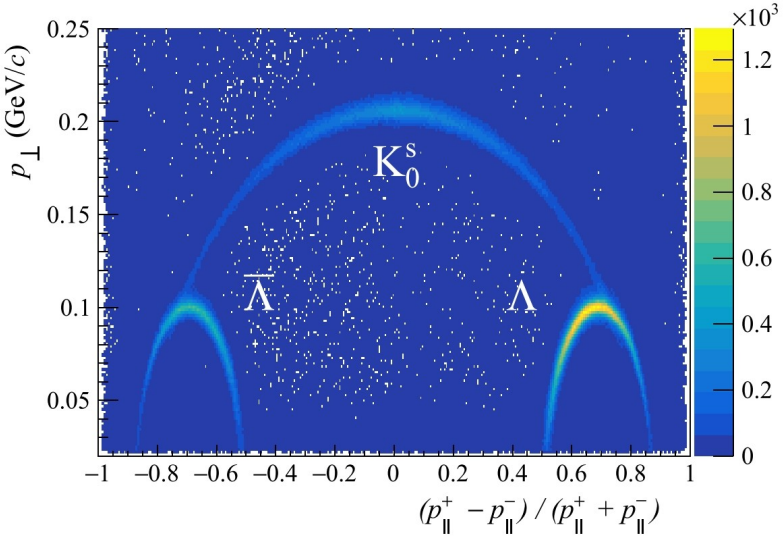
W układzie Lab, z pędów dwóch produktów składamy pęd rodzica.

Tworzymy $p^L_{1/2,\,\parallel}$ (rzuty $\bar{p}_1$ i $\bar{p}_2$ na pęd rodzica)

i stąd: $\alpha \equiv \dfrac{p^L_{1,\parallel} - p^L_{2,\parallel}}{p^L_{1,\parallel} + p^L_{2,\parallel}}$ (względna asymetria pędów $\parallel$)

Również: $p_\perp$ (składowa $\perp$)

➡ Wykres na płaszczyźnie [α , $p_\perp$] , przykład dla K^0_s, Λ i $\bar{\Lambda}$



Compass Collab., Phys. Lett. B 824, 136834 (2022)

➡ Obserwacje :

- Pary z rozpadu cząstki tworzą na płaszczyźnie [α , $p_\perp$] konkretną **elipsę**.
- Gdy produkty są identycznej masy ($K^0_s \to \pi^+\pi^-$) , to elipsa ma symetrię wokół $\alpha = 0$.
- Gdy się różnią masą ($\Lambda \to p\,\pi^-$) , to elipsa ma oś symetrii wokół innego „α_0” .
- Efekt można wyprowadzić z Tr. Lorentza CM → Lab + zał. $\beta = 1$

Rekonstrukcja rozkładu tła: mieszanie zdarzeń

- Chcąc wydobyć sygnał, musimy **odjąć tło**.
  Pytanie: jak to tło modelować?
  Gdy sygnał ma wąski profil, tło można dopasować 'ad hoc'.
  Jednak za takim modelem tła nie stoi argument fizyczny.

- **Metoda mieszania zdarzeń (event mixing method)**

  Jeżeli tłem są emitowane ze zderzenia cząstki nieskorelowane ze sobą, to skonstruujmy **pary z cząstek z różnych eventów**.

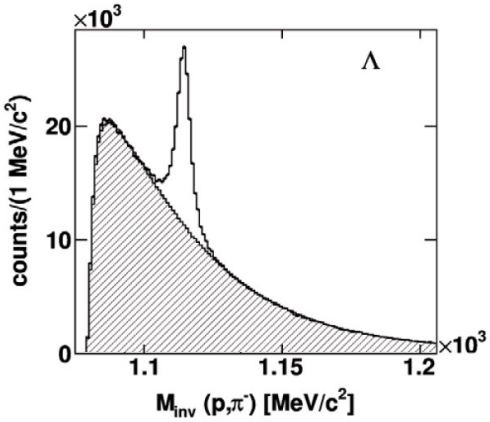
  Cechy:

  - Składniki pary nie są skorelowane
  - Każdy składnik z prawdziwego rozkładu fizycznego
  - Rozkład w ramach kątów i pędów mierzonych doświadczalnie
  - Takich par będzie znacznie więcej, niż prawdziwych.
  - Po normalizacji rozkład M_{Inv} ma szanse modelować tło.

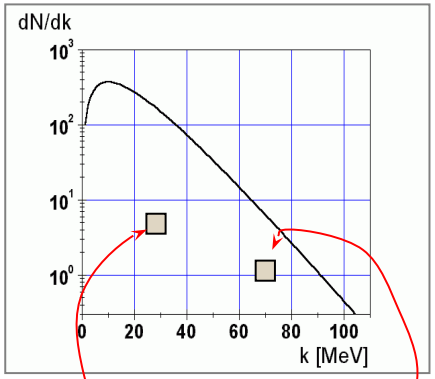
  Wymóg:

  - Oba eventy powinny być z bardzo podobnej klasy zderzenia, np. mieć zbliżone centralności. Inaczej, widma fizyczne, z których pobierane są cząstka 1 i 2 będą mieć różne kształty.

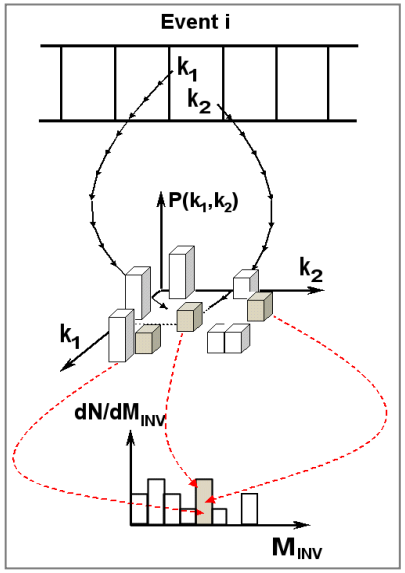
- W ukazywanych rozkładach M_{Inv} dla $\Lambda \rightarrow p\pi^-$ i $K^*(892) \rightarrow K^+\pi^-$, profile zakreskowane otrzymano metodą mieszania zdarzeń. Jak widać, zgodność z tłem jest bardzo wysoka.

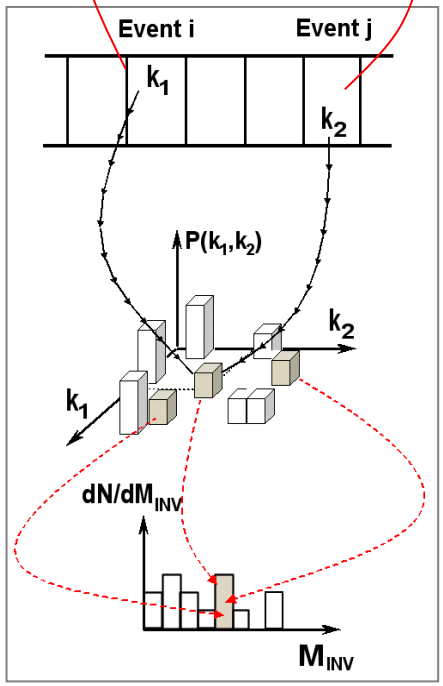


Pary z mieszania zdarzeń



Pary rzeczywiste





Metoda masy brakującej (missing mass)

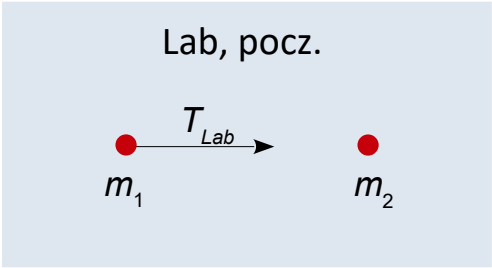
- Czasami w reakcji nie można zmierzyć danej cząstki („X”) (np. detektor cząstek naładowanych nie zmierzy cz. neutralnej). Jeżeli w evencie schwytamy resztę cząstek, to z zasad zachowania można cząstkę X zrekonstruować. Jest to technika tzw. **masy brakującej** (**missing mass**).

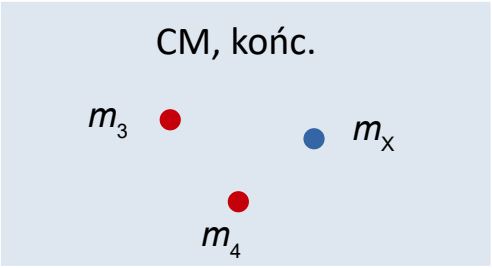
- Przyrównajmy czteropędy:

$$P_{\text{Input}} = P_{\text{Mierzone}} + P_X$$

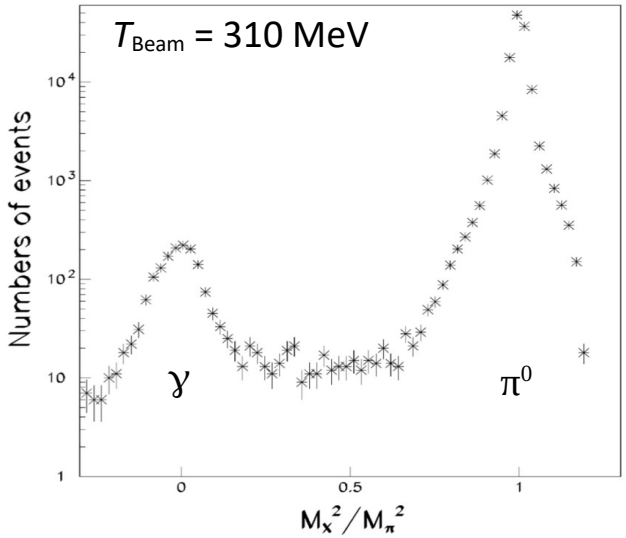
$$\left(P_{\text{Inp}} - P_{\text{Mierz}}\right)^2 = P_X^2$$

$$M_X^2 = \left(E_{\text{Inp}} - E_{\text{Mierz}}\right)^2 - \left(\vec{p}_{\text{Inp}} - \vec{p}_{\text{Mierz}}\right)^2$$

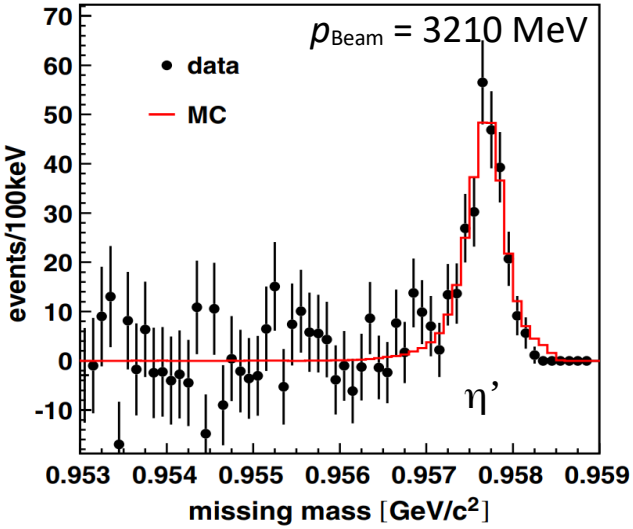




- **Przykład**: reakcja $p + p = p + p + X$, gdy układ nie mierzy cząstek neutralnych.



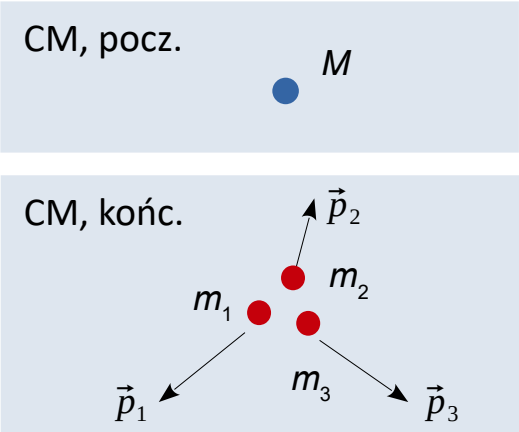
A. Johansson, C. Wilkin, Phys. Lett. B 673, 5 (2009)



E. Czerwiński et al., Phys. Rev. Lett. 113, 062004 (2014)

Wstęp do wykresu Dalitza (Dalitz Plot)

- **Rozpad cząstki o masie *M* na stan końcowy 3 cząstek o masach m_1, m_2 i m_3.**



Energia dostępna: $$M = \sqrt{P^2} \equiv \sqrt{s}$$

Zasady zachowania *E*, *p* (czteropęd): $$P = p_1 + p_2 + p_3$$

można przepisać na kilka sposobów, typu: $$P - p_1 = p_2 + p_3$$

Zdefiniujemy zmienne s_i (lub m_{ij}^2) :

$$s_1 \equiv (P - p_1)^2 = (p_2 + p_3)^2 \equiv m_{23}^2$$
$$s_2 \equiv (P - p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 \equiv m_{13}^2$$
$$s_3 \equiv (P - p_3)^2 = (p_1 + p_2)^2 \equiv m_{12}^2$$

M_{ij} – to masy niezmiennicze podukładu [i, j] .

Sumując s_i i korzystając z zasad zachowania, dostajemy związek:

$$s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

↳ czyli z 3 zmiennych tylko 2 są niezależne. I są to jedyne 2, gdyż:

	12	zmiennych opisujących czteropędy p_1, p_2 i p_3
jest ograniczone przez:	3	więzy (masy m_1, m_2 i m_3) ,
	4	równania zachowujące energię i pęd
	3	dowolność orientacji układu odniesienia.

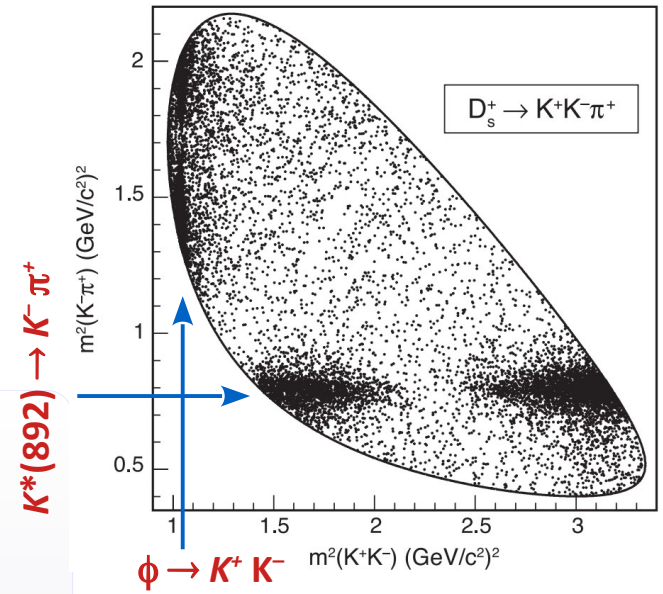
Można więc zhistogramować przypadki na wykresie [s_1, s_2] (**„wykres Dalitza”**)

Wstęp do wykresu Dalitza (Dalitz Plot)

- Wiele materiałów zawiera opis wykresu Dalitza, m.in. **ten wykład** i **ta prezentacja**.

- **Zauważmy**:
  ▷ gdyby rozpad przebiegał tak: $M \to m_1 + m_{23}$,
  $m_{23} \to m_2 + m_3$

  ⇒ to m_{23} byłoby masą cząstki '23' , która się rozpada na ② i ③.



R. Mitchell et al., Phys.Rev. D 79, 072008 (2009)

- **Wykres Dalitza ma ograniczoną dziedzinę.**

Rozważmy np. s_1 i układ cząstki pierwotnej ($\vec{P} = 0$):

$$s_1 \equiv (P - p_1)^2 = P^2 - 2P \cdot p_1 + p_1^2 = \ldots$$

$$\ldots = \left| P \cdot p_1 = ME_1 - \vec{P}\,\vec{p}_1 = ME_1 \right| = M^2 - 2ME_1 + m_1^2$$

Ponieważ $E_1 = \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^{\,2}}$, to dla $\vec{p}_1^{[CM]} = \vec{0}$ s_1 ma maksimum:

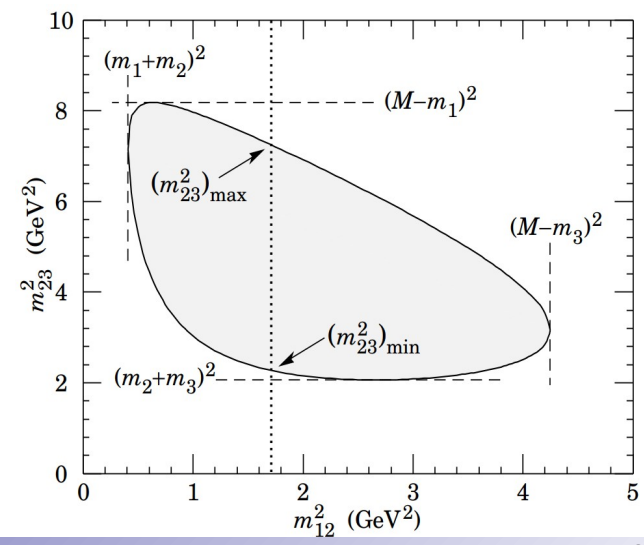
$$s_1^{max} = (M - m_1)^2$$

Skorzystajmy teraz z $s_1 = (p_2 + p_3)^2$ i przejdźmy do układu CM cząstek [2,3].

$$s_1 \equiv (p_2 + p_3)^2 = (E_2 + E_3)^2 - \left(\vec{p}_2^{[23]} + \vec{p}_3^{[23]}\right)^2 = (E_2 + E_3)^2$$

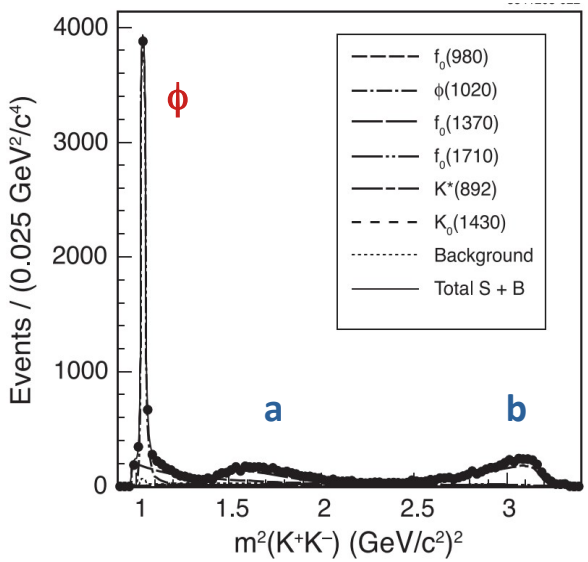
Ponieważ $E_i = \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^{\,2}}$, to dla $\vec{p}_2^{[23]} = \vec{p}_3^{[23]} = \vec{0}$ s_1 ma minimum:

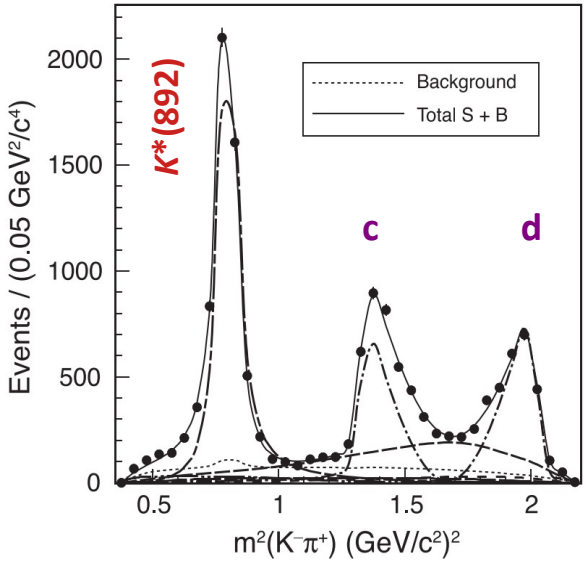
$$s_1^{min} = (m_2 + m_3)^2$$

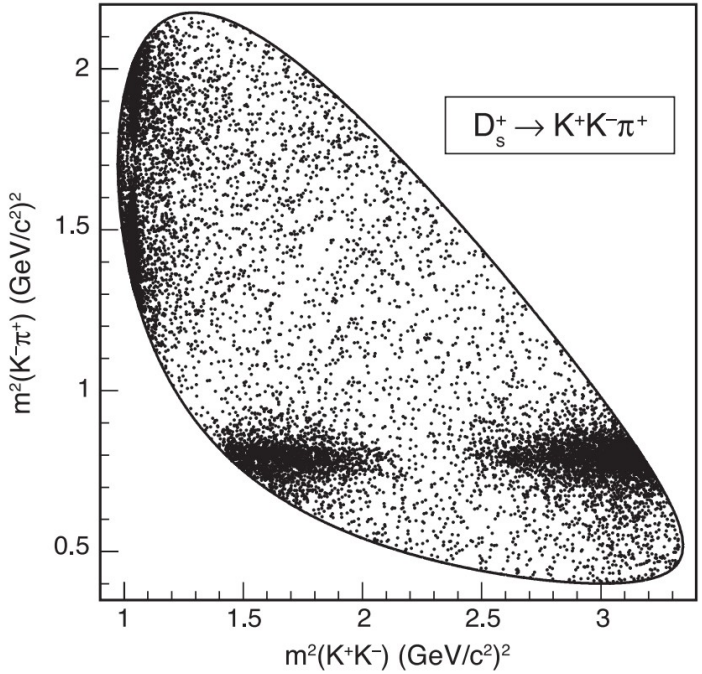


Wstęp do wykresu Dalitza (Dalitz Plot)

- **Przykład:** analiza Dalitza trójek $K^+K^-\pi^+$ z hipotezą pochodzenia od mezonu D_S^+ .







➡ Wykres Dalitza z tymi cząstkami końcowymi ukazuje dwa rozpady mezonu D_S^+ :

$D_S^+ \rightarrow K^*(892)\ K^+$ oraz $D_S^+ \rightarrow \phi\ \pi^+$

- Wykres Dalitza pozwala też zauważyć sytuacje, gdy na rozkładzie M_{Inv} dwóch cząstek finalnych peak tylko pozoruje istnienie cząstki-rodzica.

➡ Peaki [**a**, **b**] i [**c**, **d**] świadczą o rozkładzie prawdopodobieństwa dla odpowiednio **K*(892)** i **ϕ**.

- **Bariony Δ(1232)** : Δ^{++} , Δ^{+} , Δ^{0} , Δ^{-}
  uuu uud udd ddd

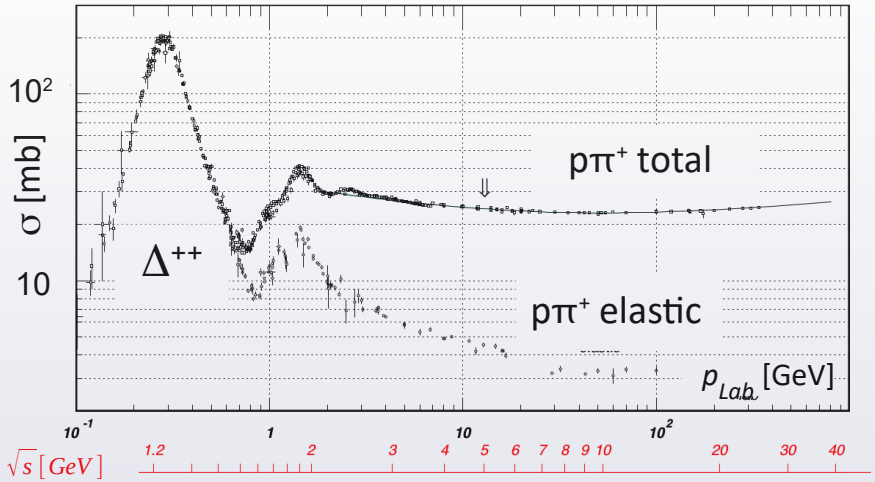
  Rozkład masy: Centroid $\overline{m}$ = 1.23 GeV
  Szerokość połówkowa Γ = 0.12 GeV

  $\rightarrow \quad \tau = \hbar/\Gamma = 5.6 \cdot 10^{-24}$ s ($c\tau$ = 1.7 fm !)

- Rozpady Δ (>99%)

$$\begin{cases} \Delta^{++} \rightarrow p\,\pi^{+} \\ \Delta^{+} \rightarrow p\,\pi^{0}\ ,\ n\,\pi^{+} \\ \Delta^{0} \rightarrow p\,\pi^{-}\ ,\ n\,\pi^{0} \\ \Delta^{-} \rightarrow n\,\pi^{-} \end{cases}$$

- Przekrój czynny na $p\,\pi^{+} \rightarrow$ ...



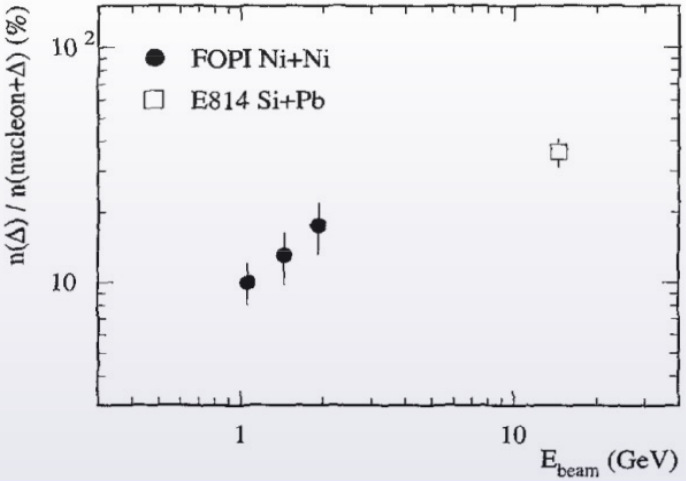
- Przy $T_{Beam} \rightarrow$ 1 .. 10 *A* GeV

  Z widm energii π^{-} wydzielano składnik pochodzący z rozpadu $\Delta^{0,-} \rightarrow N\pi^{-}$.
  Stąd ekstrapolowano do wszystkich Δ.

  $N_{\Delta(1232)} : N_{N} \approx$ 10 .. 40 procent !

Przy $T_{Beam} \approx$ 1 .. 10 GeV :
„materia rezonansowa" / „resonance matter"

B.Hong et al., Phys. Lett. B 407, 115 (1997)



Izospin: przyczyny i skutki

- **Fakt**: (0) w układzie własnym cząstki, jej $E = m$. (1) wiele hadronów ma bardzo podobne masy, np.:

  $\{\pi^+, \pi^0, \pi^-\}$ $\{n\ p\}$ $\{\Delta^{++,+,0,-}\}$ …

  W. Heisenberg (1932) : każdy element grupy – to ta sama cząstka, tylko w 2 (3, …) stanach.

  { Nie znano kwarków. Dziś wiemy, że elementy różni podmiana u ↔ d,
  Mają one b. podobne masy. Oddziaływania silne działają (prawie) tak samo dla u i d. }

- Rozważmy „nukleon w 2 stanach" : proton $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ i neutron $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (jak stany własne rzutu wektora spinu na oś Z):

$$\hat{H}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{H}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

  Stan $|n\rangle$ można otrzymać przez rotację $|p\rangle$ w pewnej przestrzeni, zwanej przestrzenią izospinu. (o kąt π względem osi X).

- ***Hipoteza symetrii izospinowej***:

  Po dowolnym obrocie w przestrzeni izospinu, $\hat{H}$ z oddziaływaniami silnymi ma działać identycznie.

  Taka sytuacja już „była" w QM: niezmienniczość $\hat{H}$ względem obrotu f. falowej w przestrzeni położeń (oraz: w p. spinu).

  Dla operatora obrotu $\hat{R}(\alpha)$, $[\hat{H}, \hat{R}] = 0$ (działa tu grupa obrotów SU_2)

  ⇒ Istnieje operator $\hat{L}$, ma 2 liczby kwantowe (ℓ i m) , numerujące stany własne.
  Liczba możliwych rzutów m : $2\ell + 1$.
  Dla stanu będącego złożeniem 2 ciał, działają reguły składania liczb ℓ i m .

  Izospin podlega obrotom, ale nie w przestrzeni położeń, tylko osobnej: nazwijmy ją **przestrzenią izospinu**.

- ***Hipoteza symetrii izospinowej, c.d.***

Izospin podlega obrotom w przestrzeni izospinu. Działa grupa obrotów SU(n).

→ Istnieje *operator izospinu* $\hat{I}$, który matematycznie pracuje jak $\hat{L}$.
$\hat{I}$ ma 2 liczby kwantowe (I i I_3), numerujące stany własne.
Liczba możliwych rzutów I_3 : $2I + 1$

W grupie cząstki mają wspólne I. Liczebność grupy = liczba rzutów I_3.
Izospinowy aspekt stanu cząstki zapisuje się przez: $|I, I_3\rangle$. Np. $p = |½, ½\rangle$ $n = |½, -½\rangle$

Dla stanu będącego złożeniem ciał, **reguły składania I i I_3 ≡ regułom składania ℓ i m**..

- ***Przykłady:***

{p, n}	tworzą dublet	$I = ½$	$p = \|½, ½\rangle$	$n = \|½, -½\rangle$		
{π^+, π^0, π^-}	tworzą tryplet	$I = 1$	$\pi^+ = \|1, 1\rangle$	$\pi^0 = \|1, 0\rangle$	$\pi^- = \|1,-1\rangle$	
{$\Delta(1232)^{++,+,0,-}$}	tworzą kwadruplet	$I = {}^3/_2$	$\Delta^{++} = \|{}^3/_2, {}^3/_2\rangle$	$\Delta^+ = \|{}^3/_2, ½\rangle$	$\Delta^0 = \|{}^3/_2, -½\rangle$	$\Delta^{++} = \|{}^3/_2, -{}^3/_2\rangle$

- Przypadek Λ i Σ :

Λ (uds)	$q = 0$		m = 1115,7 MeV	→	$I = 0$	$I_3 =$ 0	(singlet)
Σ :	**Σ^+**	**(uus)**	m = 1192,6 MeV	→	$I = 1$	$I_3 :$ +1	(tryplet)
	Σ^0	**(uds)**	m = 1189,4 MeV			0	
	Σ^-	**(dds)**	m = 1197,5 MeV			-1	

- Dziś **składamy izospin hadronu z jego kwarków**. Przy czym:

I (u, d) = ½ $\qquad$ I (s, c, b, t) = 0
I_3 (u) = +½ $\quad$ I_3 (d) = -½ $\qquad$ I_3 (s, c, b, t) = 0

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(n_u - n_d - \left(n_{\bar{u}} - n_{\bar{d}}\right)\right)$$

Gdy hadron ma przynajmniej jeden z kwarków: u $\bar{u}$ d $\bar{d}$ $\Rightarrow$ ma niezerowy izospin.

- **Doprowadzając 2 hadrony do interakcji, tworzymy stan będący złożeniem**.

p + p : $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ $\rightarrow$ Składowa I_3 = 1 . Jedyną możliwością jest stan $|1,1\rangle$

π^+ + p : $|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ $\rightarrow$ Składowa I_3 = $^3/_2$. Jedyną możliwością jest stan $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$. To cecha Δ^{++} .

Ale:
π^+ + n : $|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ $\rightarrow$ Składowa I_3 = ½ . Dwa możliwe stany: $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ albo $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$.

Mówimy: możliwe są 2 kanały reakcji: kanał I = ½ oraz I = $^3/_2$.

Ogólnie: **stan będący złożeniem stanów własnych = kombinacja liniowa stanów własnych**.

Q: z jakimi wagami?
$\rightarrow$ odpowiadają na to *współczynniki Clebscha-Gordona* :

$$\left|j_1 m_1\right\rangle\left|j_2, m_2\right\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{J,J_1,J_2}_{m,m_1,m_2}\left|j,m\right\rangle \quad \text{, gdzie} \quad m = m_1 + m_2$$

Współczynniki Clebscha-Gordona :

$$\left|j_1 m_1\right\rangle\left|j_2, m_2\right\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{J,J_1,J_2}_{m,m_1,m_2} \left|j, m\right\rangle$$

gdzie: $m = m_1 + m_2$

- W naszym przypadku $\pi^+ + n$, po sprawdzeniu w tabeli:

$$|1,1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

- Ok, ale jak to się ma do produkcji?

W mechanice kwantowej funkcjonuje **„złota reguła Fermiego”** :

$$\sigma(a \to b) \sim \left|\langle\, b \,|\, \hat{U}_{a\to b} \,|\, a \,\rangle\right|^2$$

Reakcje hadronów pod wpływem oddziaływań silnych: $\hat{U} = \hat{U}_{\text{Silne}}$.

***Symetria izospinowa*: w ramach danego *I* , $\forall\, I_3$ $\hat{U}_{\text{Silne}}$ takie samo.**

Wartości C dla $j_1 = 1, j_2 = ½$

$m = \frac{3}{2}$

m_1, m_2 \ j	$\frac{3}{2}$
$1, \frac{1}{2}$	1

$m = \frac{1}{2}$

m_1, m_2 \ j	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$1, -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$0, \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$

Kalkulator na Wolfram Alpha

- **Przykład.** Rozważmy dwie podobne reakcje:

  Ⓐ $p + p \rightarrow d + \pi^+$

  Ⓑ $p + n \rightarrow d + \pi^0$

Q: Czy model izospinowy przewiduje związek między σ_A a σ_B ?

Ⓐ złożenie pp $\quad |½,½\rangle|½,½\rangle = |1,1\rangle$

złożenie $d\pi^+$ $\quad |0,0\rangle|1,1\rangle = |1,1\rangle$

$$\sigma(pp \rightarrow d\pi^+) = c \cdot \left| \langle 11|\hat{U}_{\text{Silne}}|11\rangle \right|^2 = c \cdot \left| u_{I=1} \cdot \langle 11|11\rangle \right|^2 = c \cdot |u_{I=1}|^2$$

Ⓑ złożenie pn $\quad |½,½\rangle|½,-½\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle + |1,0\rangle\right)$

złożenie $d\pi^0$ $\quad |0,0\rangle|1,0\rangle = |1,0\rangle$

$$\sigma(pn \rightarrow d\pi^0) = c \cdot \left| \langle 10|\, \hat{U}_{\text{Silne}} \frac{|0,0\rangle + |1,0\rangle}{\sqrt{2}} \rangle \right|^2 = \frac{c}{2} \cdot |u_{I=1}|^2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(pn \rightarrow d\pi^0) = \frac{1}{2}\, \sigma(pp \rightarrow d\pi^+)$$

Wartości C dla $j_1 = ½$, $j_2 = ½$

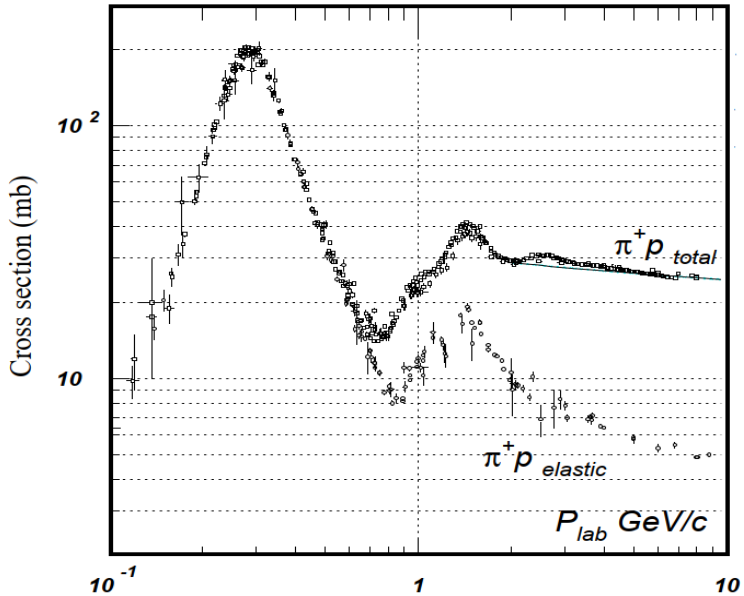
$m = 0$

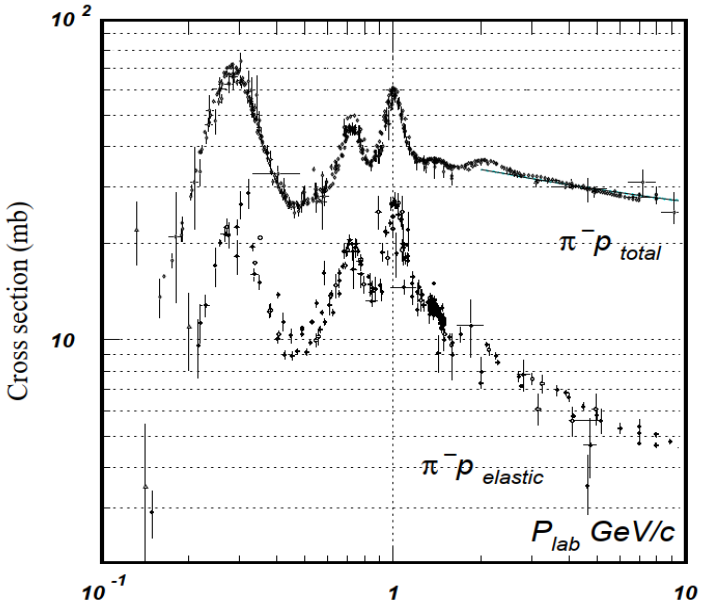
m_1, m_2 \ j	1	0
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

Jakie są dane eksperymentalne? Reakcja Ⓑ znana tylko w 1 punkcie:

	p_{Lab} [GeV]	σ [mb]	Ref.
$pp \rightarrow d\pi^+$	1.187 1.240	3.14 ± 0.24 3.23 ± 0.14	[tu]
$pn \rightarrow d\pi^0$	1.220	1.5 ± 0.3	[tu]

- **Przykład.** Produkcja $\Delta(1232)$ w kanale πN. Poniższe wykresy $\sigma\,(p_{Lab})$ sprawdźmy w maksimum rezonansu.





Sczytajmy: $\sigma\,(\pi^+ p \to \Delta^{++} \to \pi^+ p) \approx 200$ mb , $\sigma\,(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^- p) \approx 23$ mb , $\sigma\,(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^0 n) \approx 47$ mb

Q: Czy model izospinowy potrafi to wytłumaczyć? Rozpiszmy stany izospinowo:

$$\pi^+ p: \quad |1,1\rangle|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = |\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle$$

$$\pi^- p: \quad |1,-1\rangle|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\pi^0 n: \quad |1,0\rangle|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

- **Przykład.** Produkcja Δ(1232) w kanale πN (c.d.) Do przekrojów czynnych użyjemy Złotą Regułę Fermiego.

$\sigma(\pi^+ p \to \Delta^{++} \to \pi^+ p) \approx 200$ mb , $\sigma(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^- p) \approx 23$ mb , $\sigma(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^0 n) \approx 47$ mb

$$\sigma(\pi^+ p \to \Delta^{++} \to \pi^+ p) = a \cdot \left| \langle 3/2, 3/2 | \hat{U} | 3/2, 3/2 \rangle \right|^2$$

$$\sigma(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^0 n) = a \cdot \left| \frac{\sqrt{2}}{3} \langle 3/2, -1/2 | \hat{U} | 3/2, -1/2 \rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \langle 1/2, -1/2 | \hat{U} | 1/2, -1/2 \rangle \right|^2$$

$$\sigma(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^- p) = a \cdot \left| \frac{1}{3} \langle 3/2, -1/2 | \hat{U} | 3/2, -1/2 \rangle + \frac{2}{3} \langle 1/2, -1/2 | \hat{U} | 1/2, -1/2 \rangle \right|^2$$

Jeżeli wybieramy taką *E* wiązki, że jesteśmy w maksimum rezonansu Δ, to dominuje wkład $I = 3/2$

$$\sigma(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^- p) \approx a \cdot \left| \frac{1}{3} \langle 3/2, -1/2 | \hat{U} | 3/2, -1/2 \rangle \right|^2 \approx a \cdot \frac{1}{9} \cdot \left| \langle 3/2, -1/2 | \hat{U} | 3/2, -1/2 \rangle \right|^2$$

$$\sigma(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^0 n) \approx a \cdot \left| \frac{\sqrt{2}}{3} \langle 3/2, -1/2 | \hat{U} | 3/2, -1/2 \rangle \right|^2 \approx a \cdot \frac{2}{9} \cdot \left| \langle 3/2, -1/2 | \hat{U} | 3/2, -1/2 \rangle \right|^2$$

Przywołujemy <u>*symetrię izospinową*</u> (oddziaływania silne nie zależą od I_3 ; u,d działają tak samo).

$$\langle 3/2, -1/2 | \hat{U} | 3/2, -1/2 \rangle = \langle 3/2, 3/2 | \hat{U} | 3/2, 3/2 \rangle$$

→ **$\sigma(\pi^+ p \to \Delta^{++} \to \pi^+ p)$: $\sigma(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^- p)$: $\sigma(\pi^- p \to \Delta^0 \to \pi^0 n)$ = 9 : 1 : 2**

Bilans produkcji dziwności

- **Stan wejściowy: S = 0** ⇒ hadrony dziwne muszą być tak produkowane, że kwarkowo $N(s) = N(\bar{s})$ [mamy wiąz]

  Przytoczmy hierarchię: $N(|S|=1) > N(|S|=2) > N(|S|=3)$
  i rozważmy zderzenie o niedużej T_{Beam} : tak niedużej, aby $N(|s|=2) \approx 0 \approx N(|s|=3)$.

  Hadrony z kwarkiem s : **K^-** ($\bar{u}s$) **$\bar{K}^0$** ($\bar{d}s$) **Λ** (uds) **Σ^0** (uds) **Σ^+** (uus) **Σ^-** (dds)
  Hadrony z kwarkiem $\bar{s}$: **K^+** ($u\bar{s}$) **K^0** ($d\bar{s}$)

- K^+ i K^- rejestrujemy bezpośrednio. Wprawdzie mierzymy tylko cząstki $q \neq 0$, ale:
  ▷ Λ i K^0_s posiadają kanały rozpadu z cząstkami wyłącznie naładowanymi
  ▷ jednak rozpadów cząstek $\Sigma^{+,-}$ nie zobaczymy wcale.

		Wiodący kanał rozpadu	
Typ hadronu	**τ [s]**		**BR [%]**
K^0 , $\bar{K}^0$	$8.9 \cdot 10^{-11}$ (K^0_S)	$K^0 + \bar{K}^0 \rightarrow K^0_S + K^0_L$, $K^0_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$	69
Λ	$2.6 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \rightarrow p\,\pi^-$	64
Σ^0	$7.4 \cdot 10^{-20}$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda\,\gamma$	100
Σ^+	$8.0 \cdot 10^{-11}$	$\Sigma^+ \rightarrow p\,\pi^0$, $n\,\pi^+$	99,9
Σ^-	$1.5 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow n\,\pi^-$	99,8

  Λ i K^0_s : identyfikacja przez analizę topologii V0.
  Σ^0 : część obserwowanych Λ to rozpady Σ^0
  $\Sigma^{+,-}$: nieosiągalne...

- Dzięki **Zasadzie Zachowania Dziwności** możemy oszacować wkład $\Sigma^{+,-}$. (*Poniżej pisząc symbole mamy na myśli krotności*)

  [kwark $\bar{s}$] $K^+ + K^0 = K^- + \bar{K}^0 + \Lambda + \Sigma^0 + \Sigma^+ + \Sigma^-$ [kwark s]

Bilans produkcji dziwności

- Dzięki **Zasadzie Zachowania Dziwności** możemy oszacować wkład $\Sigma^{+,-}$. (*Poniżej pisząc symbole mamy na myśli krotności*)

$$K^+ + K^0 = K^- + \overline{K}^0 + \Lambda + \Sigma^0 + \Sigma^+ + \Sigma^-$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma^+ + \Sigma^- = K^+ + K^0 - (K^- + \overline{K}^0) - (\Lambda + \Sigma^0) = K^+ + (K^0 + \overline{K}^0) - 2\overline{K}^0 - K^- - (\Lambda + \Sigma^0)$$

- Załóżmy symetrię izospinową oraz jądra symetryczne $(N = Z) \Rightarrow \overline{K}^0 = K^-$

Oscylacje $K^0 \Rightarrow K^0 + \overline{K}^0 = K^0_S + K^0_L = 2 \cdot K^0_S$

Otrzymujemy: $\mathbf{\Sigma^+ + \Sigma^- = K^+ + 2K^0_S - 3K^- - (\Lambda + \Sigma^0)}$

- Przykład dla reakcji Ni+Ni @ 1.93A GeV [M. Merschmeyer et al., PRC 76, 024906 (2007)]

particle	yield	stat. error	syst. error
K^+ [24,34]	0.075	± 0.002	
K^- [34]	0.003	± 0.001	
$K^0 + \overline{K^0}$	0.078	± 0.003	$^{+0.007}_{-0.008}$
$\Lambda + \Sigma^0$	0.137	± 0.005	$^{+0.009}_{-0.025}$

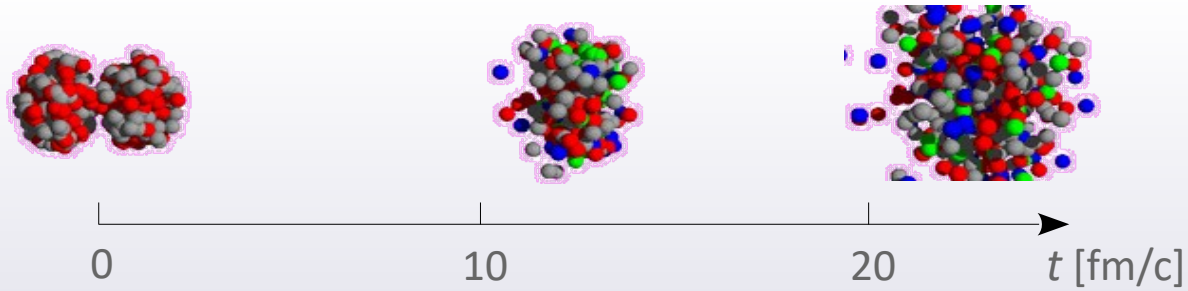
$$\Rightarrow \quad \Sigma^+ + \Sigma^- = 0.007 \pm 0.008\,(\text{stat})\ ^{+0.032}_{-0.017}\,(\text{syst})$$

Czyli: krotności Σ^+ i Σ^- są b. małe. Tak małe, że przy dostępnej statystyce nawet zgodne z 0.

Opis stanu końcowego: model statystyczny

- Freeze-out
- Model statystyczny
  - Dopasowania do krotności doświadczalnych
  - Diagram fazowy
  - Rozkłady kwantowe $\rightarrow$ rozkład Boltzmanna
  - Stosunki krotności dla materii symetrycznej ($N = Z$)
- Reprezentacja relatywistyczna rozkładów kinematycznych
- Doświadczalne rozkłady kinematyczne

Freeze-out / wymrożenie



Symulacja IQMD
Zderzenia Au+Au
T_{Beam} = 1.5*A* GeV

- ***Freeze-out*** (*wymrożenie*) : końcowy etap zderzenia, w którym :
  - ustaje produkcja cząstek i rozpady silne (rozpady EM i słabe są o rzędy fm/c później)
  - ustaje ich wzajemne oddziaływania

  Można definiować 2 rodzaje *freeze-outu*:

  - ***Freeze-out chemiczny*** : ustaje produkcja cząstek i rozpady silne
  - ***Freeze-out termiczny*** : ustaje oddziaływanie pomiędzy cząstkami

MODEL STATYSTYCZNY

- Hipoteza: na etapie *freeze-out* zachodzi **równowaga termodynamiczna.** Zachodzi:
  - **Równowaga chemiczna** : liczby/proporcje wszystkich cząstek ustaliły się równowagowo,
  - **Równowaga termiczna** : rozkłady emisji stały się równowagowe. *Uwaga*: zatarcie pamięci

Model statystyczny emisji cząstek (zarys)

- Wyprowadzimy **równowagowy rozkład krotności i pędów** na przykładzie fermionów.

  Układ ***N*** cząstek o całkowitej energii ***E*** . W układzie dla pojedynczej cząstki dostępne są stany o energiach E_i .

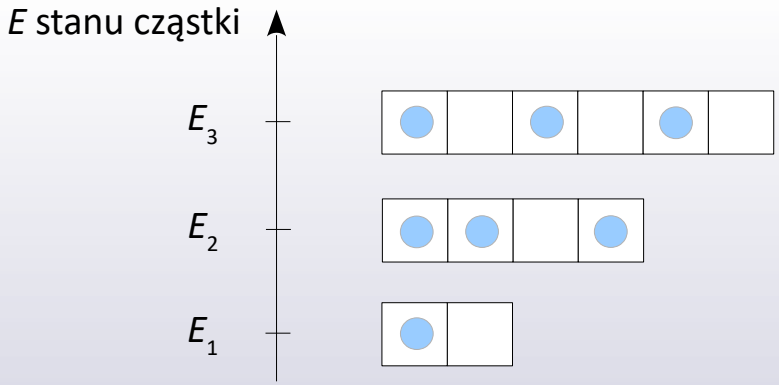
  Dla cząstek relatywistycznych: $E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$

  → daną energię można osiągnąć albo przez pęd (wektor), albo przez masę.

- **Makrostan** (obsadzenie stanów energetycznych). 1 makrostan może być realizowany przez wiele **mikrostanów**.

- Więzy układu: $N = \sum_i N_i$, $E = \sum_i N_i \cdot E_i$, ...

  ⊕ inne prawa zachowania: ***Q*** ≡ całkowity ładunek, ***B*** ≡ całkowita liczba barionowa, ***S*** ≡ całkowita dziwność



S_i	N_i	p_i
6	3	0.50
4	3	0.75
2	1	0.50

- p_i ≡ prawdopodobieństwo obsadzenia stanu E_i

  $$p_i = N_i / S_i$$

  Ω_i ≡ liczba kombinacji realizujących stan E_i

  $$\Omega_i = \frac{S_i!}{(S_i - N_i)! \cdot N_i!}$$

- Szukamy **rozkładu prawdopodobieństwa *p*(*E*) dla najbardziej prawdopodobnego obsadzenia stanów energii** , który zarazem spełnia więzy.

- Liczba możliwości przy pewnym układzie obsadzeń (*wariant dla fermionów*) :

$$\Omega = \prod_i \frac{S_i!}{(S_i - N_i)! \cdot N_i!}$$

Model statystyczny emisji cząstek (zarys)

- **Najbardziej prawdopodobne obsadzenie:** $d\Omega = 0$

Pochodna po ilorazie silni trudna... $d\Omega = 0 \rightarrow d\ln\Omega = 0$

$$\ln\Omega = \sum_i \left[\ln s_i! - \ln(S_i - N_i)! - \ln N_i!\right] \quad \ldots \quad \approx \quad \ldots \quad \sum_i \left[S_i \ln S_i - (S_i - N_i)\ln(S_i - N_i) - N_i \ln N_i\right]$$

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

- Warunek ekstremum:

$$0 = d\ln\Omega = \sum_i \frac{\partial \ln\Omega}{\partial N_i} dN_i \quad \ldots \quad \approx \quad \ldots \quad \sum_i \left[\ln\left(\frac{S_i}{N_i} - 1\right) dN_i\right]$$

⊕ **zasady zachowania**, dostawione metodą mnożników Lagrange'a :

$$d\ln\Omega \approx \sum_i \left[\ln\left(\frac{S_i}{N_i} - 1\right) dN_i\right] + \alpha \cdot d\left[N - \sum_i N_i\right] + \beta \cdot d\left[E - \sum_i E_i N_i\right]$$

$$d\ln\Omega \approx \sum_i \left[\ln\left(\frac{S_i}{N_i} - 1\right) - \alpha - \beta E_i\right] dN_i$$

$$0 = \ln\left(\frac{S_i}{N_i} - 1\right) - \alpha - \beta E_i \rightarrow p_i = \frac{1}{e^{\beta E_i + \alpha} + 1}$$

W zderzeniu zachowane są:

- całk. l. barionowa $B = \Sigma b_i = A_{part}$
- całk. ładunek $Q = \Sigma q_i = Z_{part}$
- całkowita dziwność $S = \Sigma s_i = 0$

Model statystyczny emisji cząstek (zarys)

- Zmiana oznaczeń:

$$kT = 1/\beta \qquad \textbf{temperatura}$$

$$\mu = -\alpha/\beta \qquad \textbf{potencjał chemiczny}$$

(*wariant dla fermionów*)

$$p(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} + 1}$$

- Zasady zachowania: ustalona liczba B, Q, S → μ_B, μ_Q, μ_S

$$\mu_i = b_i\,\mu_B + q_i\,\mu_Q + s_i\,\mu_S$$

Np.

μ_B występuje dla barionów	($b_i = \pm 1$)	nie występuje np. dla mezonów	($b_i = 0$)
μ_S występuje dla hadronów dziwnych	($s_i = \pm 1,2,3$)	nie występuje dla nie-dziwnych	($s_i = 0$)
μ_Q występuje dla cząstek naładowanych	($q_i = \pm 1,2$)	nie występuje dla obojętnych	($q_i = 0$)

- „ exp (...) - 1 ” dla bozonów. „ $E + \mu_B$ ” dla antybarionów

- **Koncentracja cząstek (n)**

Przyjmujemy, że zbiór cząstek zajmuje pewną objętość V. Np. objętość strefy zderzenia jądro-jądro.

Przypomnijmy proporcję: $\dfrac{dN}{g} = \dfrac{V \cdot dp^3}{h^3}$, gdzie: g = czynnik degeneracji. Np. dla cząstek o spinie J, $g = 2J + 1$.

Jest to uproszczenie, bo zakłada, że P obsadzenia = 1. Tak się wprawdzie dzieje w $T = 0$,
ale potrzebujemy wzoru ogólnego. Domnażamy $p(E)$, czyli prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii E.

$$n \equiv \frac{N}{V} = g \cdot \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1}$$

Model statystyczny emisji cząstek (zarys)

- W zderzeniu wiele rodzajów cząstek → zestaw koncentracji n_i

$$n_{\pi^{+,-,0}} \qquad n_{K^{\pm}} \qquad n_{p,d,t,He,\Delta,N^*} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

przy czym:

$$n_i = g_i \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/kT} \pm 1}$$

gdzie ogólnie:

$$\mu_i = b_i \mu_B + q_i \mu_Q + s_i \mu_S$$

- Uwaga: konwencja kT [J] → $k = 1$, T [MeV]

- Dla różnych typów hadronów formuły są różne: minimalna energia = m_i ,
(nie-)obecność poszczególnych μ_B, μ_S, μ_Q. Różne (izo-)spiny → g_i

Ale: dla całego zestawu wspólne są: T, μ_B , μ_Q , μ_S *(oraz V)* .

Znany stan wejściowy (A, Z, S) pozwala na uzależnienie wszystkich parametrów od T, μ_B i V.

- Niektóre cząstki są rezonansami → do n_i dla danego rezonansu wstawia się rozkład Breita-Wignera prawdopodobieństwa w funkcji masy.

- Np. szczegółowe artykuły:
A. Mekjian et al., Phys. Lett. B 651 (2007) 33
A. Andronic et al., Nucl. Phys. A 772 (2006) 167

Model statystyczny emisji cząstek (jak to działa?)

- W eksperymencie rekonstruujemy doświadczalnie ***krotności emisji na 1 zderzenie*** dla cząstek różnych typów (najlepiej: jak najwięcej).
- Kod komputerowy, np. Thermus, Thermal-Fist, Therminator

Input: zestaw doświadczalnych (stosunków) krotności cząstek emitowanych (na 1 zderzenie)

Działanie: Kod, zmieniając T i μ_B, poszukuje takiego zestawu krotności modelowych, dla którego χ^2 dopasowania do danych jest najmniejsze.

Wynik: T, μ_B najlepszego dopasowania $\oplus$ zestaw krotności modelowych

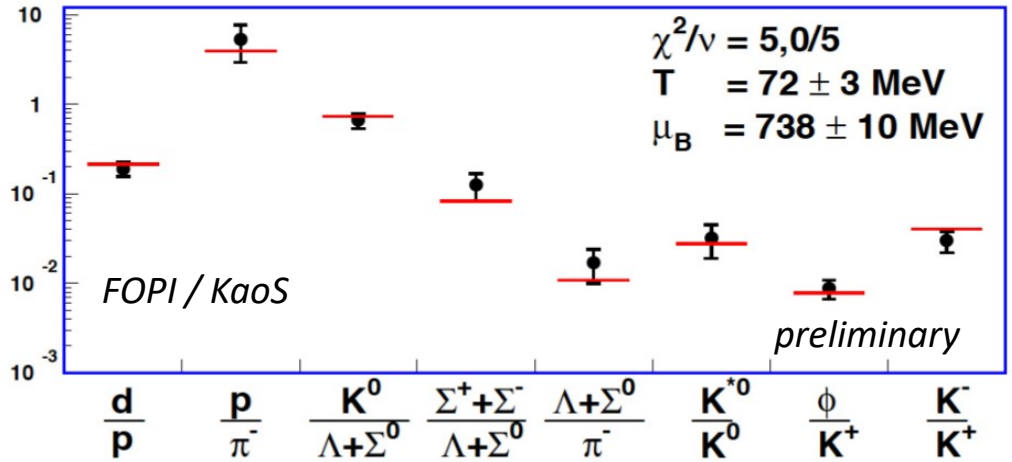
Uwaga: wzory na krotności N_i są $\sim V$, co po stronie modelu czyni je wszystkie skorelowanymi

Podejścia: ① Objętość może stanowić pomimo tego parametr dopasowania
② Z doświadczalnych krotności formujemy stosunki krotności. Wówczas, wg modelu, znika zależność od V.

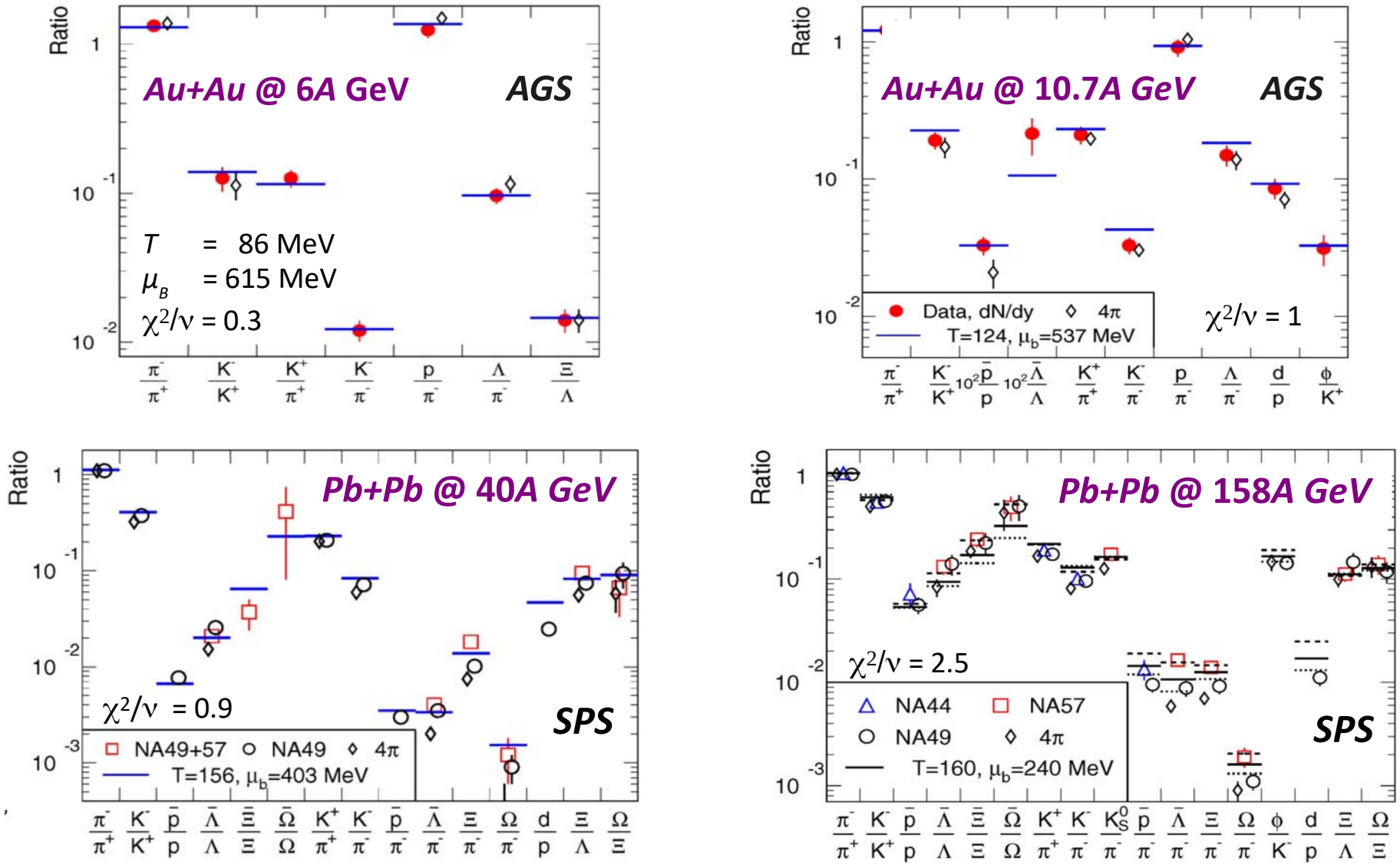
- ***Przykład***:

Stosunki krotności z centralnych zderzeń:

Al+Al @ 1.9A GeV



Model statystyczny : przykłady

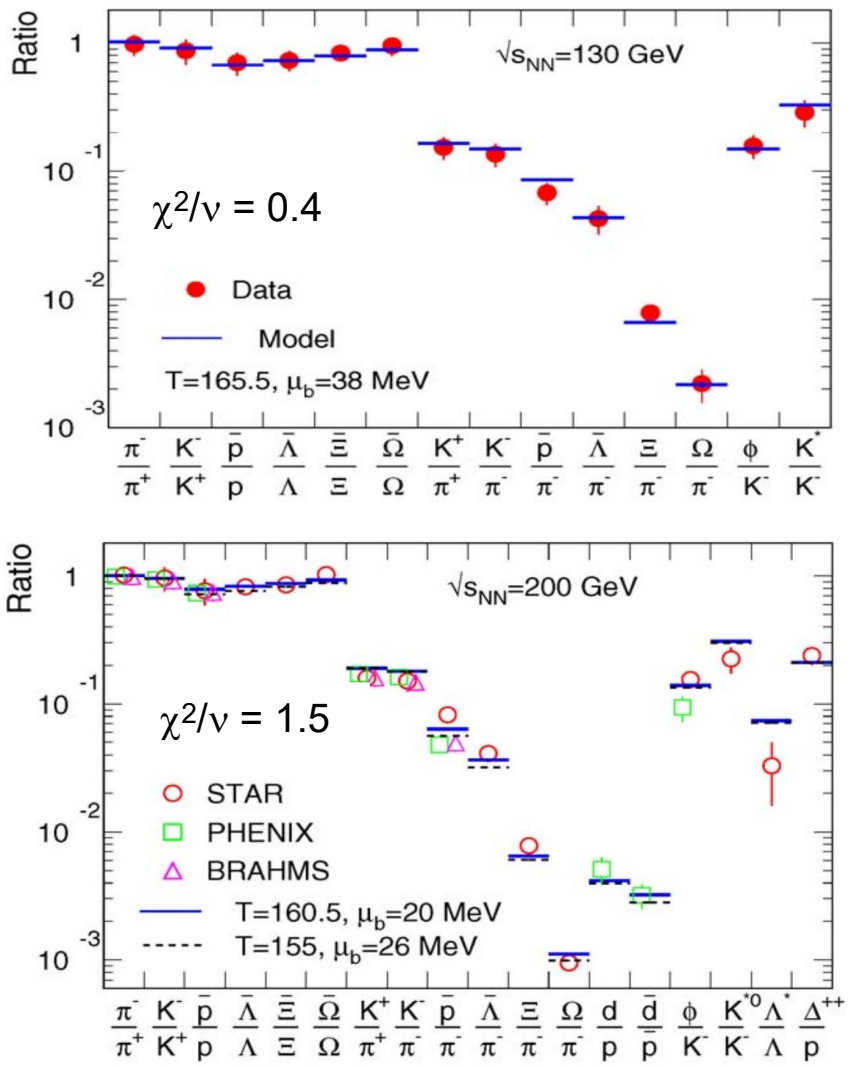


A. Andronic et al., Nucl. Phys. A 772 (2006) 167

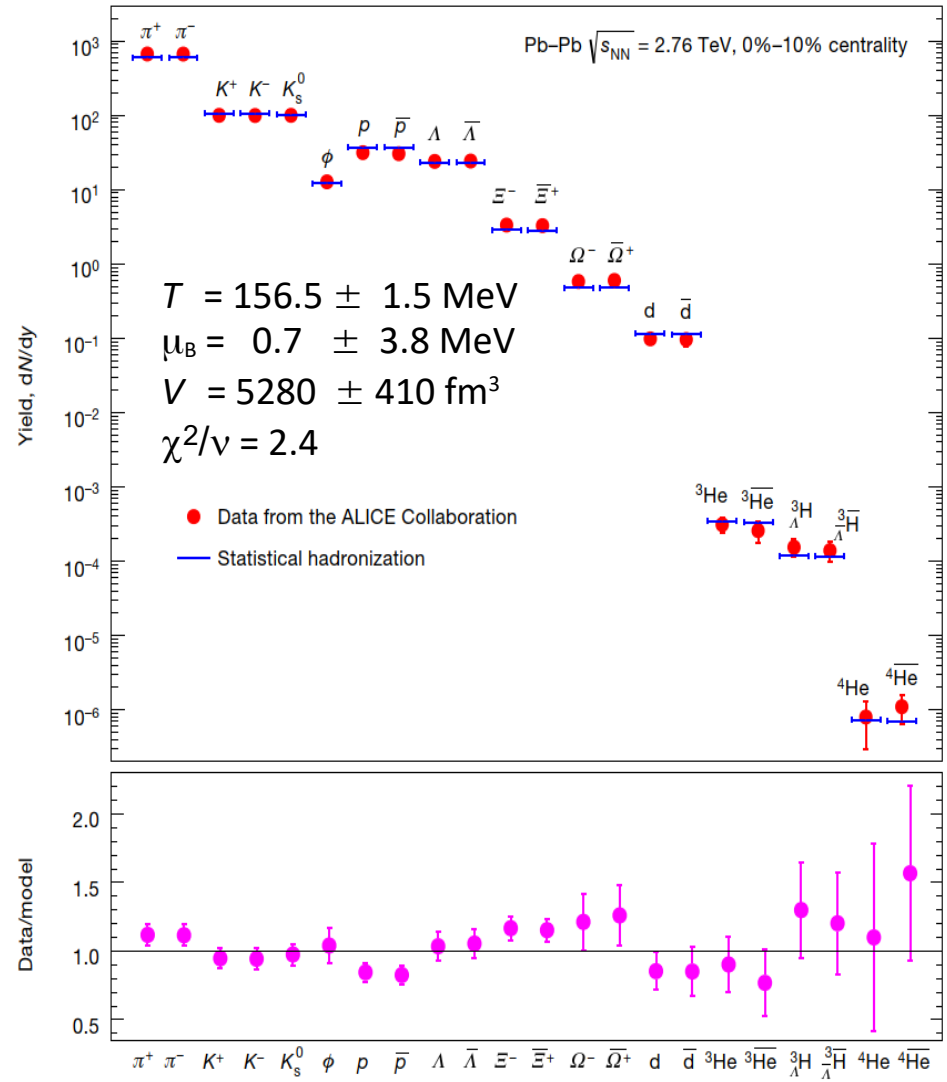
Model statystyczny : energie ultrarelatywistyczne

- Zderzenia w akceleratorze RHIC (Brookhaven)

A. Andronic et al., Nucl. Phys. A 772 (2006) 167



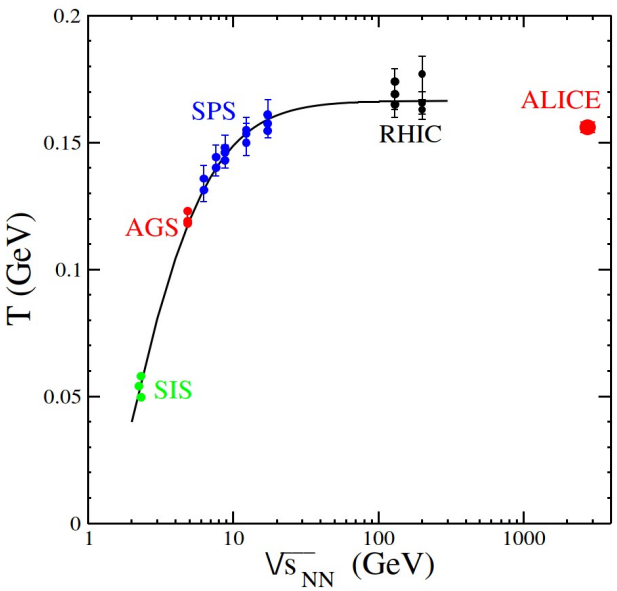
- Zderzenia w akceleratorze LHC (CERN) – kolaboracja ALICE

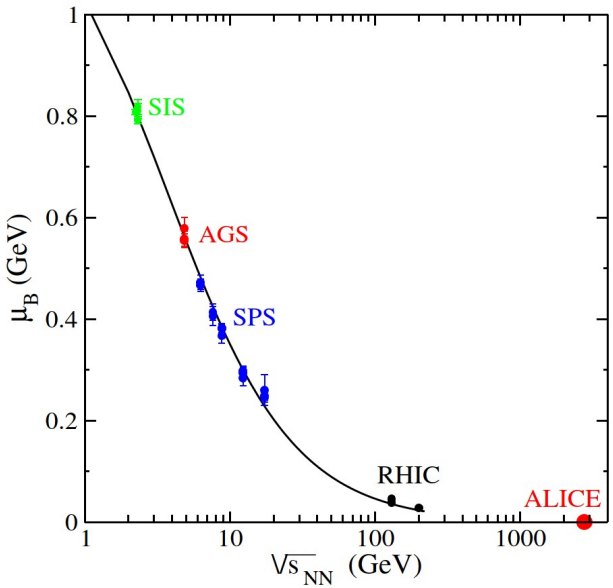


A. Andronic et al., Nature 561, 321 (2018)

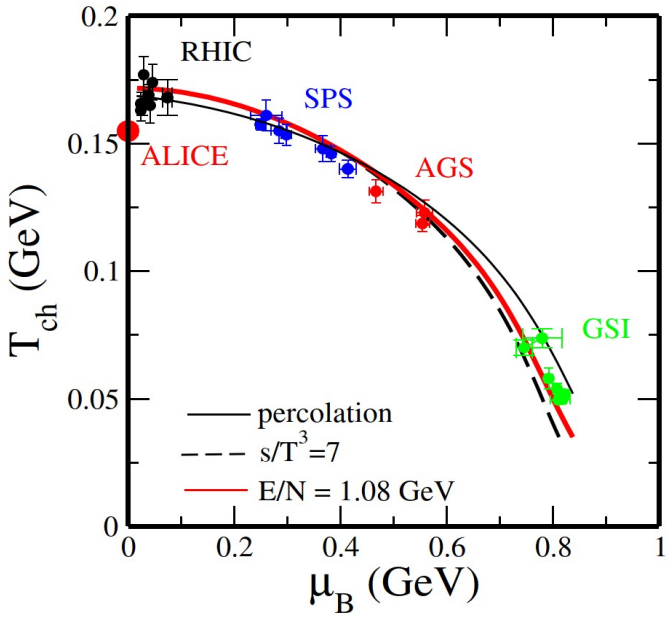
Wymrożenie chemiczne na diagramie fazowym

- Analizy **krotności w chwili wymrożenia chemicznego**:





- Punkty freeze-out **na diagramie fazowym**



- Wnioski:
  - Wyraźne zależności T i μ_B (w chwilach freeze-out'u) od energii wiązki.
  - T wzrasta i nasyca się przy ~ 160 MeV. μ_B maleje do 0.
  - Stawiając punkty dla freeze-out'u na **diagramie μ_B - T** (tzw. „***diagram fazowy***") otrzymujemy wyraźną korelację!

J. Cleymans, EPJ Web of Conferences 95, 03004 (2015)

Model statystyczny : rozkład Boltzmanna

- Przytoczmy formułę na krotność: $$N_i = g_i V \cdot \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/kT} \pm 1}$$

W praktyce bardzo często $e^{(E_i - \mu_i)/T} \gg 1$ (dla każdego znanego hadronu oprócz π)

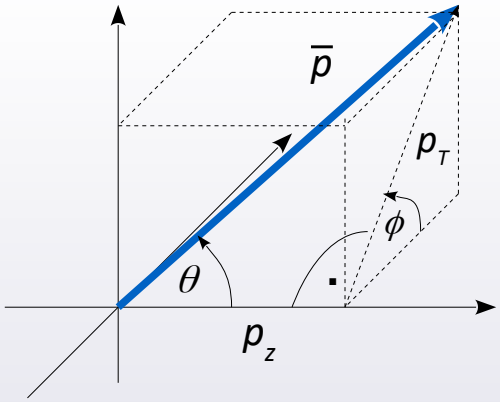
i wtedy: $$N_i \rightarrow \frac{g_i V}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{\mu_i}{T}} \int d^3 p \; e^{-\frac{E}{T}}$$ gdzie $\mu_i = b_i \mu_B + q_i \mu_Q + s_i \mu_S$

Rozkład Fermiego-Diraca / Bosego-Einsteina przechodzi w ***rozkład Boltzmanna***.

- W przestrzeni pędów rozkład ma taką postać: $$\frac{d^3 N_i}{dp^3} \sim e^{-\frac{E_i}{T}}$$, gdzie $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$

- Co widać w reprezentacji sferycznej?

$$\frac{d^3 N_i}{p^2 dp \sin\theta \, d\theta \, d\phi} \sim e^{-\frac{E_i}{T}}$$



Rozkład Boltzmanna (RHS powyżej) nie zależy od kątów emisji ***(emisja izotropowa)*** . Można od razu scałkować po θ i φ → 4π .

- W wielu publikacjach całkę z rozkładu Boltzmanna wymienia się na funkcję specjalną. O co chodzi i jak to zrobić?

$$N_i = \frac{g_i V}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{\mu_i}{T}} \int_{\Omega_p} d^3p \; e^{-\frac{E}{T}} = \frac{g_i V}{2\pi^2\hbar^3} e^{\frac{\mu_i}{T}} \int_0^\infty p^2 dp \; e^{-\frac{E}{T}}$$

Podstawmy: $\epsilon \equiv \frac{E}{T} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{T}$ i $\nu \equiv \frac{m}{T}$ $\Rightarrow$ $N_i = \frac{g_i V T^3}{2\pi^2\hbar^3} e^{\frac{\mu_i}{T}} \int_\nu^\infty d\epsilon \cdot \epsilon\sqrt{\epsilon^2 - \nu^2}\, e^{-\epsilon}$

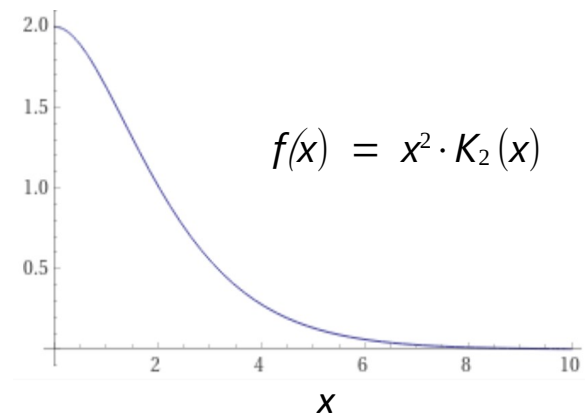
- Fakt: $\exists$ zmodyfikowana funkcja Bessel'a 2. rodzaju:

$$K_n(x) = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!} \frac{1}{x^n} \int_x^\infty d\epsilon \cdot \epsilon \left(\epsilon^2 - x^2\right)^{n-\frac{3}{2}} e^{-\epsilon} \Rightarrow K_2(x) = \frac{1}{x^2} \int_x^\infty d\epsilon \cdot \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - x^2}\, e^{-\epsilon}$$

... co pozwala nam zapisać krotność w innej formie:

$$N_i = \frac{g_i V T^3}{2\pi^2\hbar^3} e^{\frac{\mu_i}{T}} \left(\frac{m_i}{T}\right)^2 \cdot K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)$$

a funkcja $K_2(x)$ jest stablicowana i dostępna w bibliotekach numerycznych.



- Wzór na krotność cząstki i-tego rodzaju „bez jawnej całki” :

$$N_i = \frac{g_i\, VT^3}{2\pi^2\hbar^3} \cdot e^{\frac{\mu_i}{T}} \cdot \left(\frac{m_i}{T}\right)^2 \cdot K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)$$

- Potencjał μ_i każdej cząstki rozkłada się na :

$$\mu_i = b_i\, \mu_B + q_i\, \mu_Q + s_i\, \mu_S$$

więc krotność można zapisać tak:

$$N_i = a_i \cdot x^{b_i} \cdot y^{q_i} \cdot z^{s_i}$$

gdzie: $a_i = \frac{g_i\, VT^3}{2\pi^2\hbar^3} \left(\frac{m_i}{T}\right)^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)$, $x = e^{\mu_B/T}$, $y = e^{\mu_Q/T}$, $z = e^{\mu_S/T}$

- **Bilans krotności wszystkich hadronów** (cząstki + ich stany wzbudzone + ich antycząstki)

Stan początkowy: liczba barionów $B = N + Z$, ładunek Z (ew. $I_3 = (N - Z)/2$) i dziwność $S = 0$.

Posumujmy B oraz Z po wszystkich cząstkach.
Uprośćmy: do $T_{\text{Beam}} \lesssim$ kilkadziesiąt A·GeV wkład kwarków c jest pomijalny.

Zauważmy, że:

- występują tylko $b_i \in \{0, \pm1\}$, $q_i \in \{0, \pm1, \pm2\}$, $s_i \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$
- wszystkie stany wzbudzone danego typu hadronu mają ten sam zestaw b_i, q_i, s_i, czyli te same x, y, z.

  Np. $q_N \in \{0, +1\}$ $q_\Delta \in \{-1, 0, +1, +2\}$ $q_\pi \in \{-1, 0, +1\}$
  tak samo N* tak samo Δ* tak samo {ϱ , ω , … }

Model statystyczny – rozważania ogólne

- … i tak iterujemy po wszystkich rodzajach hadronów: π, N, Δ, K, Λ, Σ, Ξ, Ω oraz ich antycząstkach.

Mamy: $N_i = a_i \cdot x^{b_i} \cdot y^{q_i} \cdot z^{s_i}$, gdzie $a_i = \frac{g_i\, VT^3}{2\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{m_i}{T}\right)^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)$ $\quad x = e^{\mu_B/T} \quad y = e^{\mu_Q/T} \quad z = e^{\mu_S/T}$

- Sumujemy **liczby barionowe** dla kolejnych grup:

$$B_N = 1 \cdot \left(a_N + a_{N^*(1440)} + \ldots \right) \cdot \left(x^1 \right) \cdot \left[y + y^0 \right] = A_N \cdot x \cdot \left[y + 1 \right]$$

$$B_\Delta = 1 \cdot \left(a_{\Delta(1232)} + a_{\Delta(1600)} + \ldots \right) \cdot \left(x^1 \right) \cdot \left[y^2 + y + 1 + y^{-1} \right] = A_\Delta \cdot x \cdot \left[y^2 + y + 1 + y^{-1} \right]$$

$$B_\pi = 0 \cdot \left(a_\pi + a_\rho + \ldots \right) \cdot \left(x^0 \right) \cdot \left[y + 1 + y^{-1} \right] = 0$$

- Podobnie sumujemy **ładunki** w każdej z grup:

$$Q_N = A_N \cdot x \cdot \left[1 \cdot y + 0 \cdot 1 \right] = A_N \cdot x \cdot y$$

$$Q_\Delta = \left(a_{\Delta(1232)} + a_{\Delta(1600)} + \ldots \right) \cdot x \cdot \left[2 \cdot y^2 + 1\, y + 0 \cdot 1 + (-1)\, y^{-1} \right] = A_\Delta \cdot x \cdot \left[2\, y^2 + y - y^{-1} \right]$$

$$Q_\pi = A_\pi \cdot x \cdot \left[1 \cdot y + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot y^{-1} \right]$$

- Zepnijmy ze **stanem początkowym**. Dla każdego hadronu zachodzi **relacja Gell-Manna – Nishijimy**: $i_3 = q - \frac{b + s}{2}$

więc dla zderzeń *Z* protonów i *N* neutronów : $\frac{Z - N}{2} = \sum_i \left(Q_i - \frac{B_i + S_i}{2} \right) \Rightarrow Z - N = \sum_i \left(2 Q_i - B_i - S_i \right)$

- Dla każdego hadronu zachodzi **relacja Gell-Manna – Nishijimy**: $i_3 = q - \frac{b+s}{2}$

więc dla zderzeń *Z* protonów i *N* neutronów : $\frac{Z-N}{2} = \sum_i \left(Q_i - \frac{B_i + S_i}{2} \right) \Rightarrow Z - N = \sum_i \left(2Q_i - B_i - S_i \right)$

Przykładowo, RHS dla nukleonów, Δ i π :

$$2Q_N - B_N - S_N = A_N \cdot x \cdot \left[2\left(y\right) - \left(y+1\right) \right] = A_N \cdot x \cdot \left(y-1\right)$$

$$2Q_\Delta - B_\Delta - S_\Delta = A_\Delta \cdot x \cdot \left[2\left(2y^2 + y - y^{-1}\right) - \left(y^2 + y + 1 + y^{-1}\right) \right]$$

$$= A_\Delta \cdot x \cdot \left[3y^2 + y - 1 - 3y^{-1} \right] = A_\Delta \cdot x \cdot y^{-1}\left(y-1\right)\left[3y^2 + 4y + 3\right]$$

$$2Q_\pi - B_\pi - S_\pi = A_\pi \cdot x \cdot \left[2\left(y + 0 - y^{-1}\right) \right] = A_\pi \cdot x \cdot y^{-1}\left(y-1\right)\left(y+1\right)$$

Okazuje się, że w składnikach od wszystkich grup hadronów jest wspólny mnożnik $(y-1)$.

$$Z - N = \left(y-1\right)\left[\ldots\right]$$

dla materii symetrycznej (*N* = *Z*) zachodzi $y = 1$. Przytoczmy $y = e^{\mu_Q/T}$ czyli $\mu_Q = 0$!

Uwaga: jednocześnie z $S = 0$ w stanie początkowym **nie wynika**, że $\mu_S = 0$.

A. Mekjian et al., Phys. Lett. B 651 (2007) 33

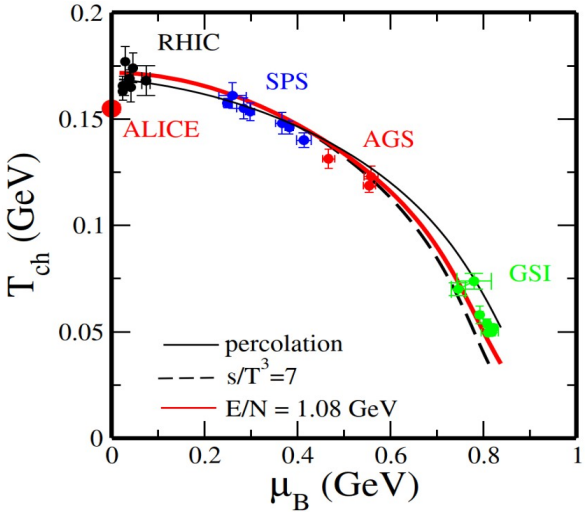
- **Relacja krotności antybarionów do barionów** dla materii symetrycznej z pomijalnym wkładem dziwności.

$$\frac{N_{\bar{B}}}{N_B} \approx \frac{N_{\bar{N}} + N_{\bar{\Delta}}}{N_N + N_\Delta} = \frac{\left[A_N 2 + A_\Delta 4\right] x^{-1}}{\left[A_N 2 + A_\Delta 4\right] x} = \frac{1}{x^2} = \exp\left(-2\frac{\mu_B}{T}\right)$$

Por. diagram fazowy: **gdy zwiększamy energię wiązki**, to $\mu_B \searrow$, a $T \nearrow$.

Stąd: z energią wiązki relacja $\nearrow$ od 0 do 1 , czyli:

przy energiach ultra-relatywistycznych (gdzie $\mu_B \to 0$) ,
powinna ustalać się równowaga między antybarionami a barionami.

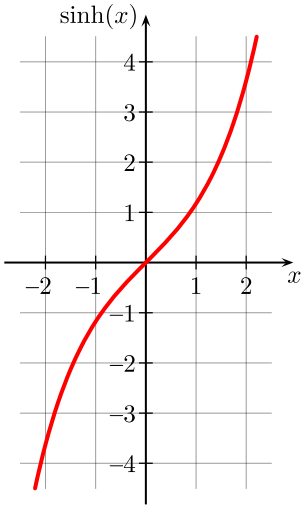


- Możemy też rozważyć **krotność barionów netto** ($N_B - N_{\bar{B}}$)

$$N_B - N_{\bar{B}} = N_N - N_{\bar{N}} + N_\Delta - N_{\bar{\Delta}} = A_N\left(x - x^{-1}\right) 2 + A_\Delta\left(x - x^{-1}\right) 4 = \ldots$$

$$= 4\,\sinh\left(\frac{\mu_B}{T}\right)\left[A_N + 2A_\Delta\right]$$

Wynik nie ma wyrazistej interpretacji, gdy śledzimy punkty freeze-out, gdyż każde $A_i = f(T)$.
Można jednak ustalić: T = const. Wówczas gdy $\mu_B \searrow$, to **krotność barionów netto** $\searrow$.



- W popularnych grafikach diagramu fazowego, często zamiast osi μ_B przedstawia się oś $\rho_B - \rho_{\bar{B}}$, a nawet ρ_B .
Celem jest uproszczenie przekazu dla nie-ekspertów ☺ .
Ale nie jest to zwykła podmiana osi:
gdy ustalić μ_B i zmieniać T , to zmieniają się A_i , więc $\rho_B - \rho_{\bar{B}}$ też.

Model statystyczny – materia symetryczna

- Pozostańmy przy materii symetrycznej ($N = Z$) . Własność $\mu_Q = 0$ pozwala na wysnucie wniosków globalnych.

Przypomnijmy: $N_i = a_i \cdot x^{b_i} \cdot y^{q_i} \cdot z^{s_i}$ $\quad a_i = \frac{g_i V T^3}{2\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{m_i}{T}\right)^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)$ $\quad x = e^{\mu_B/T}$ $\quad y = e^{\mu_Q/T}$ $\quad z = e^{\mu_S/T}$

- Dla **hadronów w tym samym multiplecie izospinowym** (bez S i przybliżając $\Delta m \approx 0$), krotności powinny być identyczne. Np:

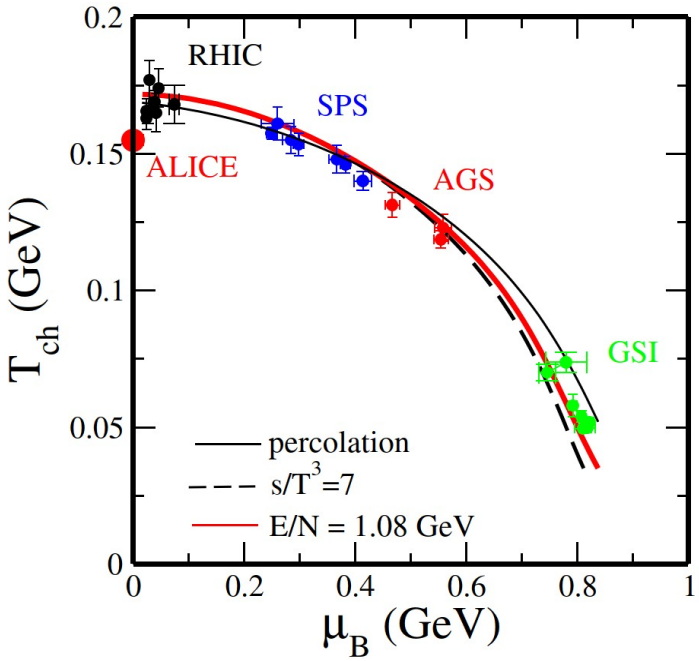
$$N(\pi^+) = N(\pi^0) = N(\pi^-) \qquad N(p) = N(n)$$

$$N(\Delta^{++}) = N(\Delta^+) = N(\Delta^0) = N(\Delta^-) \qquad N(N^{*+}) = N(N^{*0})$$

- Dla **nukleonów, N* oraz Δ** relacja krotności antycząstki do cząstki:

$$\frac{N(\bar{N})}{N(N)} = \frac{a\,x^{-1}}{a\,x^{1}} = \exp\left(-2\frac{\mu_B}{T}\right)$$

➡ z energią wiązki N(anty-nukleony) $\rightarrow$ N(nukleony)

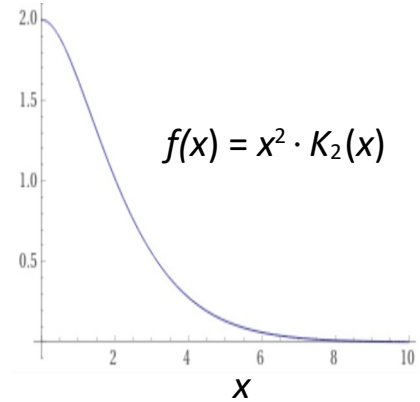


Przypomnijmy: $N_i = a_i \cdot x^{b_i} \cdot y^{q_i} \cdot z^{s_i}$ $\quad a_i = \frac{g_i V T^3}{2\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{m_i}{T}\right)^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)$ $\quad x = e^{\mu_B/T}$ $\quad y = e^{\mu_Q/T}$ $\quad z = e^{\mu_S/T}$

- Dla **hadronu wzbudzonego** ($m_>$) i jego **stanu podstawowego** (m_{gs})

$$\frac{N(m_>)}{N(m_{gs})} = \frac{a(m_>)}{a(m_{gs})} < 1$$

Pominięty fakt rozkładu masy hadronów wzbudzonych nie przeszkadza, bo: $\int \frac{dn}{dM} = 1$.



$f(x) = x^2 \cdot K_2(x)$

- Dla **mezonów z kwarkiem s**, krotność antycząstki do cząstki:

$$\frac{N(\bar{h}_S)}{N(h_S)} = \frac{a z^{-1}}{a z^{1}} = \exp\left(-2\frac{\mu_S}{T}\right)$$

Obliczenia modelu termicznego (por. wykres)

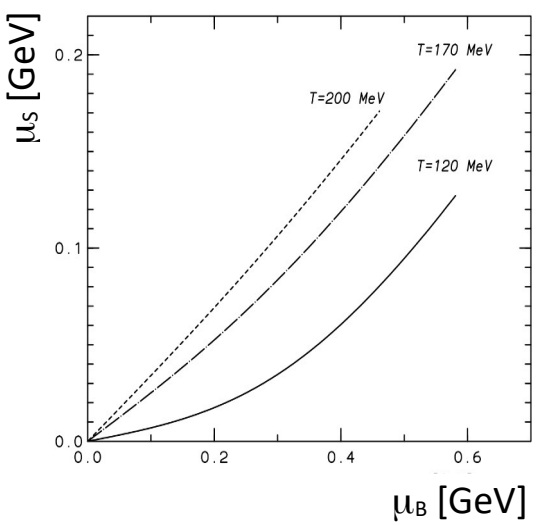
⇒ μ_S rośnie z T, ale się nasyca.

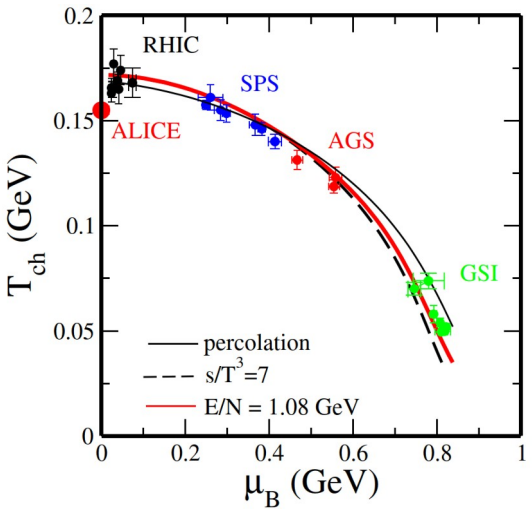
Wymodelujmy to co do rzędu. Np: $\mu_S \sim \mu_B \sqrt{T}$

$$\frac{N(\bar{h}_S)}{N(h_S)} \approx \exp\left(-2\frac{\mu_B}{\sqrt{T}}\right)$$

Diagram fazowy: z rosnącą T_{Beam} mamy $\mu_B \searrow$, $T \nearrow$

➡ $N(\bar{h}_s) \rightarrow N(h_s)$





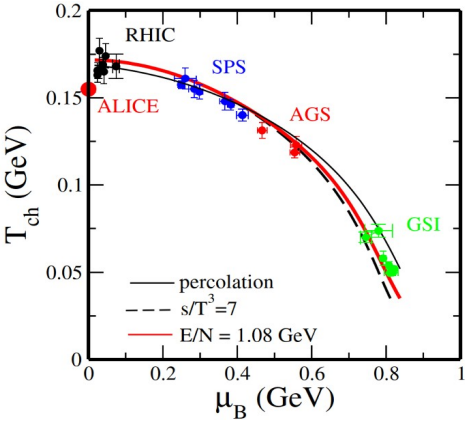
Doświadczalne stosunki krotności vs model statystyczny

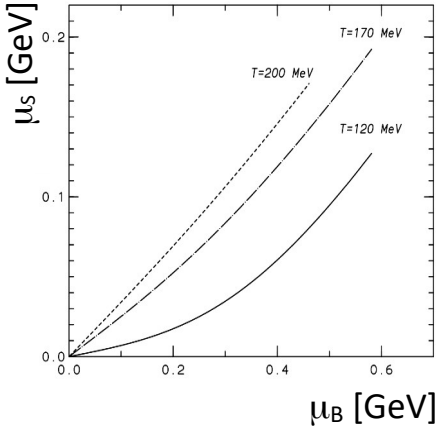
- Zderzenia Au+Au oraz Pb+Pb
  w szerokim zakresie energii (AGS – SPS – RHIC)

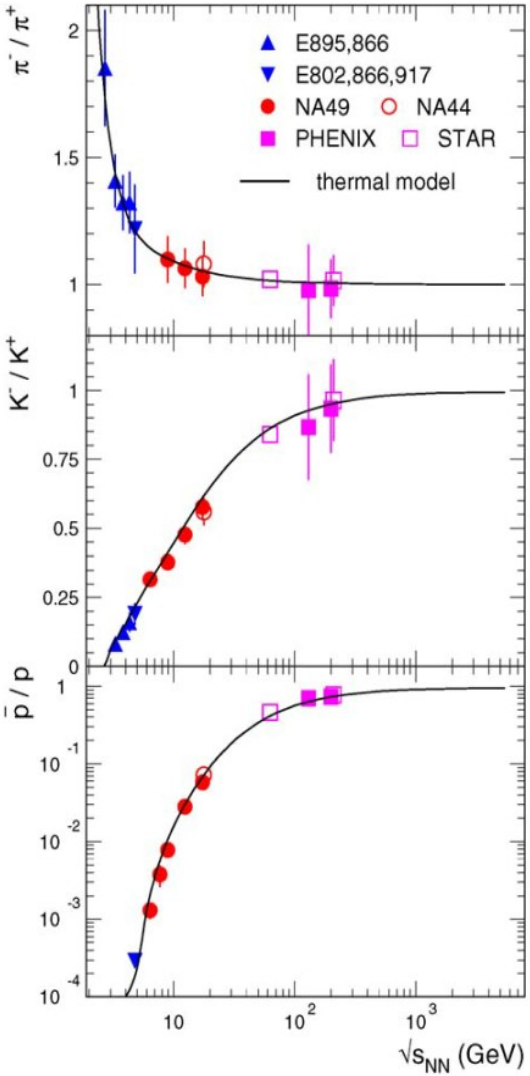
  (odstępstwo od materii symetrycznej:
  $[N-Z]/A = 0.2$; ciężkie systemy ;
  odjęty problem rozpadów)

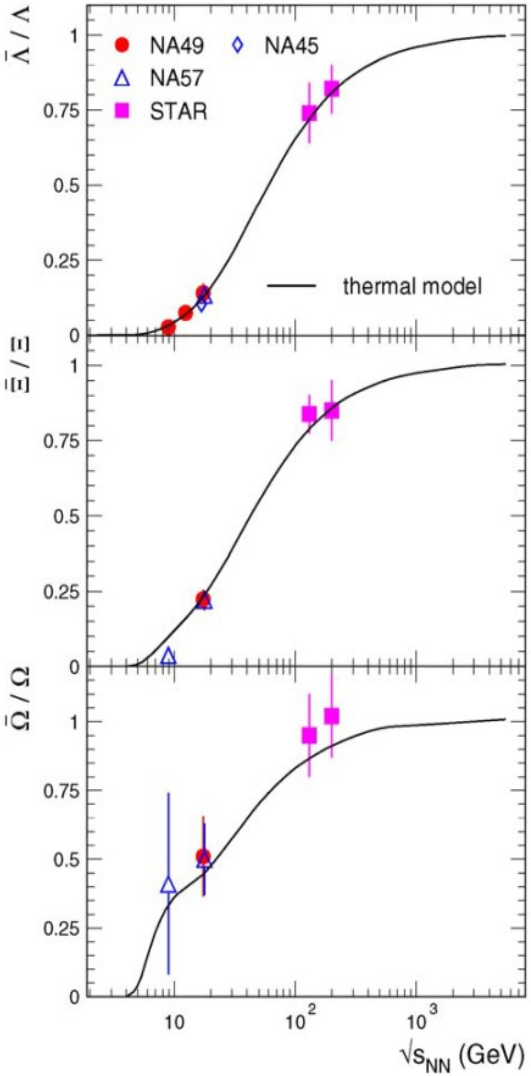
➡ **Ze wzrostem energii wiązki:**

- $\bar{p}/p$ rośnie, jak przewidywaliśmy.
- π^-/π^+ nierówne z powodu $N \neq Z$,
  Ale nieodległe od 1, i zbliża się do 1.
- Dla każdego hadronu z dziwnością
  stosunek $\bar{h}_S/h_S$ narasta od 0 do 1.





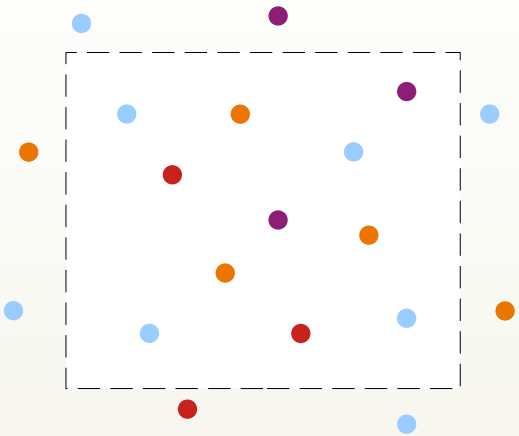




A. Andronic et al., Nucl. Phys. A 772 (2006) 167

Układy termodynamiczne

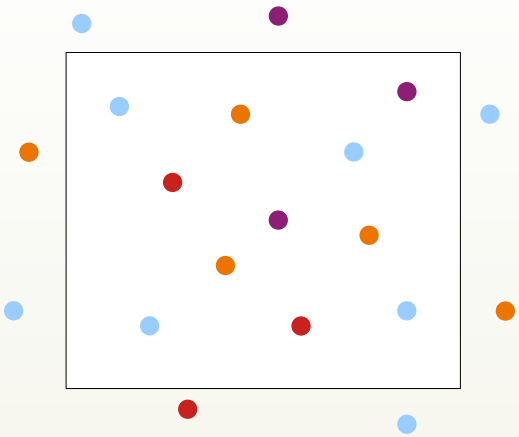
Układ Wielki Kanoniczny
(Grand Canonical Ensemble)



Układ ma otoczenie,
z którym wymienia cząstki i energię

Równowaga:
w układzie *średnio* N, E = const.
(może nieco $\pm$ fluktuować)

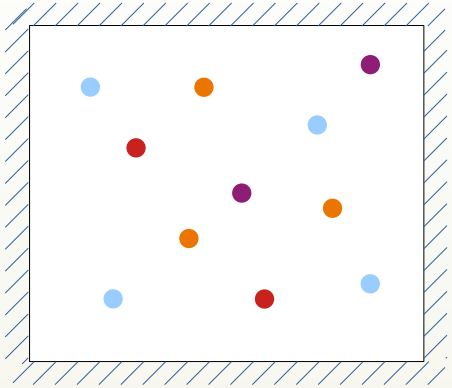
Układ Kanoniczny
(Canonical Ensemble)



Układ ma otoczenie,
z którym wymienia tylko energię

Równowaga:
E = const *średnio*
N = const ściśle

Układ Mikrokanoniczny
(Microcanonical Ensemble)



Układ całkowicie izolowany.

Równowaga:
N = const ściśle.
E = const ściśle.

- Układ 2 zderzających się jąder jest izolowany. Ale:
  - dokładne obliczenia są b. złożone
  - im większe jądra, tym bardziej układy przybliżone „działają dobrze”
- Cząstki produkowane rzadko (np. z kwarkiem s, c) : zasady zachowania S, C powinny być stosowane ściślej

Model statystyczny – podejście kanoniczne dla dziwności

- Rozwiązanie polega na zawężeniu funkcji partycji do podzbioru stanów układu o dokładnie ustalonych *N*, *S*, ...
  Obliczenia wykraczają poza materiał wykładu. Por. np. P. Braun-Munzinger et al., QGP 3, 491 (2004)

  Często problem jest ograniczony do małej krotności hadronów z kwarkiem s .
  Przy dominacji hadronów z $s \in \{-1, 0, 1\}$ rozwiązanie (**krotność hadronu o dziwności s_i**) sprowadza się do podmiany:

$$\left(e^{\frac{\mu_S}{T}}\right)^{s_i} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{S_{-1}}{S_1}\right)^{\frac{s_i}{2}} \cdot \frac{I_1(x)}{I_0(x)}$$

gdzie:

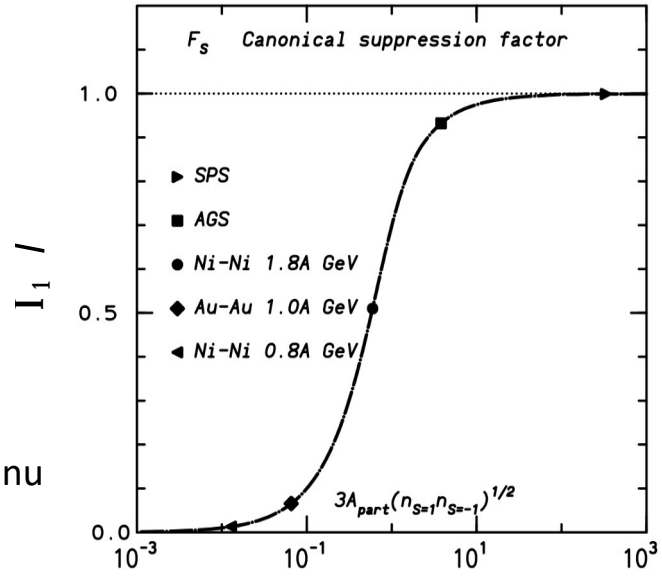
$$\left\{\begin{array}{l} S_1 = N_{K^+} + N_{K^0} + N_{K^*(892)} + N_{\bar{\Lambda}} + \ldots \\ S_{-1} = N_{K^-} + N_{\bar{K}^0} + N_{\Lambda} + N_{\bar{K}^*(892)} + \ldots \\ N_i = V \dfrac{g_i\, T^3}{2\pi^2\hbar^3} \exp\left[\dfrac{b_i\mu_B + q_i\mu_Q}{T}\right] \cdot \left(\dfrac{m_i}{T}\right)^2 \cdot K_2\left(\dfrac{m_i}{T}\right) \end{array}\right.$$

a'la łączna krotność hadronów o $S = 1$ lub -1, ale liczona jak poniżej.

I to zmodyfikowane funkcje Bessel'a 1. rodzaju
(tu: liczą się tylko I_0, I_1, I_{-1})
zaś argument $x = \sqrt{S_1 \cdot S_{-1}}$ (~ średnia z 'łącznych krotności')

- Wykres ukazuje I_1/I_0 w funkcji $\sim x$. Widzimy, że:
  - przy dużym systemie (duże krotności S_1 i S_{-1}) stosunek osiąga 1,
  - przy małym systemie (małe krotności S_1 i S_{-1}) stosunek tłumi krotność hadronu

➡ I_1/I_0 nazywa się "**canonical suppression factor**"



J. Cleymans et al., Phys. Rev. C 59, 1663 (1999)

Model statystyczny – podejście kanoniczne dla dziwności

- Autorzy tych prac: J. Cleymans et al., Phys. Rev. C 59, 1663 (1999) J. Cleymans et al., Phys. Lett. B 485, 27 (2000) zauważają, że suppression factor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} = \frac{x}{2} \qquad \text{gdzie} \qquad x = \sqrt{S_1 \cdot S_{-1}}$$

Ogólny wniosek: w modelu kanonicznym, dla hadronów dziwnych przy niskich krotnościach, $N \sim V^2$.

- Autorzy demonstrują wzory na krotności K^+ i K^- w pobliżu progów na produkcję dziwności (obcięte do wiodących członów, aby ukazać istotę rzeczy) :

$$N_{K+} \sim V \exp\left(-\frac{E_{K^+}}{T}\right) \cdot g_\Lambda V \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{E_\Lambda - \mu_B}{T}\right)$$

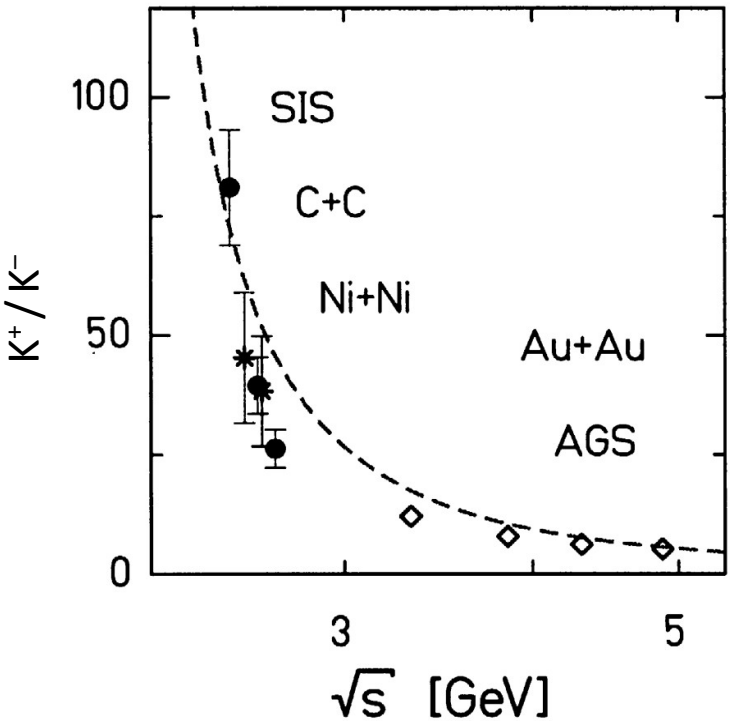
$$N_{K-} \sim V \exp\left(-\frac{E_{K^-}}{T}\right) \cdot g_{K^+} V \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{E_K^+}{T}\right)$$

Tak jak we wzorach ogólnych, tak i tu, widać że:

1) związanie krotności naszego hadronu z innymi hadronami, tu przede wszystkim związanie K^+ z Λ i K^- z K^+ (por. kanały $NN \to N K^+ \Lambda$, $NN \to NN K^- K^+$)

2) wzrost N z V^2 .

- Wykres: ukazuje, jak model termiczny w ujęciu kanonicznym opisuje doświadczalnie obserwowaną zmianę stosunku $N(K^+)/N(K^-)$ z T_{Beam} .



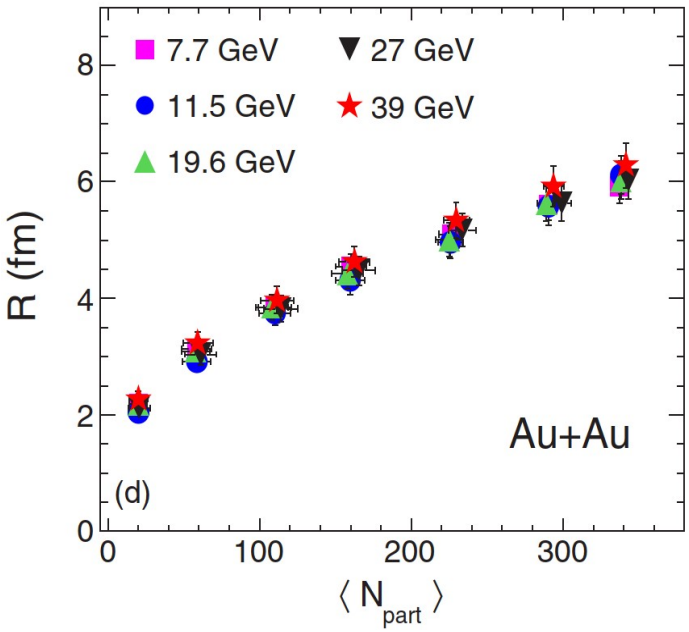
Model statystyczny – objętość strefy cząstek

- Dotychczas badaliśmy stosunki krotności.
  W podejściu wielkim kanonicznym (GCE), każda krotność jest $\sim V$ (ogólna normalizacja wszystkich krotności).
  W podejściu kanonicznym (CE), krotności hadronów dziwnych $\sim V^2$, a nie-dziwnych $\sim V$.

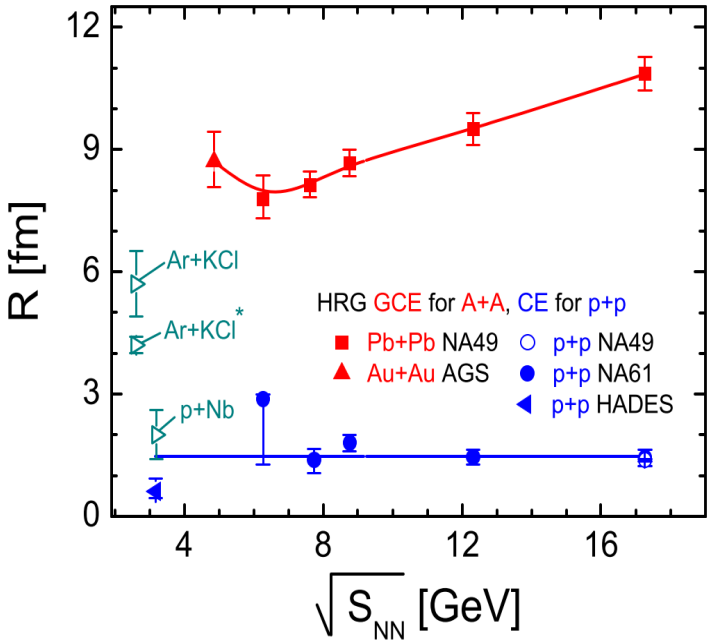
  Gdyby model dopasowywać **do krotności** (a nie do stosunków), to mamy metodę wyznaczania **objętości strefy zderzenia**!
  Zwykle parametryzuje się V jako efektywną sferę o promieniu R.
  Uwaga: metoda jest modelowo-zależna. Ale pierwsza, która się tu pojawia.

- Przykłady:

Podejście Strangeness-CE



Zderzenia centralne



„Promienie”: ~ kilka fm.

Rosną z rozmiarem:
– liczby partycypantów
– zderzającego się układu
Słabo zależą od energii wiązki.

Uwaga:

– nie oznacza to sferyczności strefy.

– gdyby strefy emisji różnych hadronów miały różne rozmiary, *to R* opisuje średni rozmiar.

L. Adamczyk et al. (STAR), Phys.Rev. C 96, 044904 (2017) V. Vovchenko et al., Phys.Rev.C 93, 064906 (2016)

Model statystyczny – nierównowaga hadronów dziwnych

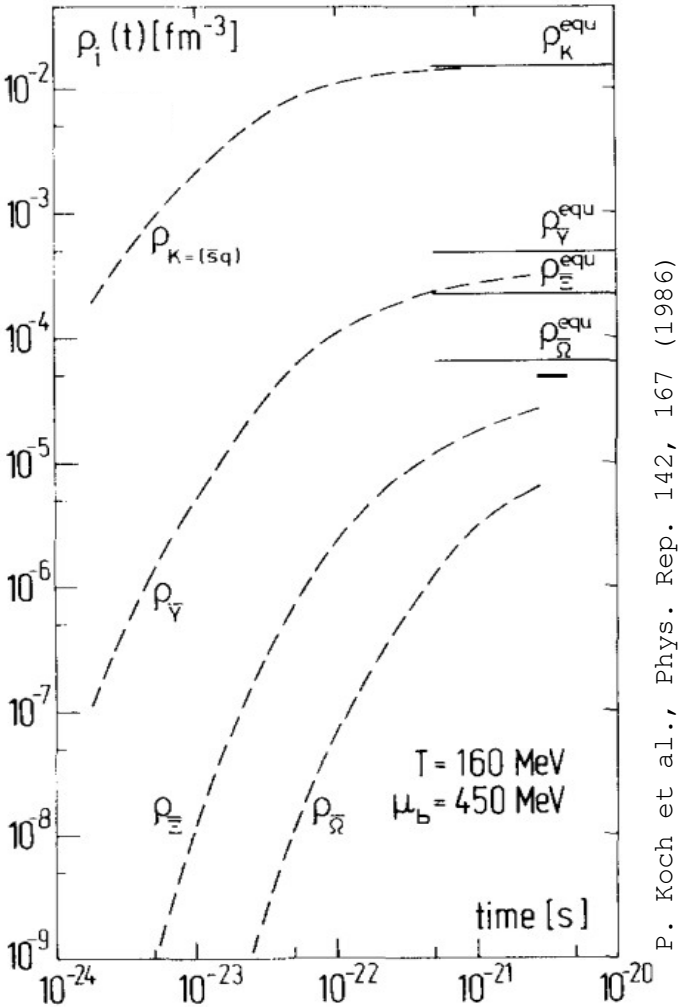
- W 1986 r. P. Koch, B. Müller i J. Rafelski oszacowali ewolucję krotności hadronów dziwnych (w funkcji czasu) w zderzeniu AA (bez zakładania ich równowagi termodynamicznej) wewnątrz gorącej materii hadronowej (wykres dla T = 160 MeV, μ_B = 450 MeV).

  Otrzymali, że **proces nasycania się krotności trwa długo** ($\gtrsim$ 60 .. 300 fm/c).

  (oszacowanie jest już historyczne , ale dokładniejsze modele prowadzą do podobnych wniosków).

  Z kolei w symulacjach modeli transportu zderzenia o takich energiach trwają ~ 10 .. 20 fm/c .

  Wniosek: **krotności hadronów dziwnych w zderzeniu mogą być mniejsze**, niż wartości w równowadze.



P. Koch et al., Phys. Rep. 142, 167 (1986)

- ***Propozycja*** (J. Rafelski, 1991) :

  parametr γ_s, efektywnie tłumiący krotność hadronu z kwarkiem s ($\bar{s}$):

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu_i}{T}\right) \pm 1} \rightarrow (\gamma_S)^{n_{|S|}} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu_i}{T}\right) \pm 1}$$

gdzie $n_{|S|}$ – to liczba kwarków s (lub $\bar{s}$) w hadronie.

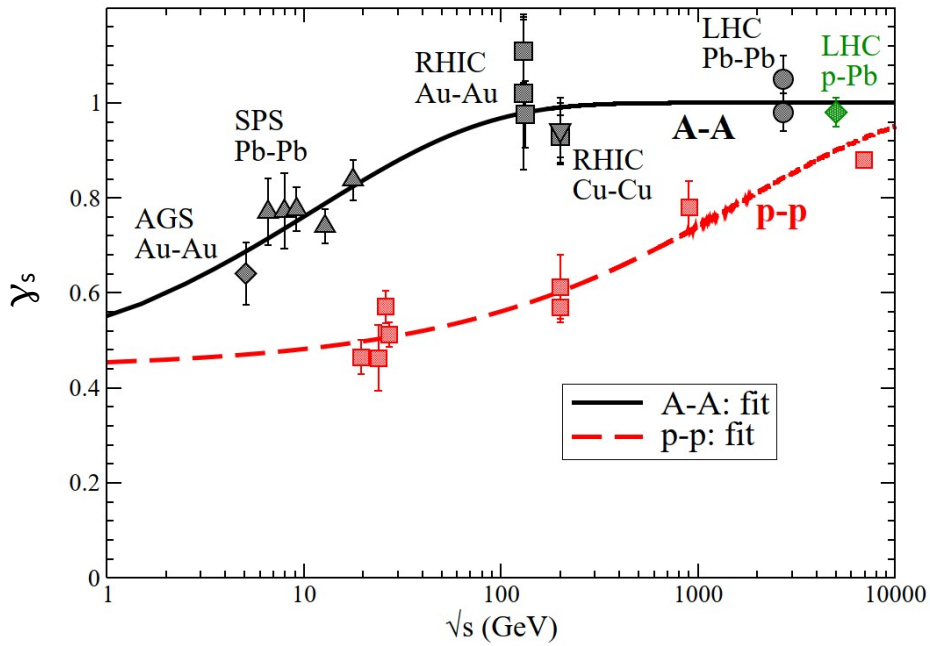
Jeśli dochodzi do równowagi, to $\gamma_s = 1$. Jeśli nie wystarcza czasu, to $\gamma_s < 1$.

- ***Propozycja*** (J. Rafelski, 1991) :
  parametr γ_s, efektywnie tłumiący krotność hadronu z kwarkiem s ($\bar{s}$):

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu_i}{T}\right) \pm 1} \rightarrow (\gamma_s)^{n_{|s|}} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu_i}{T}\right) \pm 1}$$

gdzie $n_{|s|}$ to liczba kwarków s (lub $\bar{s}$) w hadronie.
Jeśli dochodzi do równowagi, to $\gamma_s = 1$. Jeśli nie wystarcza czasu, to $\gamma_s < 1$.

- **Systematyka na rok 2016:** [P. Castorina *et al.*, IJMP E 25, 1650058 (2016)]



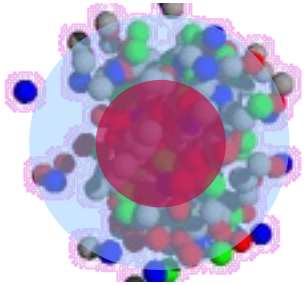
Im niższa energia wiązki
i im mniejszy układ,

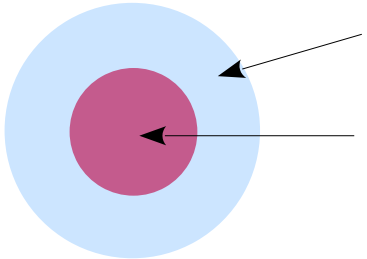
tym bardziej widoczne jest
„niedotarcie do równowagi”
w krotnościach dziwności.

Alternatywa – równowaga, ale produkcja w mniejszej V

- Alternatywny opis produkcji dziwności [np. A. Tounsi, K. Redlich, Jour. Of Phys. G 28, 2095 (2002)]:

  ⇨ dochodzi do równowagi, tylko **objętość, w której produkują się cząstki dziwne**, jest mniejsza od objętości całości.





V (lub ***R*** w $V = \frac{4}{3}\pi R^3$)

V_C (często: R_C, **Canonical Radius**)

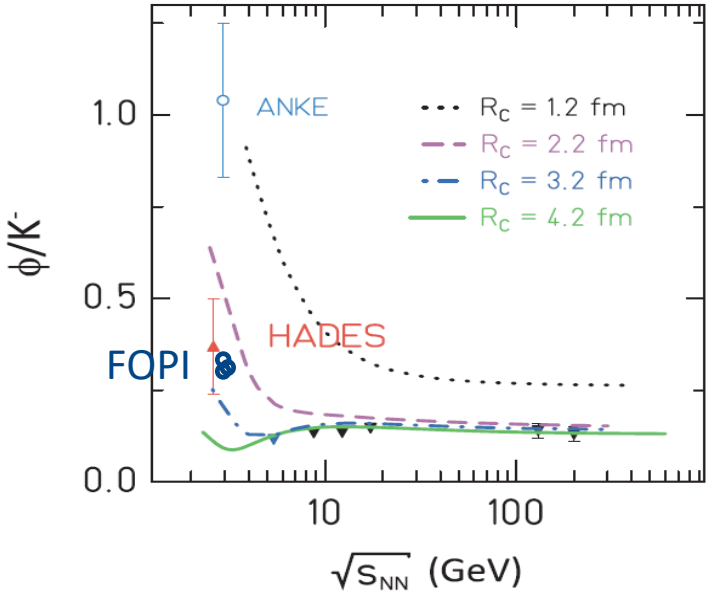
  ⇨ We wzorach na krotność hadronu mającego s ≠ 0, podmienia się $V \rightarrow V_C$.

- Przykład użycia tego wariantu:

  dopasowanie do przebiegu
  stosunku krotności ϕ / K^- w funkcji $\sqrt{s}$:

  Dane HADES : Ar+KCl @ 1.75A GeV
  Dane FOPI : Ni+Ni @ 1.9 A GeV
  Dane ANKE : p+p @ 2.7 GeV

  Uwaga: mezon ϕ składa się z $s\bar{s}$,
  więc zawsze spełnia S = 0,
  stąd w modelu jego objętością jest V, nie V_C.



G. Agakishiev et al., PRC 80, 025209 (2009)

Model statystyczny: dopływy z rozpadów

- Większość hadronów jest niestabilnych.
  Np. wszystkie N* i Δ rozpadają się w końcu na N i π.

  Typowe czasy rozpadów:

Typ rozpadu	τ [s]	Przykład
Silny	10^{-23} .. 10^{-21}	$\Delta^0 \to p\,\pi^-$: $\tau = 5\cdot 10^{-23}$ s
EM	10^{-20} .. 10^{-16}	$\pi^0 \to \gamma\gamma$: $\tau = 8\cdot 10^{-17}$ s
Słaby	10^{-10} .. 10^{-8}	$K^+ \to \mu^+ \nu_\mu$: $\tau = 1.2\cdot 10^{-8}$ s

- **Co rozumiemy przez „krotności”** ?

  Zwykle **eksperyment daje krotność „pierwotną” wraz ze wkładami z „szybkich” rozpadów** (silnych + EM),

  np.: krotność Λ = pierwotne Λ $\oplus$ wkład z rozpadu $\Sigma^0 \to \Lambda\gamma$
  krotność K^- = pierwotne K^- $\oplus$ wkład z rozpadu $\phi \to K^+K^-$

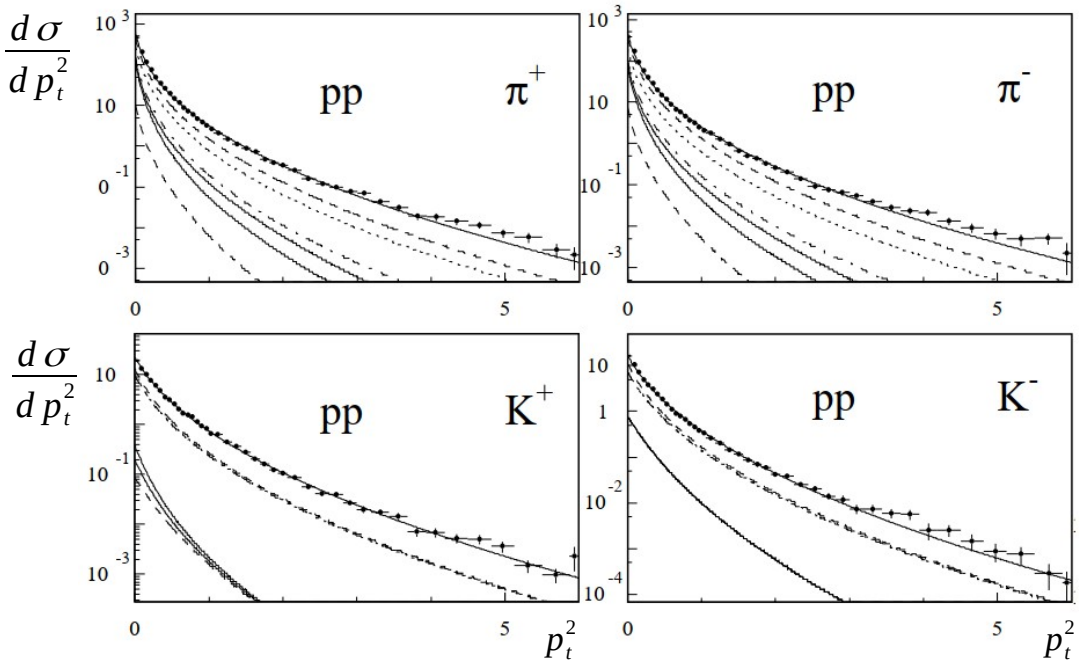
  Przy takiej definicji, model termiczny –
  po wyznaczeniu „krotności pierwotnych”
  (tj. w stanie równowagi) –
  musi pozwolić na „szybkie rozpady”.

  Dopiero „krotności finalne” mogą być
  porównane z eksperymentem.

- *Przykład*: rozkłady p_T^2 różnych hadronów
  ze zderzenia pp przy $\sqrt{s}$ = 27.4 GeV.

  Krzywe = dopasowanie modelu termicznego.

  Najwyższa krzywa = całościowa,
  Poniższe – dopływy z kolejnych rozpadów.



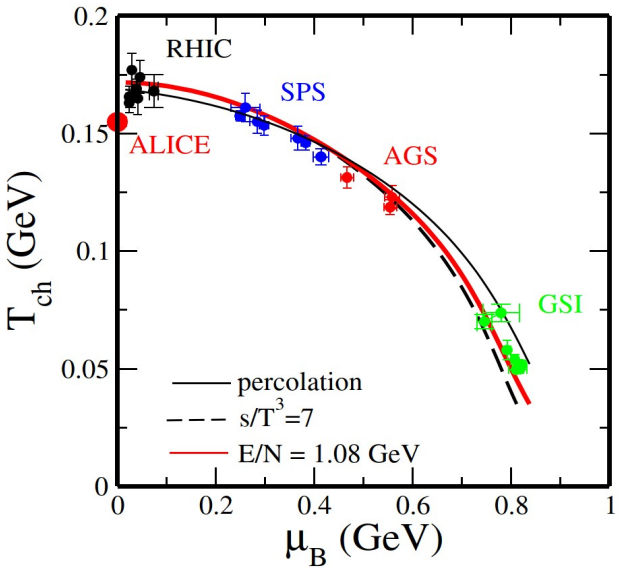
F. Becattini, G. Passaleva, Eur. Phys. J. C 23, 551 (2002)

Diagram fazowy: freeze-out a fazy materii QCD

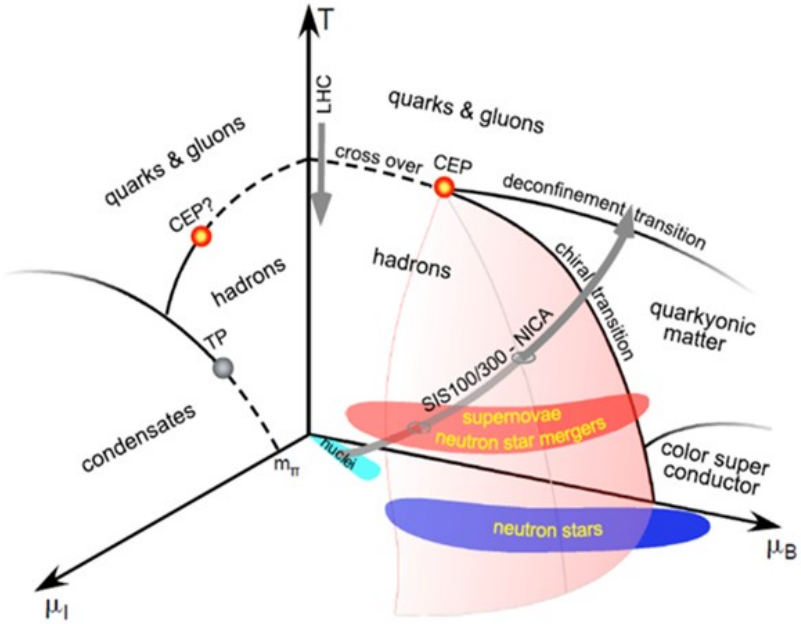
- Punkty doświadczalne na diagramie:
  migawka z **freeze-outu chemicznego** (chwili zamrożenia krotności)

  (*Do sygnatury freeze-outu kinetycznego jeszcze wrócimy.*)

- Podczas zderzenia materia przebiegałaby trajektorię na diagramie.
  Ale takie zdanie wymaga założenia równowagi w trakcie zderzenia → ??



- Ogólne (nieustalone) przewidywania dotyczące **faz materii QCD**:



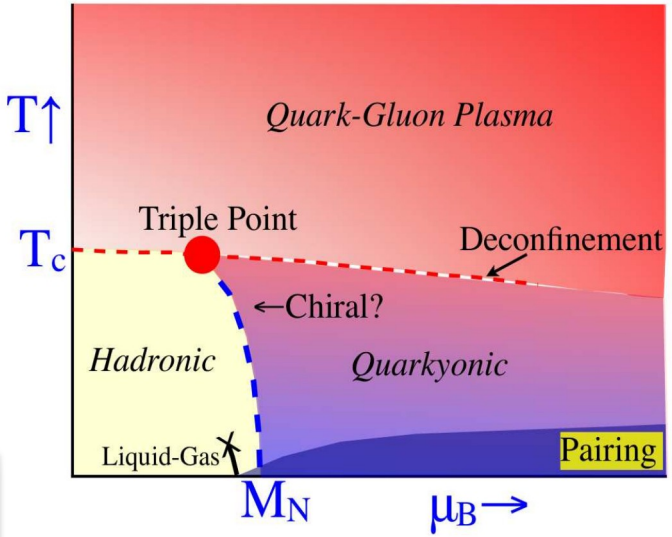


Diagram fazowy: freeze-out a fazy materii QCD

- Ogólne (nieustalone) przewidywania dotyczące **faz materii QCD**:

- Przejście „**linii chiralnej**”:

  W próżni (i w jądrach stabilnych) masa nukleonu (i innych hadronów) znacznie przewyższa sumę mas ich kwarków walencyjnych.
  Wg. QCD powodem są oddziaływania z wirtualnymi parami $q\bar{q}$.

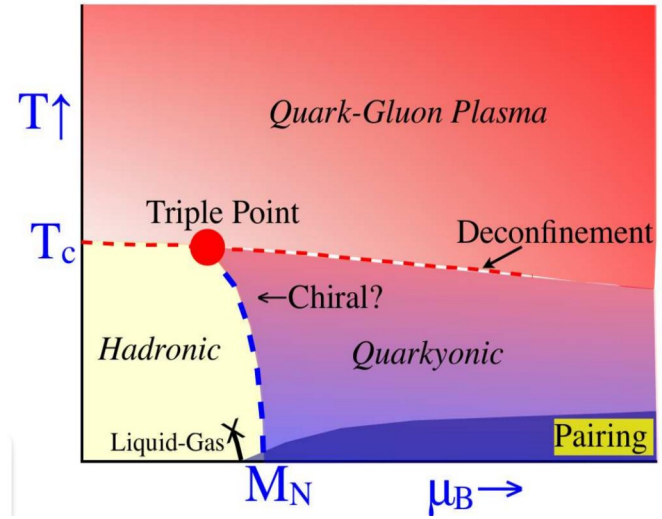
  Teoria przewiduje, że w gęstym i gorącym otoczeniu (np. zderzenia AA) liczba par $q\bar{q}$ maleje. W konsekwencji masy (wszystkich) hadronów powinny maleć ku sumie mas kwarków walencyjnych (to tzw. **częściowe przywrócenie symetrii chiralnej**) .

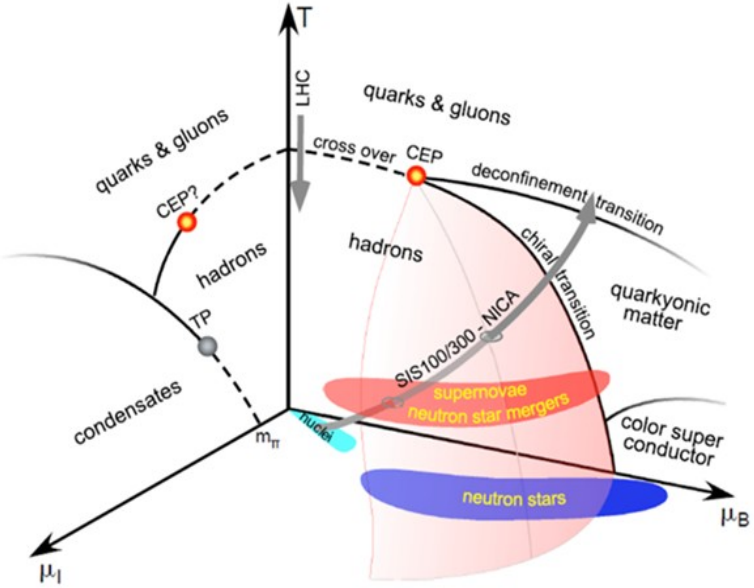
  Jednak w zderzeniach AA, oddziaływania „zwykły hadron – zwykły hadron” osłabiają czytelność tego efektu. Niemniej w zderzeniach AA **masy hadronów powinny się zmieniać**.

- Przejście „**linii deconfinement (uwolnienia)**”: zagęszczenie materii tak rośnie, że zachodzi uwolnienie kwarków z hadronów. Materia jest w fazie **QGP** („**plazmy kwarkowo-gluonowej**”) .

- Hipotetyczna „**quarkyonic matter**” : zachodzi jedno z przejść, ale nie drugie.

- „**Punkt potrójny**”: przy niższych μ_B przejście fazowe jest 2. rodzaju, a przy wyższych μ_B – 1. rodzaju.





Rozkład Boltzmanna – przestrzeń fazowa

- Powróćmy do klasycznego zapisu rozkładu Boltzmanna: $$\frac{d^3 N_i}{dp^3} = \frac{g_i V}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{\mu_i}{T}} \cdot e^{-\frac{E_i}{T}}$$

Jak widać, $\frac{d^3 N_i}{dp^3} \sim e^{-\frac{E_i}{T}}$, gdzie: $E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2}$

Po przejściu do zmiennych sferycznych: $\frac{d^3 N_i}{dp^3} = \frac{d^3 N_i}{p^2 dp \sin\theta \, d\theta \, d\phi} \sim e^{-\frac{E_i}{T}}$ widzimy, że RHS $\neq f(\theta,\phi)$ tj. izotropia.

- Scałkujmy po kątach: $$\frac{dN}{p^2 dp} \sim e^{-\frac{E}{T}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\frac{dn}{dp} \sim p^2 e^{-\frac{E}{T}}$$ (**rozkład pędów**)

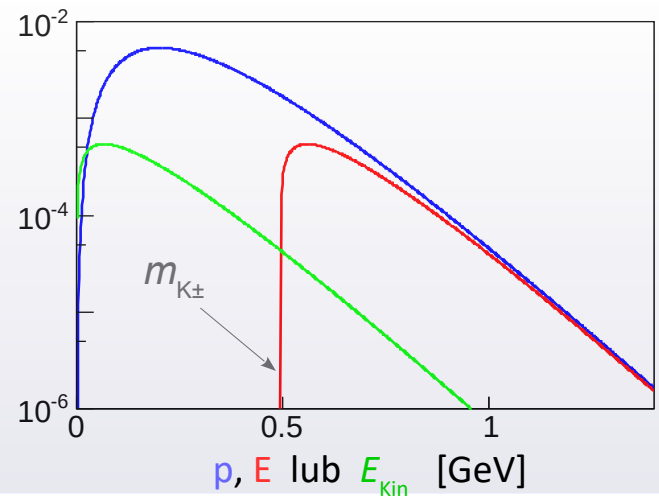
Można podmienić $p \to E$

$$E^2 = p^2 + m^2$$
$$2\,EdE = 2\,pdp$$

$$\frac{dn}{dE} \sim pE\,e^{-\frac{E}{T}}$$ (**rozkład energii**)

- **Ogólny kształt rozkładu:**

Przykład dla $K^{\pm}$ ($m_{K\pm}$ = 0.494 GeV/c²) emitowanych z temperaturą T = 0.100 GeV :



Rozkład Boltzmanna w zmiennych relatywistycznych

- Rozkład populacji cząstek jest opisany w układzie CM źródła cząstek, a nie w układzie LAB.
  Wg transformacji Lorentza, przejście $p_z^{CM} \rightarrow p_z^{Lab}$ nieliniowe $\rightarrow$ kłopot ...

  Przejdźmy do relatywistycznych zmiennych, które są niezmiennicze względem układu odniesienia.
  Zamieńmy $\{p_x\ p_y\ p_z\} \rightarrow \{p_T\ \phi\ y\}$, gdzie „y" = y_z.
  Rozpocznijmy od przepisania normalizacji:

$$\frac{d^3N}{dp^3} = \frac{N}{Z} \cdot e^{-\frac{E}{T}}$$

N = liczba cząstek
Z = suma statystyczna

$$Z = \int \exp(-E/T)\, d^3p$$

Jakobian:

$$dp_x dp_y dp_z = \frac{\partial(p_x, p_y, p_z)}{\partial(p_T, \phi, y)}\, dp_T d\phi\, dy = \ldots = p_T E\ dp_T d\phi\, dy$$

- Rozkład Boltzmanna nie zależy od ϕ.

$$\frac{d^2N}{dp_T dy} = 2\pi \frac{N}{Z} \cdot p_T E \cdot e^{-\frac{E}{T}}$$

- Częsta reprezentacja w m_T (masie poprzecznej)

$$m_T \equiv \sqrt{p_T^2 + m^2} \longrightarrow 2m_T dm_T = 2p_T dp_T$$

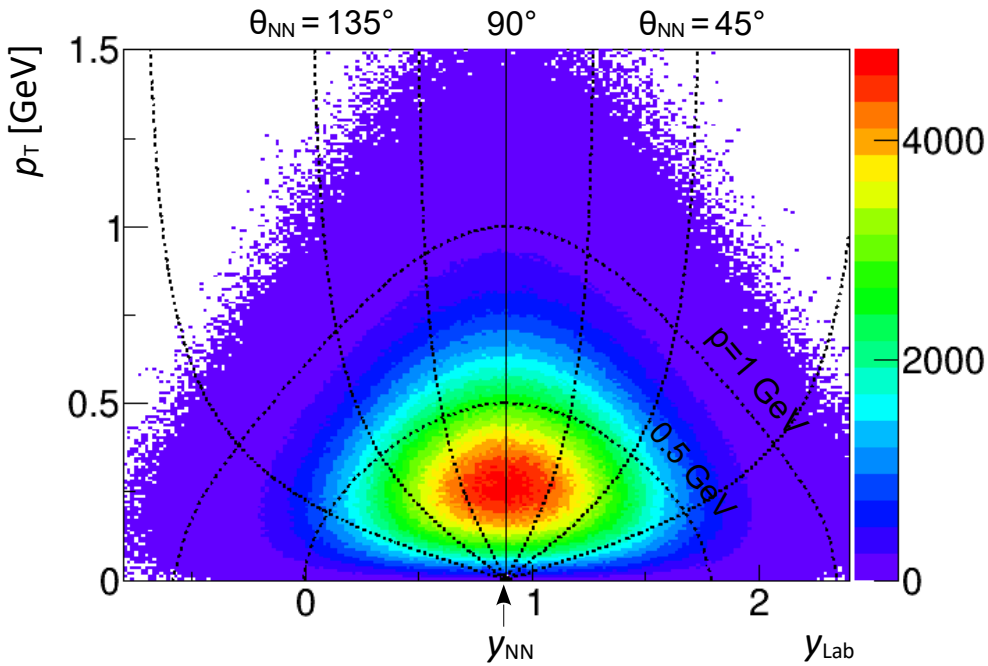
$$\frac{d^2N}{dm_T dy} = 2\pi \frac{N}{Z} \cdot m_T E \cdot e^{-\frac{E}{T}}$$

I przy okazji:

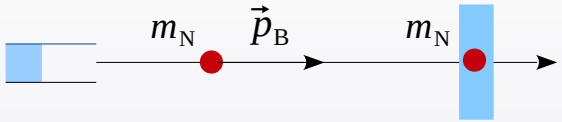
$$\begin{cases} E = m_T \cdot ch\, y \\ p_z = m_T \cdot sh\, y \end{cases}$$

Rozkład Boltzmanna w zmiennych p_T – y

- Symulacja: [*krok 1*] Emisja K^+ ze źródła boltzmannowskiego o T = 100 MeV, utożsamionego ze strefą zderzenia AA przy T_{Beam} = 1.9 *A* GeV.
  [*krok 2*] Obserwacja w układzie *Lab* rozkładu $d^2N / dp_T\, dy_{Lab}$



- *Ściągawka*: jak obliczyć y_{NN}.
  (E_B i p_B podane na 1 nukleon)



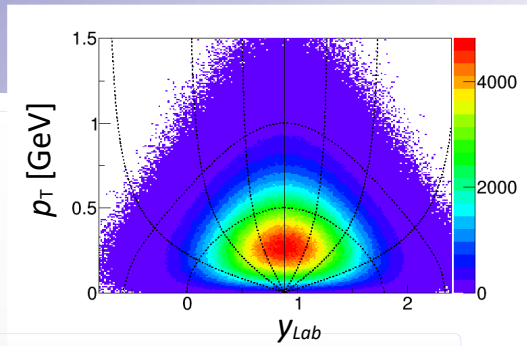
$$\begin{cases} E_B = T_B + m_N \\ p_B = \sqrt{E_B^2 - m_N^2} \\ \beta_{NN} = \dfrac{\sum p}{\sum E} = \dfrac{p_B}{2m_N + T_B} \\ y_{NN} = atanh\,(\beta_{NN}) \end{cases}$$

- Poziomice p_{CM} oraz θ_{CM} są nieliniowe. Dla $y = y_{NN}$ zachodzi $p_{NN} = p_{T,NN}$.
- Rozkład $d^2N / dp_T\, dy_{Lab}$: symetria wokół y_{NN}, gdzie rozkład osiąga maksimum.

  Gdyby wykreślić $d^2N / dp_T\, dy_{NN}$, to kształt identyczny. Jedyna różnica – to przesunięcie osi poziomej.

  Dla $y = y_{NN}$ maksimum dN/dp_T nie jest przy $p_T = 0$ (por. wzór $d^2N / dp_T dy_{NN}$ przy ustalonym $y_{NN} = 0$)

Model Boltzmanna: rozkłady p_T w przedziałach y



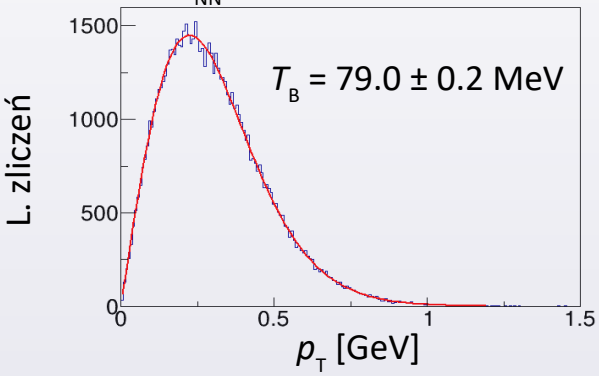
- Jak powinien wyglądać rozkład **dN/dp_T** dla ustalonego y? W układzie NN ($y = y_{\text{w NN}}$)

$$\left.\frac{d^2N}{dp_T\,dy}\right|_{y=y_i} = 2\pi\frac{N}{Z}\;p_T\cdot m_T ch\,y_i\cdot\exp\left(-\frac{m_T ch\,y_i}{T}\right)$$

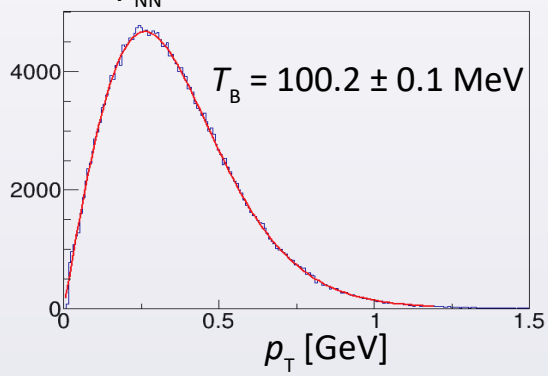
$$= 2\pi\frac{N}{Z}ch\,y_i\cdot p_T m_T\exp\left(-\frac{m_T}{T_B(y_i)}\right)$$

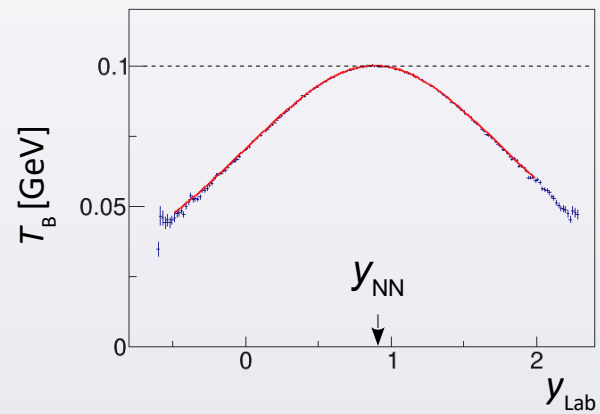
, gdzie $T_B(y_i) = \dfrac{T}{ch\,y_i}$ **„Odwrotne nachylenie”**

Dla y_{NN} = -0.7



Dla y_{NN} = 0





→ „Odwrotne nachylenie” (T_B) jest równe T tylko dla midrapidity (y_{NN}). Poza y_{NN} zachodzi zawsze $T_B < T$.

- <u>Doświadczalna definicja</u> **T_B**. Dla dowolnego doświadczalnego rozkładu p_T lub m_T, który zachowuje się „eksponencjalnie”, T_B jest parametrem dopasowania w eksponensie, tj. $N \sim \exp(-p_T/T_B)$.

Gdyby emisja była zgodna z modelem Boltzmanna, to T_B w funkcji y powinno się układać tak: $T_B(y_i) = \dfrac{T}{ch\,y_i}$

Model Boltzmanna: rozkład pospieszności

- Jak w ramach modelu Boltzmanna wygląda rozkład dN/dy ? Dla ustalonego $y = y_i$, można scałkować rozkład p_T.

$$\frac{dN}{dy} = \int_0^\infty \frac{d^2N}{dp_T\,dy}\bigg|_{y=y_i} dp_T = \ldots = C\, e^{-\frac{m}{T_B}} \left(m^2 T_B + 2mT_B^2 + 2T_B^3\right)$$

$$T_B(y_i) = \frac{T}{ch\, y_i}$$

$$= C\, e^{-\frac{m}{T}\, ch\, y} \cdot T^3 \cdot \left[\left(\frac{m}{T}\right)^2 \frac{1}{ch\, y} + 2\frac{m}{T}\frac{1}{ch^2 y} + 2\frac{1}{ch^3 y}\right]$$

- Załóżmy (dość częsty) przypadek ***m » T***. Z wyrażenia w [...] pozostanie tylko pierwszy wyraz. Teraz rozwińmy ch (y) wokół 0. Wynik zbiegnie do:

$$\frac{dN}{dy} \rightarrow C_2 \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{T/m}}\right)^2\right]$$

- Reasumując. Jeżeli zachodzi m » T, to rozkład zbiega do **funkcji Gaussa**, takiej że: $\sigma = \sqrt{T/m}$

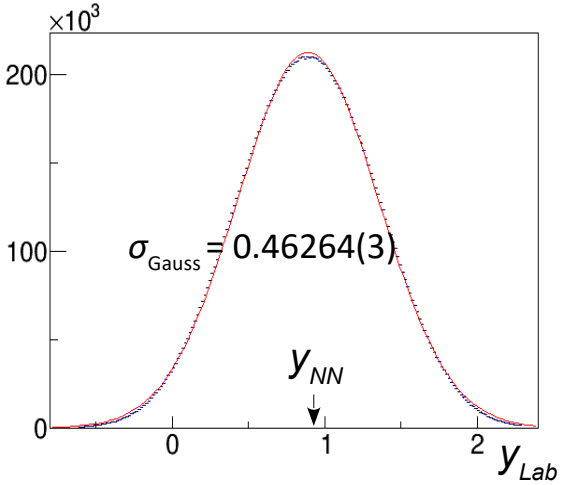
- W naszej symulacji:

1. Obliczamy:

$$\sqrt{T/m} = 0.450$$

2. Do rozkładu dN/dy dopasowujemy f. Gaussa

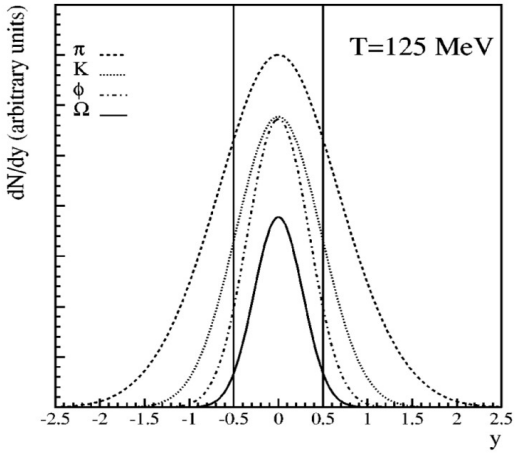
$$\sigma_{Gauss} = 0.46264(3)$$



Rozkład niemalże = funkcji Gaussa

Parametr σ niemal = spodziewanemu.

Zauważmy, że **σ powinna maleć z masą hadronu**, czyli np. tak:



- **Przypadek I**: Emisja K^0 i Λ ze zderzeń Ni+Ni @ 1.9A GeV

Rozkłady „w języku” m_T zamiast p_T
– to częsta reprezentacja. Dlaczego?

W modelu Boltzmanna:

$$\frac{d^2N}{dm_T\,dy} = 2\pi\frac{N}{Z}\; m_T E\; e^{-\frac{E}{T}}$$

a ponieważ $E = m_T \cdot ch\,y$

to:

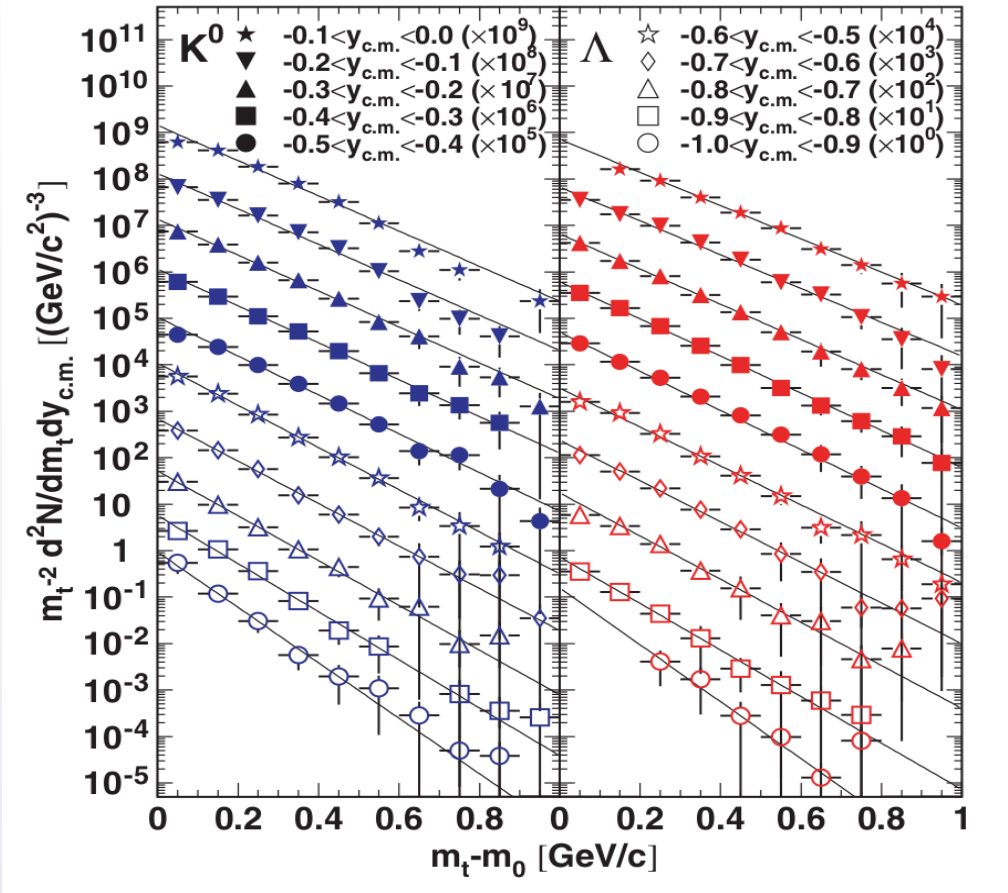
$$\left.\frac{d^2N}{dm_T\,dy}\right|_{y=y_i} \sim m_T^2\, e^{-\frac{m_T}{T_B(y_i)}}$$

a zatem:

$$\left.\frac{1}{m_T^2}\frac{d^2N}{dm_T\,dy}\right|_{y=y_i} \sim e^{-\frac{m_T}{T_B(y_i)}}$$

Jeżeli rozkład w przestrzeni fazowej jest zgodny z modelem Boltzmanna,

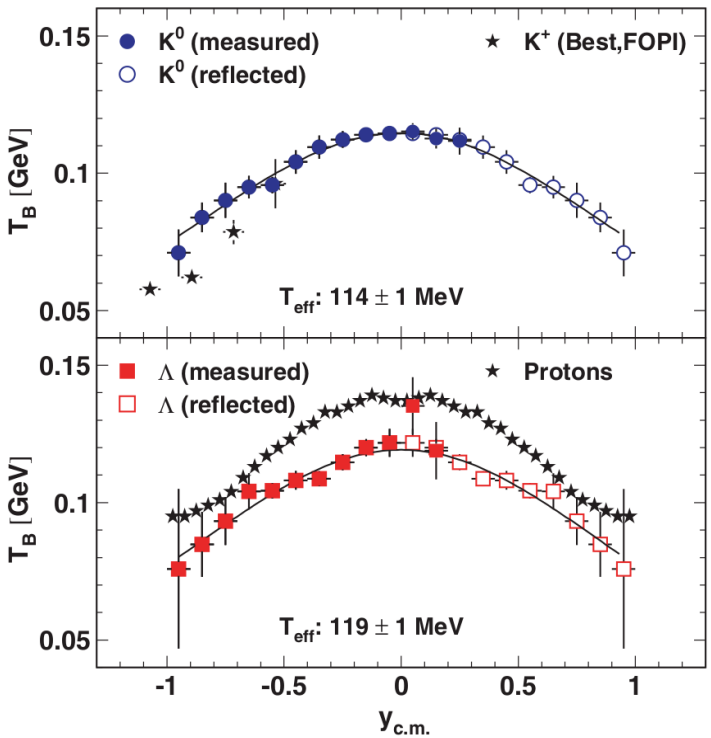
to tak przygotowane widma powinny eksponencjalnie maleć.



M. Merschmeyer et al., Phys. Rev. C 76, 024906 (2007)

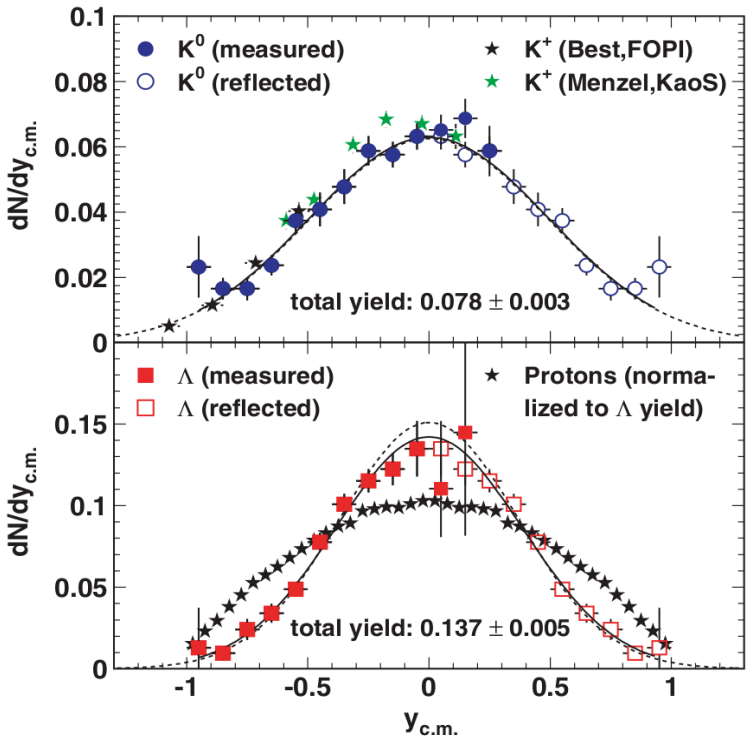
Doświadczalne rozkłady populacji w przestrzeni pędowej

- Rozkład $T_B = f(y)$ dla K^0 i Λ oraz dla protonów



M. Merschmeyer et al., Phys. Rev. C 76, 024906 (2007)

- Rozkład dN/dy dla K^0 i Λ oraz dla protonów

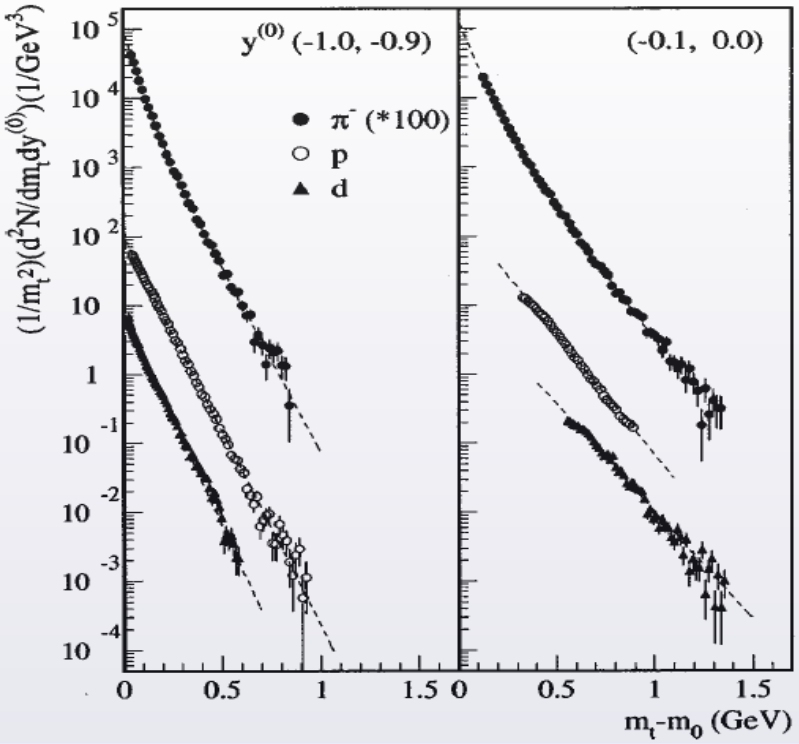


Rozkłady $T_B = f(y)$ i dN/dy dla K^0 i Λ dają się opisać przez model Boltzmanna

Rozkłady $T_B = f(y)$ i dN/dy dla protonów – już nie...

- **Przypadek II**. Emisja p, d i π^- ze zderzeń Ni+Ni @ 1.9*A* GeV.

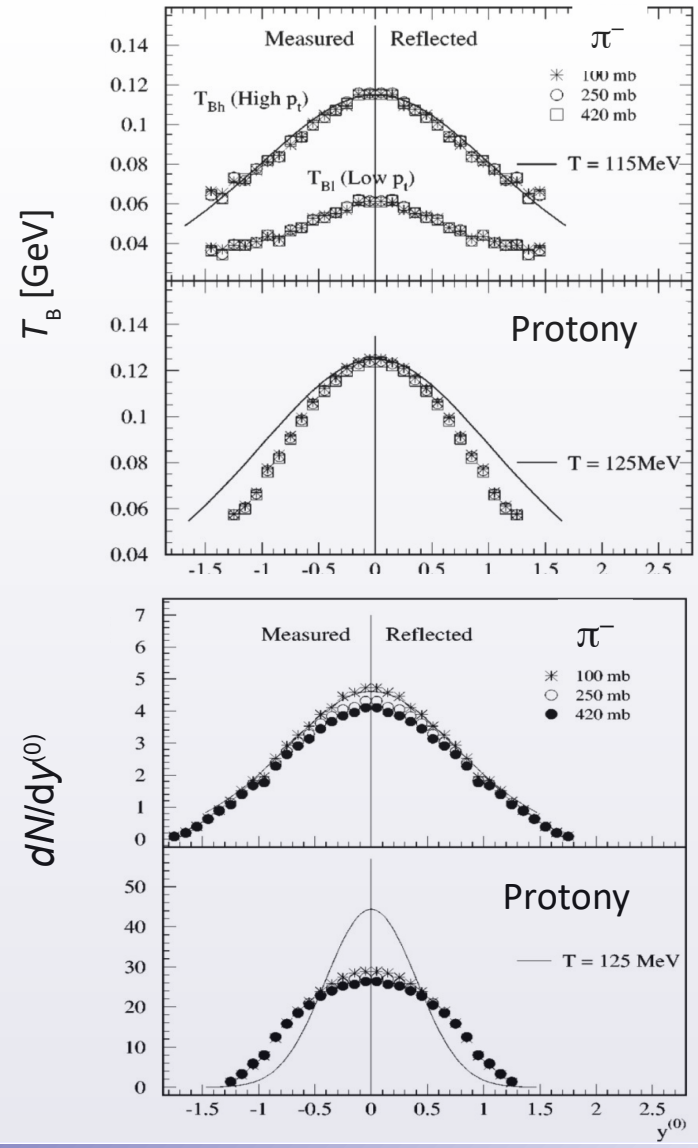
Pospieszność zredukowana: $y^{(0)} \equiv \frac{y_{w\,Lab} - y_{CM}}{y_{CM}}$



m_T : protony i deuterony zgodne z modelem Boltzmanna
π^- : możliwe złożenie 2 komponentów.

$T_B(y)$: p , π^- : niezgodne z modelem Boltzmanna

dN/dy : p : niezgodne z modelem Boltzmanna



B. Hong et al., Phys. Rev. C 57, 244 (1998)

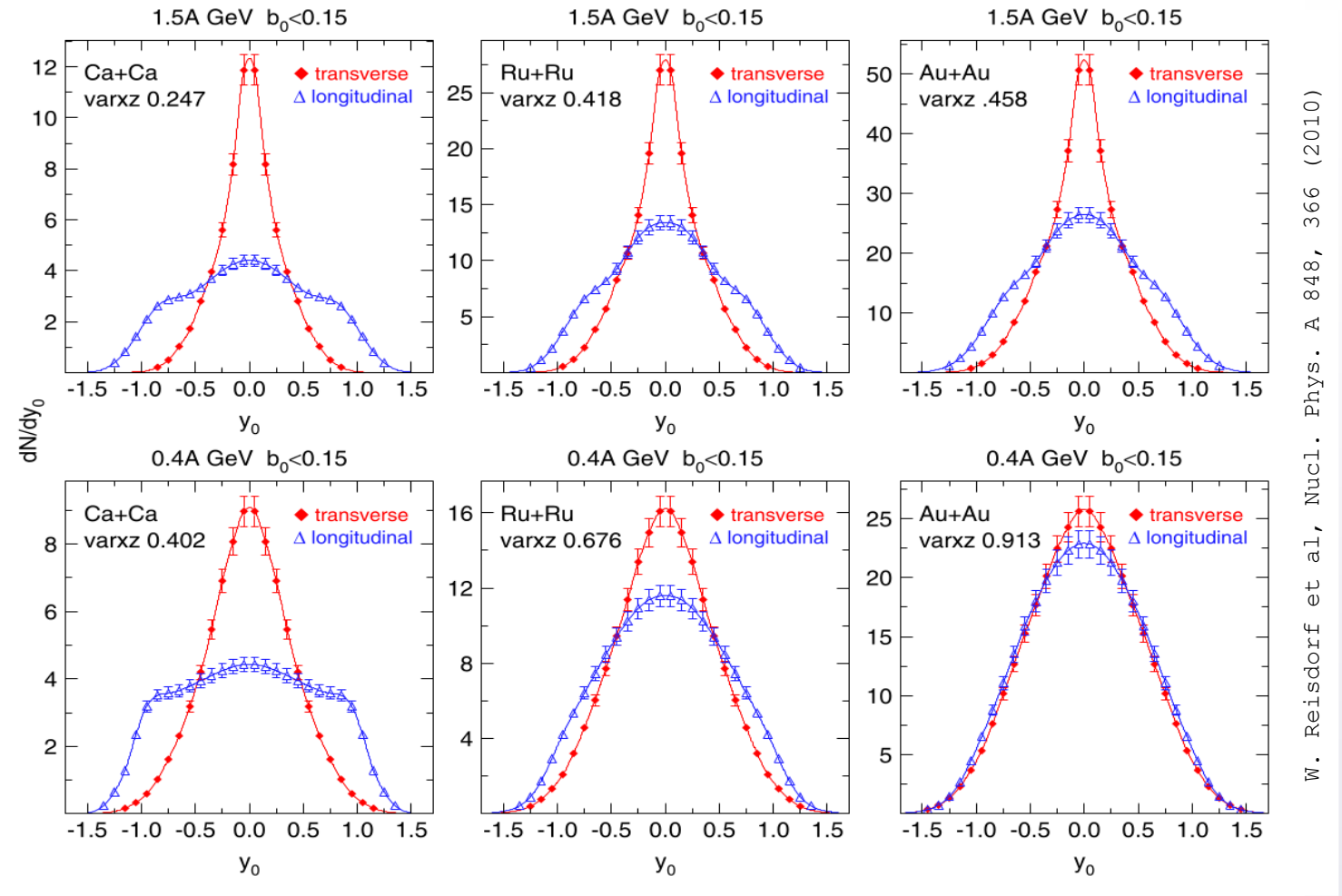
Doświadczalne rozkłady populacji w przestrzeni pędowej

- **Przypadek III** : Rozkłady pospieszności deuteronów z centralnych zderzeń AA @ 0.4*A* I 1.5*A* GeV

$$y_z = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_z}{E-p_z}$$

$$y_{x,y} = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_{x,y}}{E-p_{x,y}}$$

- W modelu Boltzmanna emisja izotropowa
  - ⇨ Wszystkie kierunki równouprawnione
  - ⇨ dN/dy_i takie same dla każdego kierunku



Rozkłady w większości niezgodne z modelem Boltzmanna.

- **Przypadek IV** : Rozkłady kąta polarnego emisji K^+ i K^- ze zderzeń Au+Au @ 1.5A GeV

- Rozkład izotropowy :

$$\frac{dN}{\sin\theta\, d\theta} = const$$

$$\longrightarrow \quad \frac{dN}{d\cos(\theta)} = const$$

- Model Boltzmanna : rozkład izotropowy

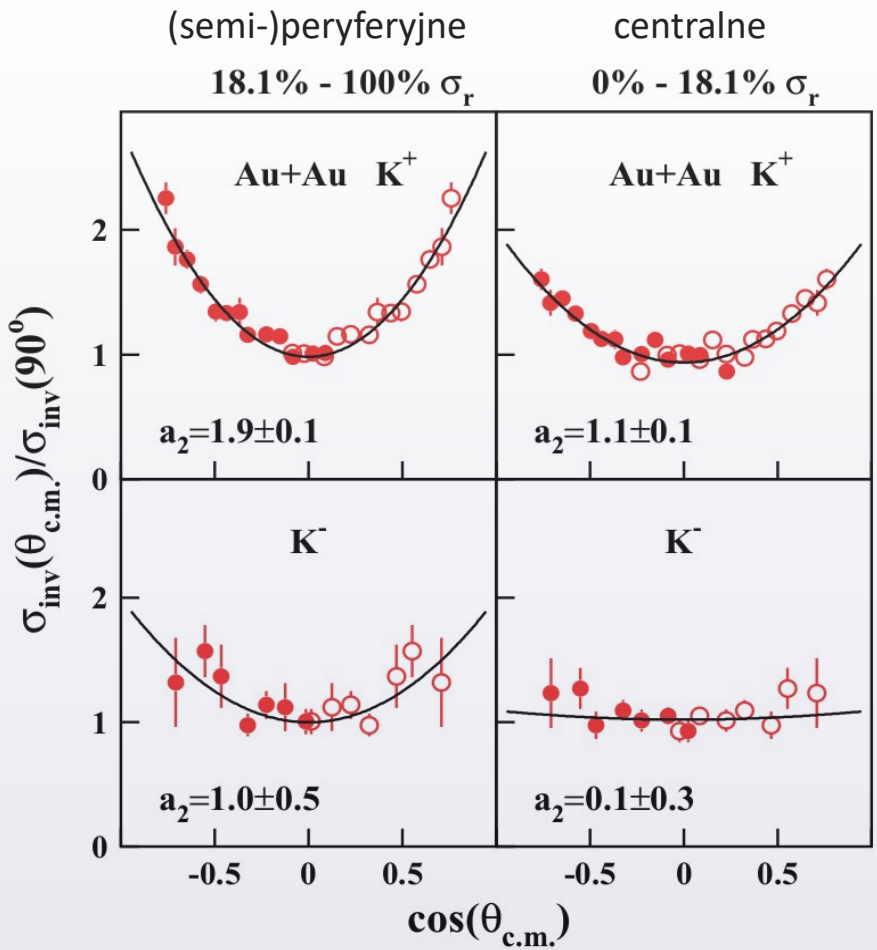
- Eksperyment(y):

Parametryzacja fenomenologiczna:

$$\frac{dN}{d\cos\theta_{NN}} \sim 1 + a_2 \cos^2\theta_{NN}$$

- Obserwowana **anizotropia kątowa**

(*za wyjątkiem K^- ze zderzeń centralnych*)



A. Förster et al., Phys. Rev. C 75, 024906 (2007)

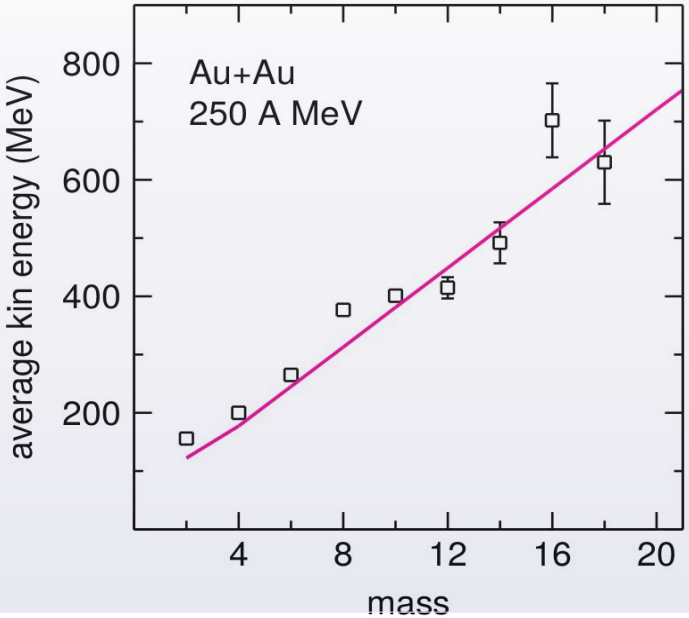
Opis stanu końcowego: ruch kolektywny, stopping, koalescencja

- Modele ruchu kolektywnego:
  - Rozkład średniej energii kinetycznej
  - Model Siemens'a – Rasmussena
  - Model Blast Wave
- Wystopowanie materii, znacznik izospinowy
- Koalescencja (zlepianie nukleonów we fragmenty)

- Średnia energia kinetyczna 1 cząstki w ruchu termicznym: $\langle E_{\mathrm{Kin}} \rangle = \frac{3}{2} kT$

  (nierelatywistycznie)

  Nie zależy ona od masy cząstki. Tymczasem:



W. Reisdorf, H.G. Ritter, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 47, 663 (1997)

- Gdyby wszystkie cząstki cechował dodatkowy składnik ruchu ze wspólną prędkością v, to w przybliżeniu nierelatywistycznym :

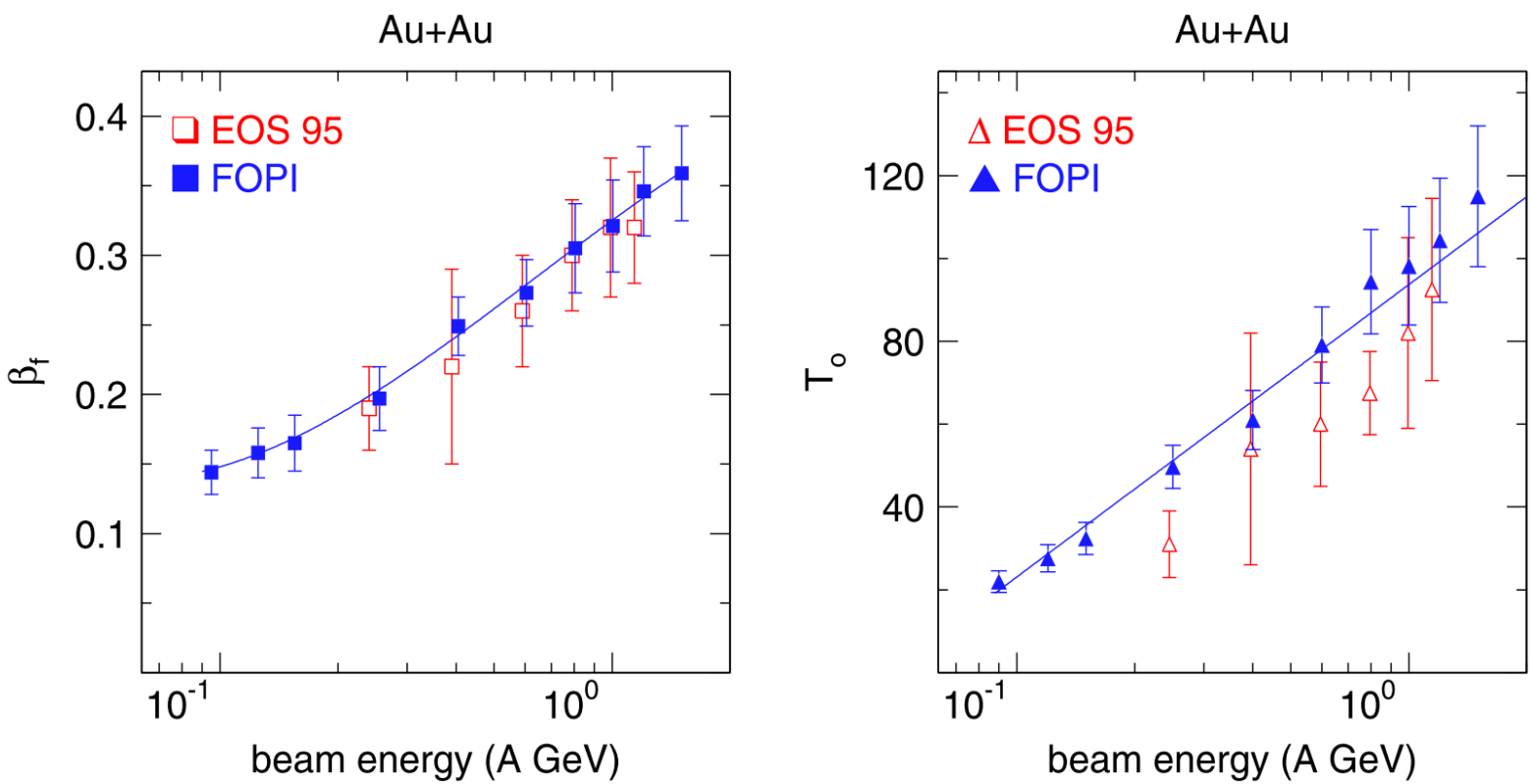
$$\langle E_{\mathrm{Kin}} \rangle \approx \frac{3}{2} kT + \frac{mv^2}{2} = A + B \cdot m$$

Argument za istnieniem (dodatkowego) ruchu kolektywnego.

Prosta systematyka podziału na ruch kolektywny i termiczny

- Przyjmując $\langle E_{\mathrm{Kin}} \rangle \approx \frac{3}{2}kT + \frac{m}{2}(c\beta_F)^2$

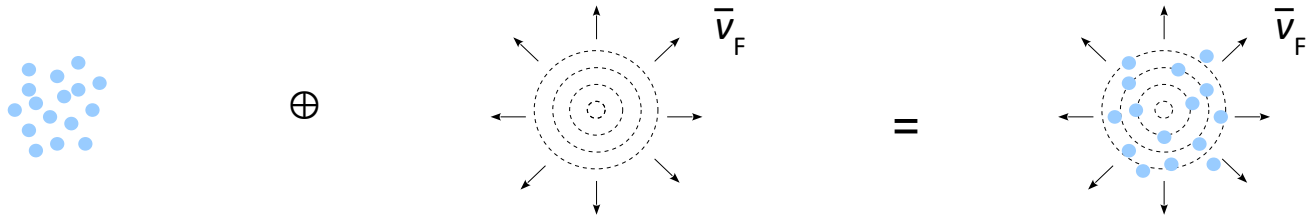
wykonano ogólną systematykę parametrów T i β_F dla zderzeń Au+Au w obszarze $T_{\mathrm{Beam}} \in [0.1 - 2]$ A GeV:



W. Reisdorf et al., Nucl. Phys. A 848, 366 (2010)

Temperatura rośnie 4-krotnie, a β_F dwukrotnie do poziomu $0.35 \cdot c$.

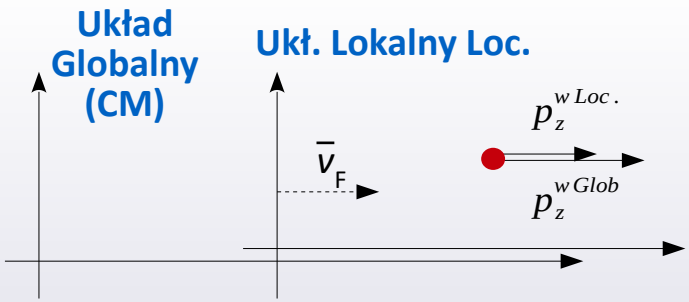
”Siemens-Rasmussen model” / ”radial blast wave model”



Ruch termiczny (Boltzmann) | Ruch kolektywny (ekspansja. radialna) | Złożenie

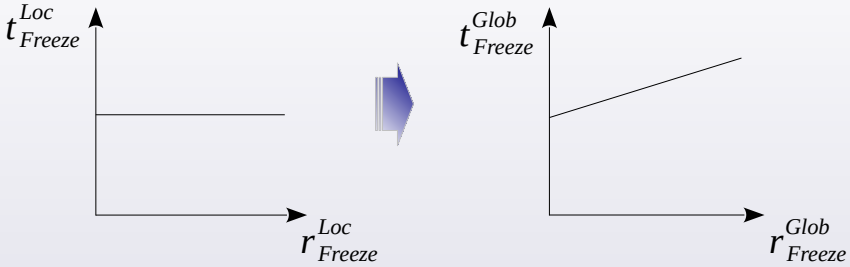
1. Materia jest w równowadze termodynamicznej w układzie lokalnym, ale kolejne powłoki ekspandują. Założenie: ekspansja radialna, ze stałą prędkością v_F (F = flow) (nadal symetria sferyczna)

2. Lokalnie, w chwili t^{Loc}_{Freeze}, następuje freeze-out: powłoki dezintegrują w swobodne hadrony (nieoddziałujące, lecące ku detektorom). Czyli: $dt^{Loc}_{Freeze} = 0$



Tr. Lorentza: w U. Loc freeze-out rozchodzi się liniowo.

”Freeze-out curve”



Formuła Siemensa-Rasmussena

$$\left.\frac{d^3n}{dp^3}\right|_{CM} = \frac{N_i}{Z(T)} \cdot e^{-\frac{\gamma_F E}{T}} \cdot \left[\left(\gamma_F + \frac{T}{E}\right)\frac{sh\alpha}{\alpha} - \frac{T}{E}ch\alpha\right]$$

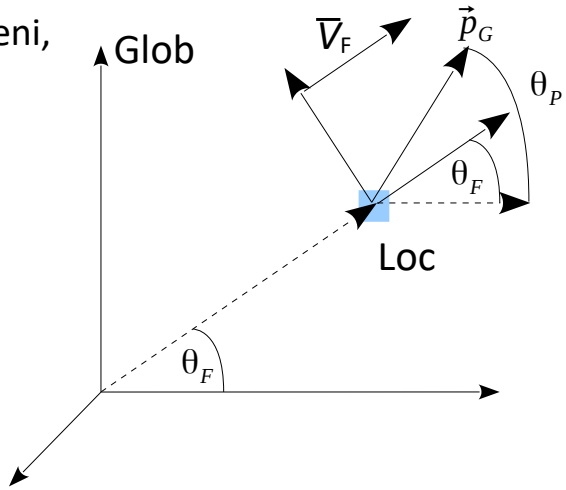
gdzie: $\alpha = \gamma_F \beta_F p/T$

N_i, Z : stałe normalizacyjne

P.J. Siemens, J.O. Rasmussen, Phys. Rev. Lett. 42, 880 (1979)
W.Florkowski, W.Broniowski, Acta Phys. Pol. B 35, 2895 (2004)

Model Siemensa-Rasmussena: wyprowadzenie

1. Do Freeze-out'u dochodzi w różnych punktach przestrzeni. W każdym elemencie przestrzeni, w układzie lokalnym Loc, prawdopodob. opisuje rozkład Boltzmanna. Całość jest całką po obszarze freeze-out'u. Będziemy przechodzić Glob ↔ Loc ⇔ zapis jest niezmienniczy.



$$E_{Loc}\frac{d^3N}{dp^3_{Loc}} = \frac{g}{(2\pi)^3}\frac{E_{Loc}}{\exp\frac{E_{Loc}-\mu}{T_{Loc}}}\,d^3x_{Loc}$$

2. Do Transformacji Lorentza, wektory trzeba rozłożyć na składowe || i ⊥ do $\overline{V}_F$.

$$\begin{cases} E_{Loc} = \gamma_F\left(E_G - V_F\cdot p_G\cos\left(\theta_p-\theta_F\right)\right) \\ dx_{\|,Loc} = \gamma_F\left(dx_{\|,G} - V_F dt_G\right) \\ dx_{\perp,Loc} = dx_{\perp,G} \end{cases}$$

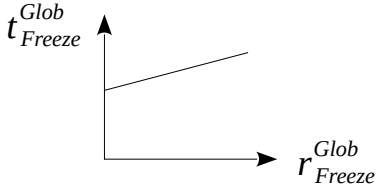
3. Założenie: do Freeze-out'u dochodzi w tej samej chwili lokalnej $\quad 0 \equiv dt_{Loc} = \gamma_F\left(dt_G - \frac{V_F}{c^2}dx_{\|,G}\right) \Rightarrow dt_G = \frac{v_F}{c^2}dx_{\|,G}$

Stąd: $\quad dx_{\|,Loc} = \gamma_F\left[1-\left(\frac{V_F}{c^2}\right)^2\right]dx_{\|,G} = \frac{dx_{\|,G}}{\gamma_F}$

4. W układzie globalnym, Freeze-out zachodzi w pewnym zbiorze punktów $(t,\overline{x})$.
Tu powstało wiele hipotez modelowych, zależnych od tego, jak wyobrażamy sobie ekspansję kolektywną.

Hipoteza Siemens'a – Rasmussena:

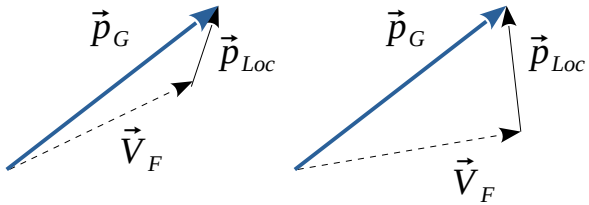
1) ∀ chwili lokalnej, punkty Freeze-out'u leżą na sferze.
2) trajektoria (t, r) w Układzie Glob. jest liniowa: $\quad t_G = t_{0,G} + \frac{V_F}{c^2}r_G \Rightarrow dt_G = \frac{V_F}{c^2}dr_G$



5. LHS dotychczasowego wyrażenia przepisujemy na Układ Globalny. Całe równanie:

$$E_G \frac{d^3N}{dp_G^3} = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{\cancel{\gamma}\left(E_G - V_F p_G \cos(\theta_P - \theta_F)\right)}{\exp\dfrac{\gamma\left(E_G - V_F p_G \cos(\theta_P - \theta_F)\right) - \mu}{T_{Loc}}} \frac{d^3x_G}{\cancel{\gamma}}$$

6. Jednak w tę samą komórkę pędu $\overline{p}_G$ mogą wpaść różne cząstki, w których wektor $\overline{V}_F$ (ze sfery) oraz $\overline{p}_{Loc}$ składają się do $\overline{p}_G$. Całkowanie po punktach Freeze-out'u uwzględni wszystkie takie złożenia.



$$E_G \frac{d^3N}{dp_G^3} = \int\int\int \sin\theta_p d\theta_p d\phi_p r^2 dr \; \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{\left(E_G - V_F p_G \cos(\theta_P - \theta_F)\right)}{\exp\dfrac{\gamma\left(E_G - V_F p_G \cos(\theta_P - \theta_F)\right) - \mu}{T_{Loc}}} d^3x_G$$

Całkujemy po wszystkich θ_p, więc bez straty ogólności scałkujmy po $\alpha \equiv \theta_p - \theta_F$. Podstawmy też: $a = \dfrac{\gamma V_F p}{T}$

$$= \frac{g}{(2\pi)^2} \exp\left(\frac{-\gamma E_G + \mu}{T_{Loc}}\right) \cdot \int r^2 dr \cdot \int \sin\alpha\, d\alpha \left(E_G - V_F p_G \cos\alpha\right) \cdot e^{a\cos\alpha} d^3x_G$$

Dwie całki: $\displaystyle\int_0^\pi e^{a\cos\alpha} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2\sinh a}{a}$ i $\displaystyle\int_0^\pi e^{a\cos\alpha} \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = -\frac{2\sinh a}{a^2} + \frac{2\cosh a}{a}$

$$\frac{d^3N}{dp_G^3} = \frac{g}{2\pi^2} \exp\left(\frac{-\gamma E_G + \mu}{T_{Loc}}\right) \cdot \frac{r^3}{3} \cdot \left[\frac{\sinh a}{a} + \frac{T_{Loc}}{\gamma E_G}\left(\frac{\sinh a}{a} - \cosh a\right)\right] d^3x_G$$

Jak pracuje model Siemensa-Rasmussena?

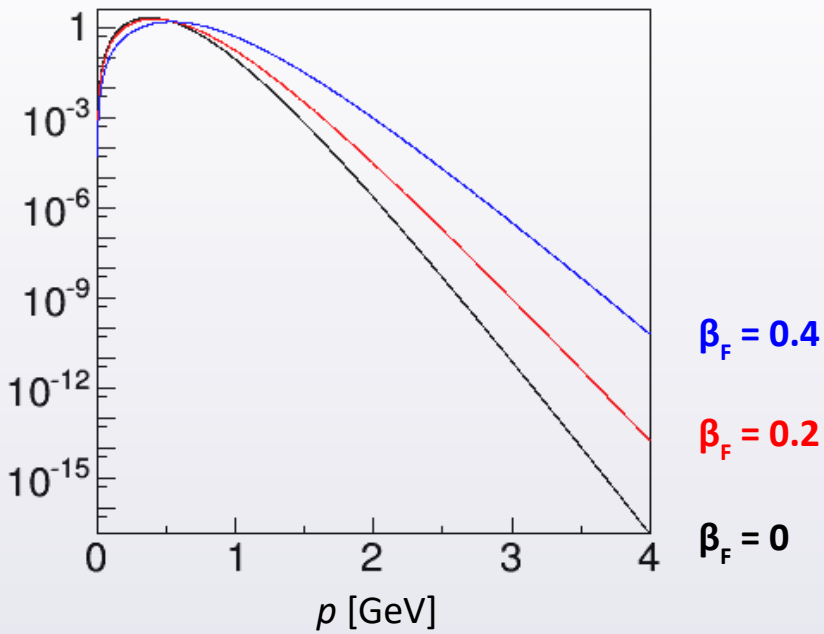
$$\left.\frac{d^3n}{dp^3}\right|_{CM} = \frac{N_i}{Z(T)} \cdot e^{-\frac{\gamma_F E}{T}} \cdot \left[\left(\gamma_F + \frac{T}{E}\right)\frac{sh\,\alpha}{\alpha} - \frac{T}{E}ch\,\alpha\right]$$

gdzie: $\alpha = \gamma_F \beta_F p/T$

N_i, Z : stałe normalizacyjne

- **Jeśli $\beta_F \to 0$**, to $\alpha \to 0$. Wyrażenie [...] $\to 1$. W efekcie **rozkład S-R $\to$ rozkład Boltzmanna .**

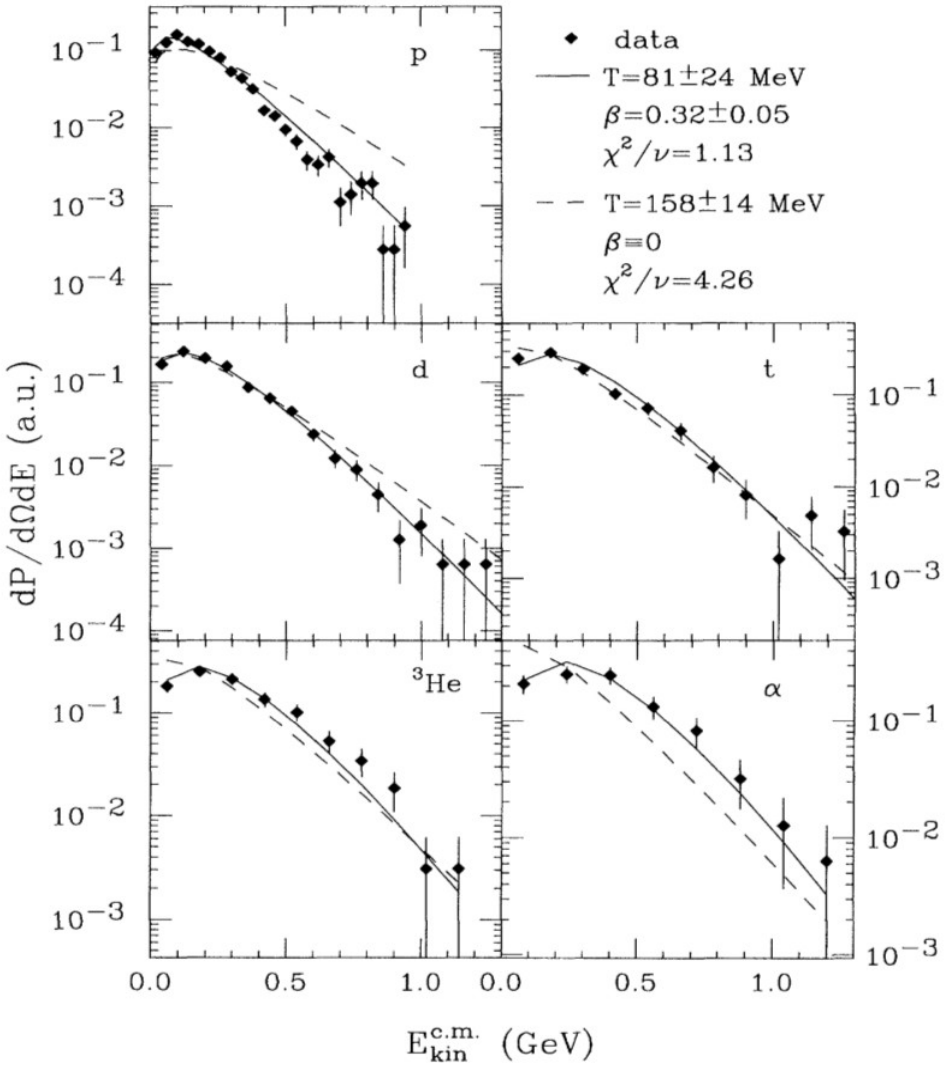
- Załóżmy: $m = m_{proton}$, $T = 70$ MeV
  Rozkłady Siemensa-Rasmussena dla różnych β_F :



- Załóżmy: $\beta_F = 0.3$, $T = 70$ MeV
  Rozkłady Siemensa-Rasmussena dla różnych mas :

- **Przykład.** Zderzenia centralne Au+Au @ 1.0*A* GeV

M. Lisa et al., Phys. Rev. Lett. 75, 2662 (1995)



- Rozkłady dN/dE_k^{CM} przy $\vartheta^{CM} \approx 90°$ (midrapidity)

  dla p, d, t, ^{3}He, ^{4}He

- Dopasowania:

  — — **Boltzmann**

  —— **Siemens-Rasmussen**

  Podane χ^2/υ dotyczy:

  jednoczesnego fitu dla d, t, ^{3}He, ^{4}He (p wyłączone)

- χ^2/υ wyraźnie lepsze dla modelu SR, niż Boltzmanna.

- Wg. Siemensa-Rasmussena temperatura jest <u>znacznie niższa</u> niż wg. Boltzmanna

$$E_{\text{Kin}} = E_{\text{Ruch kolektywny}} + E_{\text{Ruch termiczny}}$$

Siemens-Rasmussen: systematyka modelu i modyfikacje

- Przewidywany w modelu SR rozkład nie opisywał niektórych rozkładów doświadczalnych.

  Rozszerza się model SR,
  zastępując stałą β_F rozkładem prędkości: $dN/d\beta_F$.

- **Przykład:** Zderzenia centralne Au+Au @ 0.25*A* GeV.

  Scenariusze rozkładu $dN/d\beta_F$:

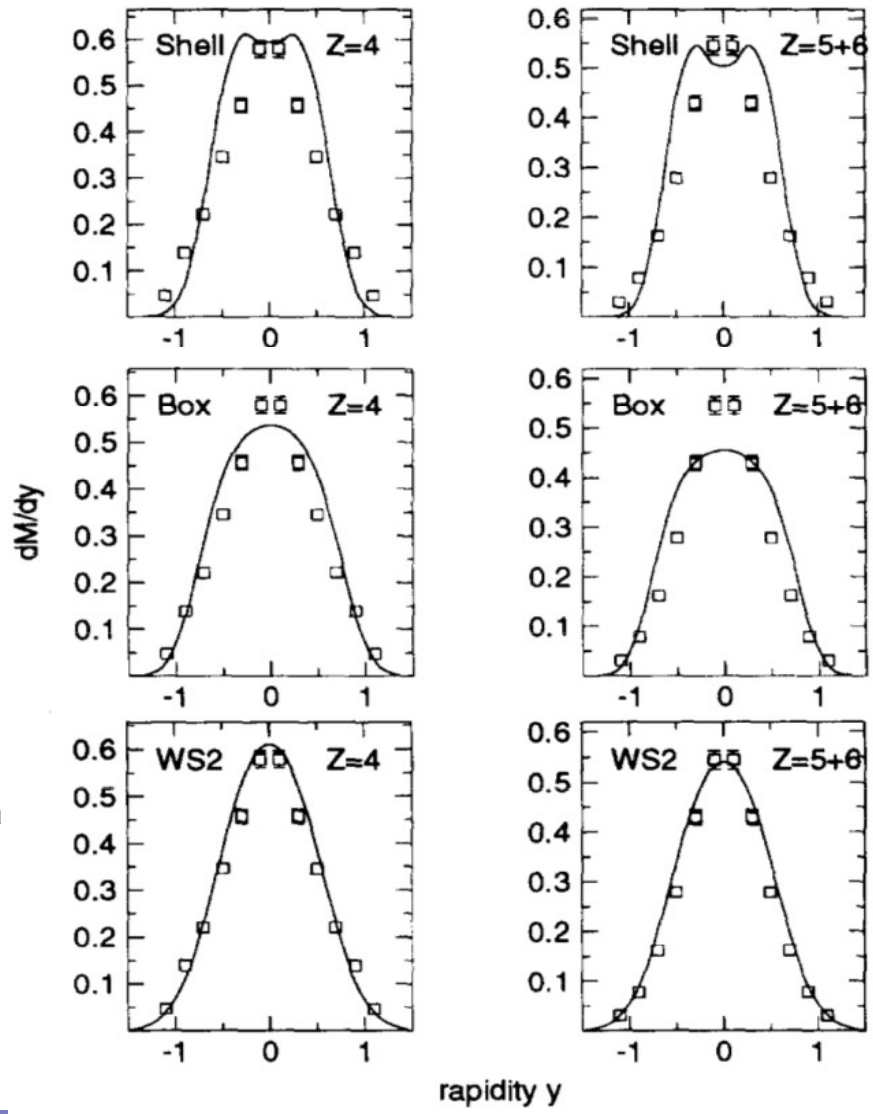
  „**Shell**" : rozkład $\beta_F = \delta_{Diraca}$ (oryginalny S-R)

  „**Box**" : rozkład β_F : płaski dla $[0 .. \beta_{Max}]$

  „**WS**" : rozkład β_F typu Woods–Saxon

Dla tych danych, scenariusz WS rozkładu prędkości dobrze opisuje rozkłady pospieszności.

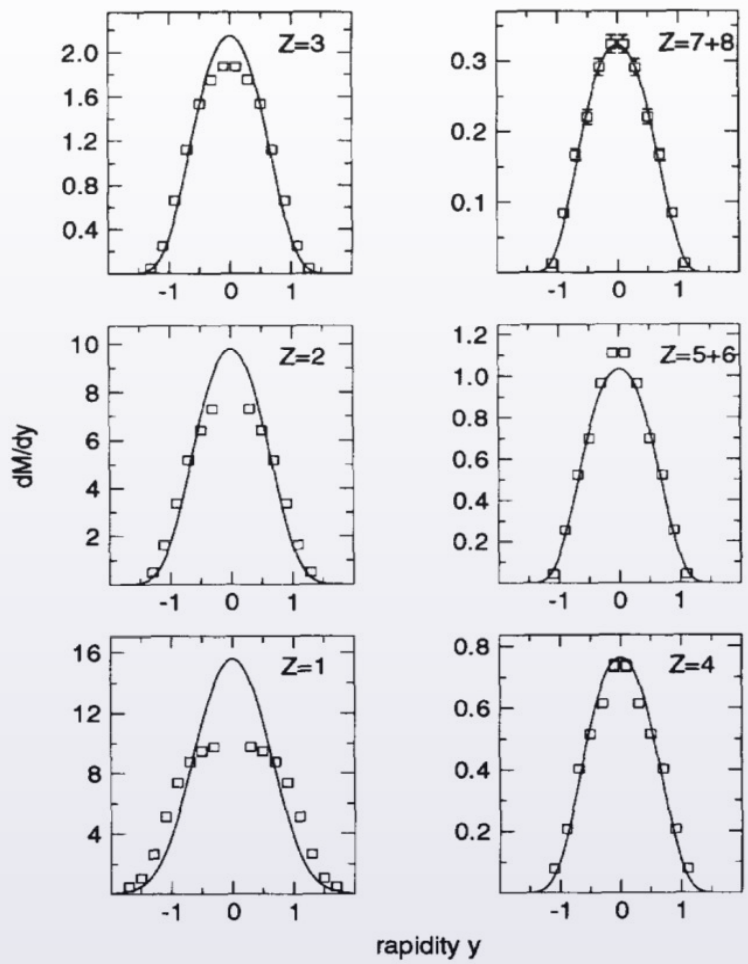
Au+Au @ 0.25*A* GeV (centralne)



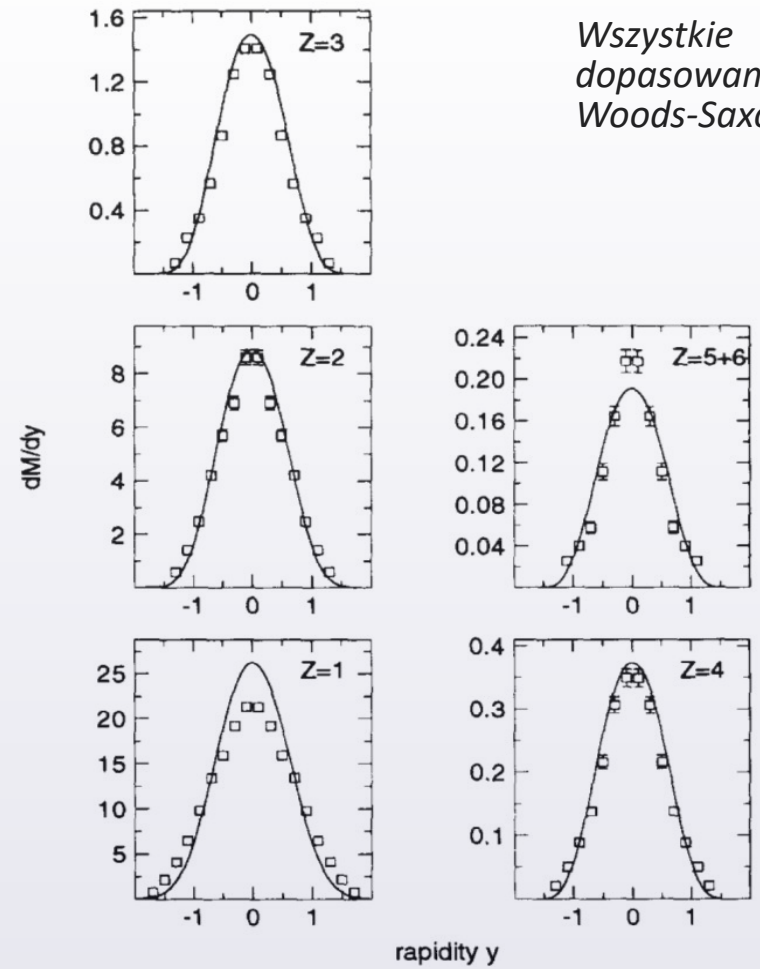
W. Reisdorf et al., Nucl. Phys. A 612, 493 (1997)

Przykład modyfikacji modelu „Siemens-Rasmussen”

- Au+Au @ 0.15*A* GeV (centralne)



- Au+Au @ 0.40*A* GeV (centralne)



Wszystkie dopasowania: Woods-Saxon

W. Reisdorf et al., Nucl. Phys. A 612, 493 (1997)

Nieźle, ale nieidealnie. Odstępstwa szczególnie dla protonów.

”Stopping” przy energiach ~ 1A GeV

- W dotychczasowym modelu (termiczny + SR) rozkład kątowy był izotropowy.
- **Q**: czy w zderzeniach rzeczywiście do tego dochodzi?

Pospieszność funkcjonuje też w kierunkach ⊥ (*x* lub *y*):

$$y_{x,y} = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_{x,y}}{E-p_{x,y}}$$

dN/dy_{0z}

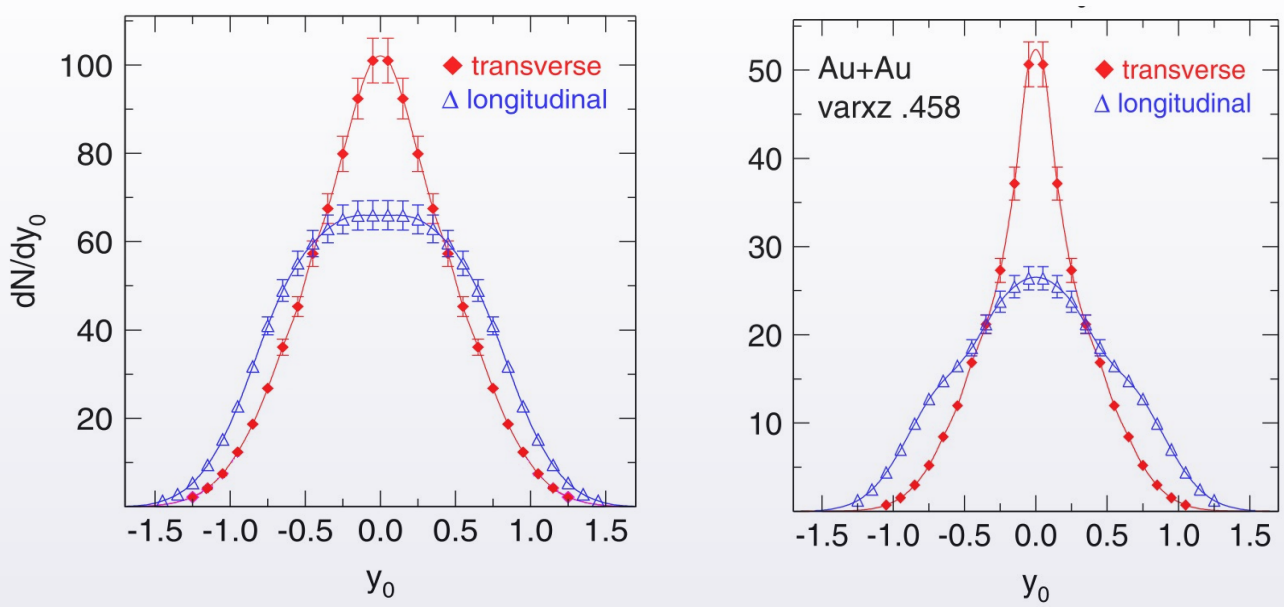
dN/dy_{0x}

przy czym:

$$y_0 = \frac{y-y_{CM}}{y_{CM}}$$

pospieszność zredukowana

Protony i deuterony z centralnych zderzeń Au+Au @ 1.5*A* GeV



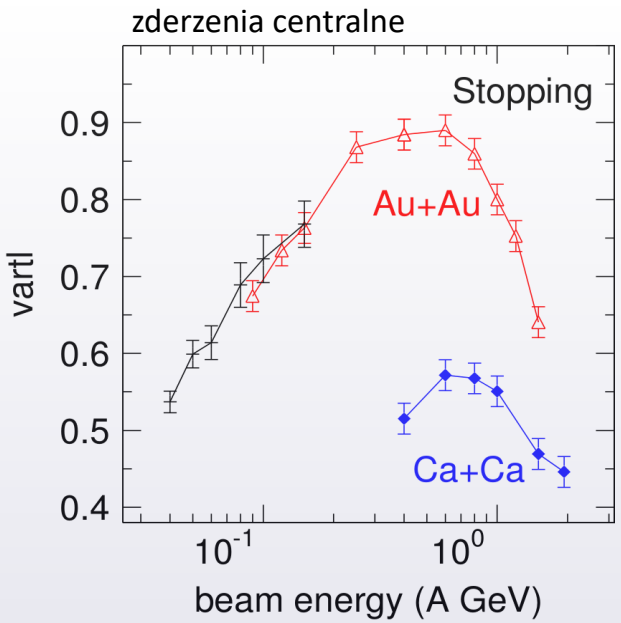
W. Reisdorf et al, Nucl. Phys. A 848, 366 (2010)

Rozkłady emisji p, d z centralnych zderzeń Au+Au @ 1.5*A* GeV cechuje wyraźne **wydłużenie w kierunku osi wiązki** (pamięć układu o kierunku pierwotnym nie zaciera się całkowicie).

”Stopping” przy energiach ~ 1A GeV

- Wydłużenie rozkładu można skwantyfikować:
  - wyznaczyć wariancję d*N*/d*y* w kierunku wiązki (σ_z) oraz w jednym z poprzecznych (np. σ_x)
  - wyznaczyć ich stosunek: $vartl \equiv \frac{\sigma_x}{\sigma_z}$
- Wykres zależności ***vartl* = f (*T*$_b$; rozmiar)** .
  Każdy punkt to:

  vartl : dla sumarycznego rozkładu d*N*/dy
  ***wszystkich* naładowanych barionów**.
  (Zderzenia centralne)



W.Reisdorf et al, Phys. Rev. Lett. 92, 232301 (2004)

Wydłużenie rozkładów emisji wzdłuż osi wiązki jest <u>regułą</u> ⇨ **pływ podłużny** (**longitudinal flow**)

Im mniejszy układ, tym wydłużenie mocniejsze.

Możliwe przyczyny:

- pływ wzdłuż osi *Z* jako **reakcja na kompresję podczas zderzenia**
- **transparencja** (częściowe **przenikanie się f. falowych** – efekt kwantowy)
- efekt ***core – corona*** ?

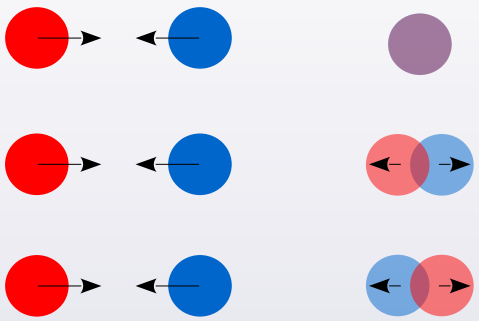
Q: z którym zjawiskiem mamy do czynienia?
– wzrost wydłużenia ze zmniejszaniem się układu sugerowałby transparencję i/lub efekt core-corona ...

Stopping: technika isospin tracing

- Dobierzmy dwa jądra o takich samych rozmiarach, ale z różną liczbą protonów, np. :

  Jądro wiązki: $^{96}_{44}Ru_{52}$ $N/Z \approx 1.2$ Jądro tarczy: $^{96}_{40}Zr_{56}$ $N/Z = 1.4$

  - Pełna termalizacja → wymieszanie *n*, *p*. (zatarcie pamięci).
    Rozkład d*N*/dy_z protonów: symetryczny względem y_{CM}.
  - Kompresja, a następnie odbicie.
    Rozkład d*N*/dy_z protonów: przewaga *p* tam, gdzie wpierw była *wiązka*
  - Transparencja lub core-corona
    Rozkład d*N*/dy_z protonów: przewaga *p* tam, gdzie wpierw była *tarcza*

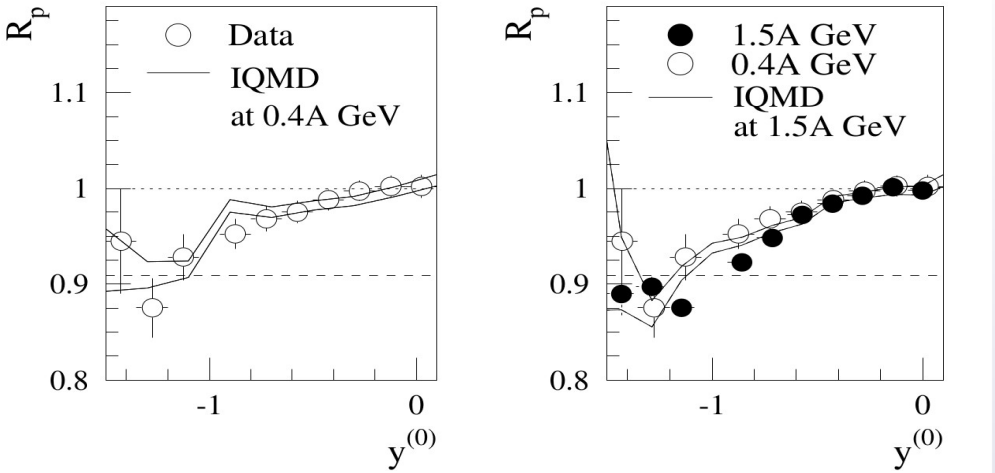


Sprawdźmy w d*N*/d*y*, gdzie jest więcej protonów. Dla pogłębienia efektu – podzielmy przez d*N*/d*y* układu odwrotnego.

- $$R_p(y) = \frac{N_{RuZr}(y)}{N_{ZrRu}(y)}$$

- Detektor mierzył $y < 0$. Obserwujemy $R_p < 1$.
  (niedomiar *protonów* po stronie jądra *wiązki*)

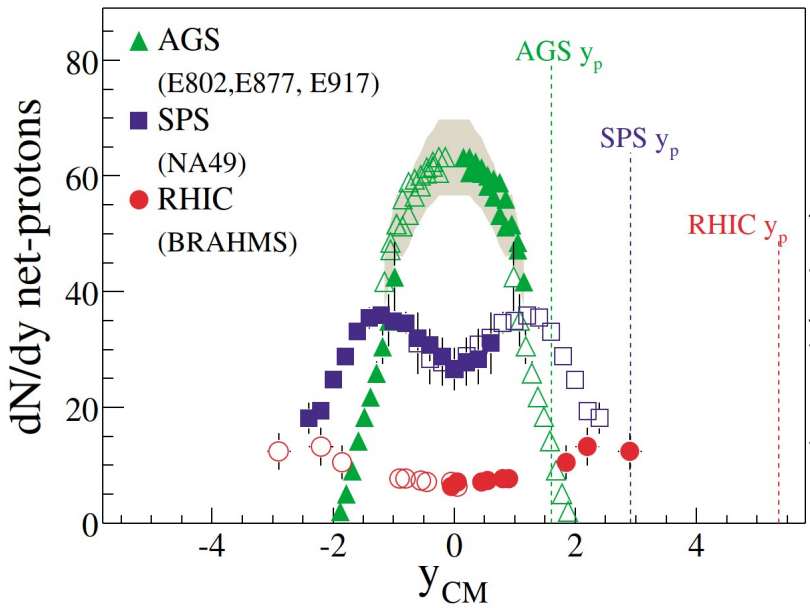
$\exists$ transparencja / core-corona
$\nexists$ pełna termalizacja.



B.Hong, Nucl.Phys. A721, 317c (2003)

- Przy energiach **ultrawysokich rozkłady dN/dy są wydłużone** (**pływ podłużny**)

Przykład: rozkłady p – $\bar{p}$ ze zderzeń Au+Au przy energii dostępnej na nukleon $\sqrt{s_{NN}}$ [GeV] = 5 (AGS), 17 (SPS) i 200 (RHIC).



I.G. Bearden et al. (Brahms) PRL 93, 102301

Idea (E. Schnedermann et al., Phys. Rev. C 48, 2462 (1993)):

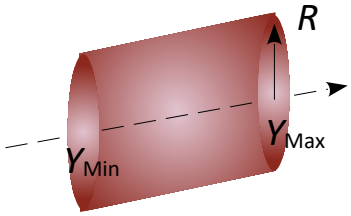
Wynik jest skutkiem **superpozycji fireball'i** wzdłuż $Y_{FB} \in [Y_{min}, Y_{max}]$, każdy daje wkład termiczny typu Boltzmann.

$$\frac{dn}{dy_{NN}}(y_{NN}) = \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} dY_{FB} \left[\frac{dn_{thermal}}{dy}(y_{NN} - Y_{FB}) \right]$$

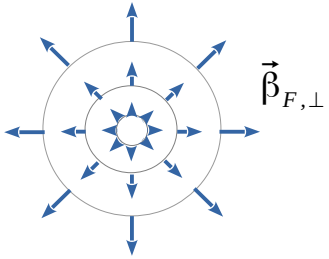
Zakres $\Delta Y_{FB} = Y_{max} - Y_{min}$ jest parametrem dopasowania do danych.

Ale przy tak wysokich ciśnieniach i ekspansji podłużnej nie może brakować **ekspansji poprzecznej**.
W płaszczyźnie ⊥ ruch termiczny cząstek nałożony jest na okręgi eksplodujące z prędkościami (symbol "F" = flow) :

Całość fireball'a:



$$\vec{\beta}_{F,\perp}(\rho) = \beta_{F,Surf} \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \hat{e}_\rho$$

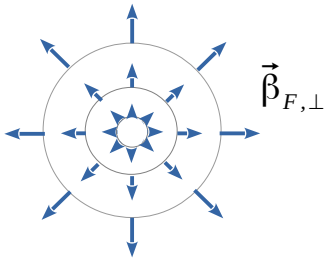


gdzie na brzegu sfery zderzenia (R) prędkość ⊥ wynosi $\beta_{F,Surf}$.
W oryginalnej pracy autorzy przyjmują n = 2, twierdząc, że dokładność w potędze ma małe znaczenie.

Zderzenia ultrarelatywistyczne: model Blast Wave

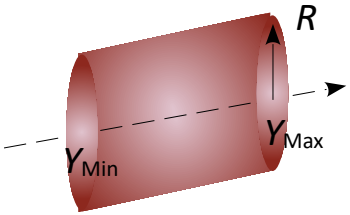
W płaszczyźnie ⊥ ruch termiczny cząstek nałożony jest na okręgi eksplodujące z prędkościami (symbol "F" = flow) :

$$\vec{\beta}_{F,\perp}(\rho) = \beta_{F,Surf} \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \hat{e}_\rho$$



Można to przepisać w języku pospieszności: $y_{F,\perp} = atanh\, \beta_{F,\perp}$

Natomiast w płaszczyźnie ‖ ekspansja kolektywna opisana jest przez $y_{F,\parallel} \in [Y_{min}, Y_{max}]$



Model doprowadza do poniższego **rozkładu masy poprzecznej** (tzw. **rozkładu Blast-Wave**) :

$$\frac{dN}{m_T\, dm_T} = const \cdot g\, e^{\frac{\mu}{T}} \cdot m_T \cdot \int_0^R \rho\, d\rho\; K_1\left[\frac{m_T\, ch\, y_{F,\perp}}{T}\right] I_0\left[\frac{cp_\perp\; sh\, y_{F,\perp}}{T}\right]$$

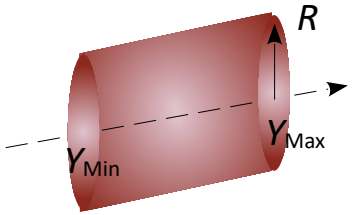
gdzie: $I_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{z\cos\Phi}\, d\Phi$, $K_1(z) = \int_0^\infty ch\, y \cdot e^{z\, ch\, y}\, dy$: funkcje specjalne

zaś: $y_{F,\perp} = atanh\, \beta_{F,\perp}$ a $\beta_{F,\perp}$ zależy od ρ : $\beta_{F,\perp}(\rho) = \beta_{F,Surf} \cdot \left(\frac{\rho}{R}\right)^2$

- Następne strony – wyprowadzenie.

- **Wyprowadzenie wzoru**.

  Zakładamy, że każdy punkt walca *lokalnie* jest źródłem rozkładu Boltzmanna.
  Trzeba pocałkować rozkład prawdopodobieństwa po 'walcu' (ρ, ϕ, Y_F) , co rozdzielimy na część $\parallel$ i $\perp$.
  Zał.: moment freeze-out'u jest wspólny dla wszystkich ρ , ale zależy od Y_F .

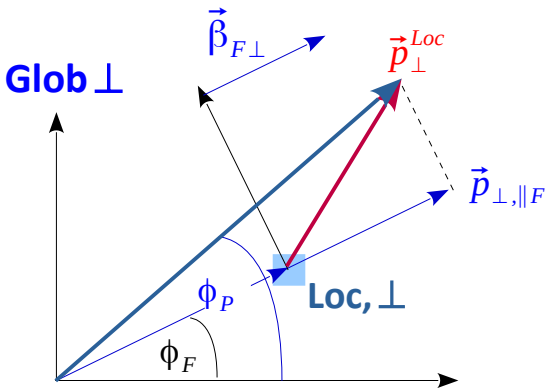


- Zaczynamy od rozkładu Boltzmanna (w ukł. lokalnym) w zapisie niezmienniczym. Wkład od **elementu** Freeze-out'u $\mathbf{d^3x_{Loc}}$:

$$d\left[\; E_{Loc}\,\frac{d^3N}{dp^3_{Loc}}\;\right] \;=\; \frac{g}{(2\pi)^3}\;\frac{E_{Loc}}{\exp\left(\dfrac{E_{Loc}\;-\;\mu}{T}\right)}\;d^3x_{Loc}$$

- Aby przetłumaczyć $E_{Loc} \Rightarrow E_{CM\,NN}$, trzeba dokonać 2 boosty: ① o pływ $\perp$ i ② o pływ $\parallel$.

① Wprowadzamy układ **Glob $\perp$** . Uwzględnia on boost o pływ $\perp$,
ale w por. do NN jego środek tkwi w ustalonym $y_\parallel$, tak samo jak układ **Loc**.



Korzystamy z niezmienniczości LHS oraz z $y_{Loc} = y_{G\perp}$:

$$\text{LHS} \;=\; d\left[E_{G\perp}\,\frac{d^3N}{dp^3_{G\perp}}\right] \;=\; d\left[E_{G\perp}\,\frac{d^3N}{p_T E_{G\perp}\;\cdot\;dp_T\,dy_{G\perp}\,d\phi_P}\right] \;=\; d\left[\frac{d^3N}{m_T\;dm_T\;\;dy_{Loc}\,d\phi_P}\right]$$

- W RHS dokonamy transformacji $E_{Loc} \Rightarrow$ Glob $\perp$. Wykorzystujemy: $\gamma = ch\,y \qquad \beta\gamma = sh\,y$

$$E_{Loc} \;=\; \gamma_F\left(E_{G,\perp}\;-\;\beta_{F,\perp}\cdot c\,p_{\perp,\,\parallel F}\right) \;=\; ch\,y_{F,\perp}\left[E_{G,\perp}\right] - sh\,y_{F,\perp}\left[cp_\perp\,\cos\left(\phi_p - \phi_F\right)\right]$$

- Z kolei w liczniku RHS mamy $E_{Loc}\cdot d^3x_{Loc}$. Jak przy wyprowadzeniu SR, wymóg $dt_{Loc} = 0$ narzuca $E_{Loc}\cdot d^3x_{Loc} = E_{NN}\cdot d^3x_{NN}$

- Łącznie, mamy teraz:

$$d\left[\frac{d^3N}{m_T\ dm_T\ dy_{Loc}\, d\phi_P}\right] = \frac{g}{(2\pi)^3}\ \frac{E_{NN}}{\exp\left(\frac{ch\, y_{F,\perp}\ \left[m_T\ ch\, y_{Loc}\right] - sh\, y_{F,\perp}\left[cp_\perp\ \cos\left(\phi_p - \phi_F\right)\right]}{T}\right)\ \exp\left(-\frac{\mu}{T}\right)}\ d^3x_{NN}$$

- Rozkład w komórce dp^3 będzie budowany przez cząstki (będzie całką) :
  - ze wszystkich promieni ($\perp$) ρ (⇨ całka po $\rho\, d\rho$)
  - ze wszystkich kątów ϕ_F , które po złożeniu ruchów dają kąt ϕ_P (⇨ całka po $d\phi_F$)

- Rozkład ma symetrię azymutalną (⇨ całka po $d\phi_P$)
  Uproszczenia: założymy, że dla każdej pospieszności $y_{F,\parallel}$ rozkład jest identyczny (⇨ całka po $dy_{F,\parallel}$)
  scałkujemy też rozkład po y_{Loc}, aby obserwować tylko zależność od m_T (⇨ całka po dy_{Loc}).

$$\frac{d^3N}{m_T\, dm_T\, dy_{Loc}\, d\phi_p} = \int_0^R \rho\, d\rho \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} dy_{F,\parallel} \int_0^{2\pi} d\phi_F\ \frac{g}{(2\pi)^3}\ \frac{E_{NN}}{\exp\left(\frac{ch\, y_{F,\perp}\ \left[m_T\ ch\, y_{Loc}\right] - sh\, y_{F,\perp}\left[cp_\perp\ \cos\left(\phi_p - \phi_F\right)\right]}{T}\right)}\ \cdot\ \exp\left(-\frac{\mu}{T}\right)$$

- Wygląda to na złożone, ale bez paniki. Przy ustalonym ϕ_p , zamieńmy zmienne: $\Phi = \phi_p - \phi_F$.

  Dolne wyrażenie ~ cos Φ jest znane jako funkcja Bessel'a I_0: $I_0\,(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{z\cos\Phi}\, d\Phi$

  Z symetrii w ϕ_p , rozkład można też scałkować po ϕ_p .

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2N}{m_T\, dm_T\, dy_{Loc}} = \frac{g}{2\pi}\ e^{\frac{\mu}{T}} \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} dy_{F,\parallel} \int_0^R \rho\, d\rho\ \ m_T\ ch\ y_{NN}\ \exp\left[-\frac{ch\, y_{F,\perp}\left(m_T\ ch\ y_{Loc}\right)}{T}\right]\ \cdot\ I_0\left[\frac{cp_\perp\ sh\, y_{F,\perp}}{T}\right]$$

- Mamy zatem:

$$\frac{d^2N}{m_T\,dm_T\,dy_{Loc}} = \frac{g}{2\pi}\, e^{\frac{\mu}{T}} \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} dy_{F,\|} \int_0^R \rho\, d\rho\;\; m_T\; ch\; y_{NN}\;\; \exp\left[-\frac{ch\, y_{F,\perp}\left(m_T\; ch\; y_{Loc}\right)}{T}\right] \cdot\; I_0\left[\frac{cp_\perp\; sh\, y_{F,\perp}}{T}\right]$$

- Dla ustalonego $y_{F,\|}$ scałkujmy po dy_{Loc} .

Zamieńmy $y_{NN} = y_{Loc} + y_{F,\|}$ i skorzystajmy z: $ch\left(y_{Loc} + y_{F,\|}\right) = ch\, y_{Loc}\; ch\, y_{F,\|} + sh\, y_{Loc}\; sh\, y_{F,\|}$

Wyrażenie $sh\, y_{Loc}$ jest antysymetryczne i przy całkowaniu się skasuje.

Drugie wyrażenie jest typu $\sim$ ch y_{Loc} exp (–a ch y_{Loc}) . Tu skorzystamy z funkcji Bessel'a K_1 : $K_1(z) = \int_0^\infty ch\, y \cdot e^{-z\, ch\, y}\, dy$

➡ Otrzymujemy:

$$\frac{dN}{m_T\,dm_T} = \frac{g}{\pi}\, e^{\frac{\mu}{T}} \int_0^R \rho\, d\rho \int_{Y_{min}}^{Y_{max}} dy_{F,\|}\;\; m_T\; ch\; y_{F,\|}\;\; K_1\left[\frac{m_T\, ch\, y_{F,\perp}}{T}\right]\; I_0\left[\frac{cp_\perp\; sh\, y_{F,\perp}}{T}\right]$$

Całki po ρ i $y_{F,\|}$ dają pewną stałą. Ostatecznie:

➡ $$\frac{dN}{m_T\,dm_T} = const \cdot g\, e^{\frac{\mu}{T}} \cdot \int_0^R \rho\, d\rho\;\; m_T\;\; K_1\left[\frac{m_T\, ch\, y_{F,\perp}}{T}\right]\; I_0\left[\frac{cp_\perp\; sh\, y_{F,\perp}}{T}\right]$$

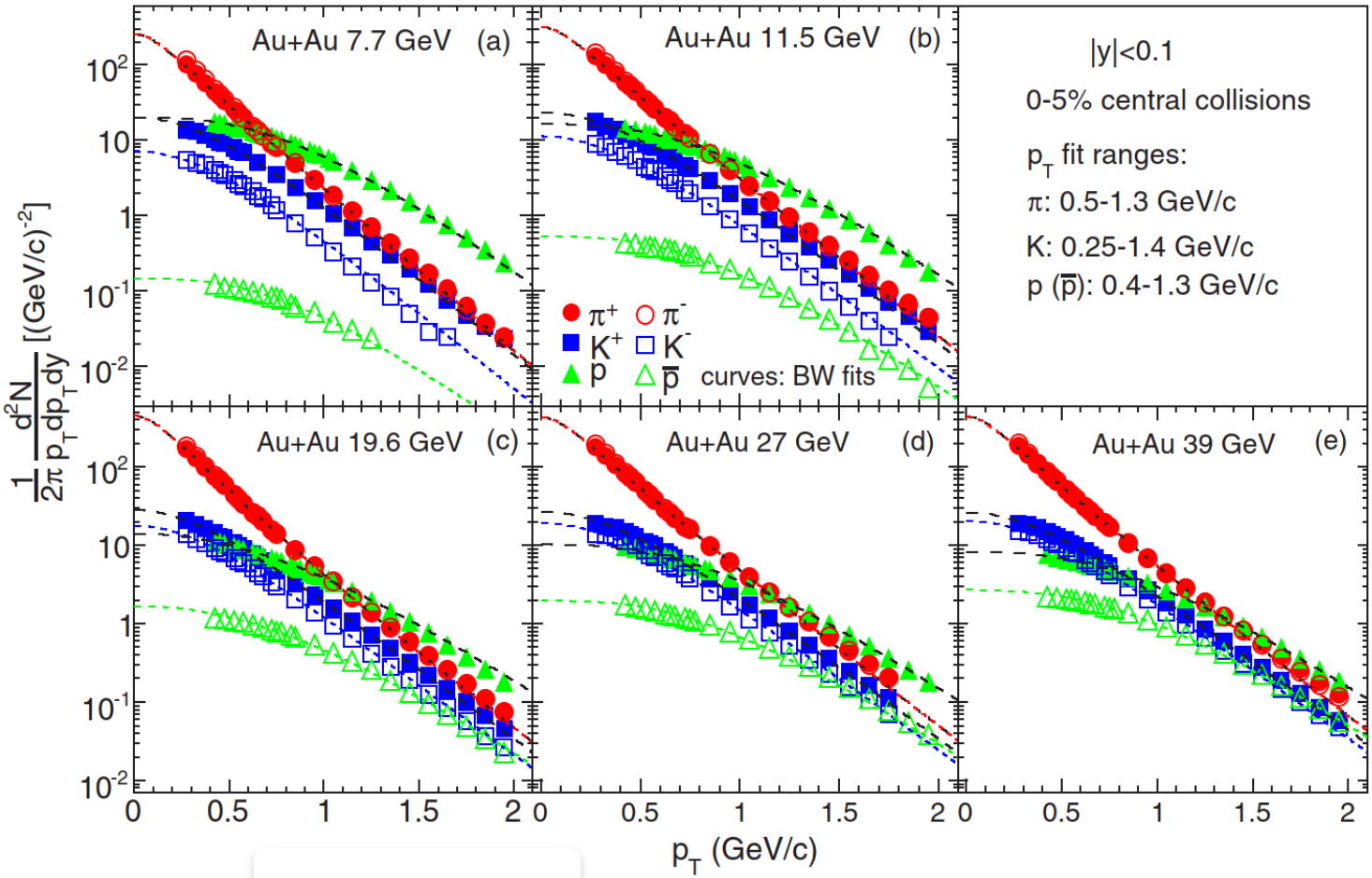
„Rozkład blast-wave"

Uwaga: jest to wyrażenie uproszczone do pewnej klasy powierzchni freeze-out'u.
Dla zainteresowanych: do recepty ogólnej potrzebna **formuła Cooper-Frye'a** [Phys. Rev. D 10, 186 (1974)]

Model Blast Wave: przykład użycia

- Model ma działać dla rozkładów wszystkich hadronów – dopasowywany jest globalnie do szeregu rozkładów.

  Przykład: rozkłady p_T dla π^+, π^-, p , $\bar{p}$, K^+, K^- emitowane z centralnych zderzeń Au+Au przy energiach $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 .. 39 GeV.



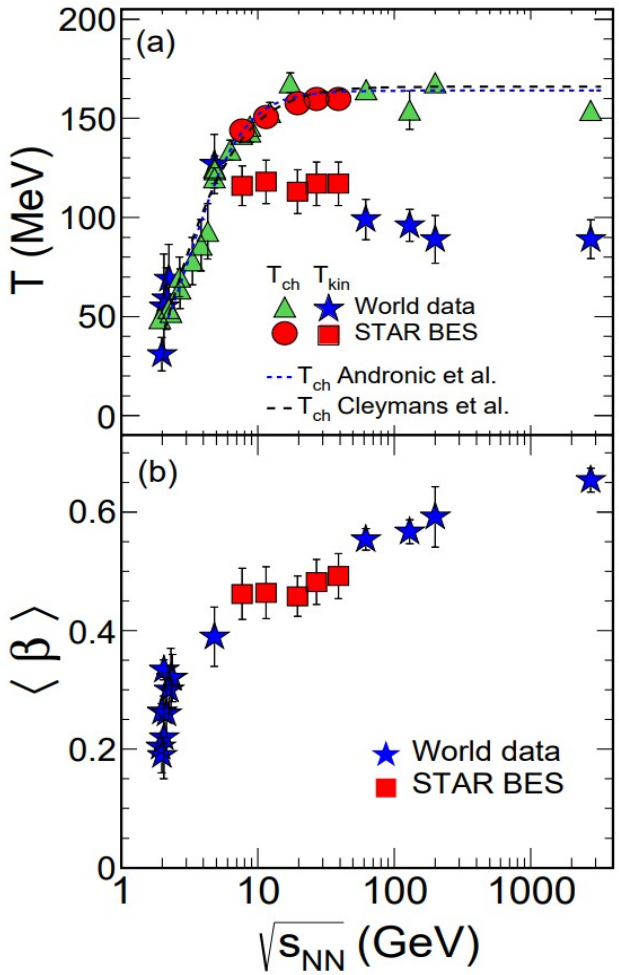
Ogólny poziom dopasowania – całkiem zadowalający.

Dane zostały jednak pobrane z |y| < 0.1 . Odzwierciedlają więc sytuację **w środku Fireballu**.

Uwaga: aby dobrze dopasować model do danych doświadczalnych, należy uwzględnić dopływy z rozpadów.

L. Adamczyk et al. (STAR), Phys. Rev. C 96 044904 (2017).

Model Blast Wave a Model Termiczny



- Wykres przedstawia parametry $\beta_\perp$ i T (■ i ★) otrzymane dzięki dopasowaniom Blast-Wave do rozkładów kinematycznych.

  Przy $\sqrt{s} \sim$ kilka GeV, oba parametry silnie rosną.

  Dla wyższych $\sqrt{s}$, prędkość pływu poprzecznego ($\beta_\perp$) nasyca się przy 50-60 % *c*.

- Bardzo ciekawy efekt jest dla temperatur (■ i ★) : nasycają się przy 120 MeV, przy wyższych $\sqrt{s}$ nawet nieco malejąc. Nazwijmy je **temperaturami kinetycznymi (T_{kin})** .

  Parametry temperatur można też otrzymać z dopasowania modelu statystycznego do krotności hadronów (to te: ▲ i ●) . Nazwijmy je **temperaturami chemicznymi (T_{chem})** .

➡ Jak widać, do $\sqrt{s} \sim 5$ GeV, obie wydobyte temperatury są ze sobą zgodne. Natomiast dla $\sqrt{s} > 5$ GeV, ***T* kinetyczna < *T* chemiczna** .

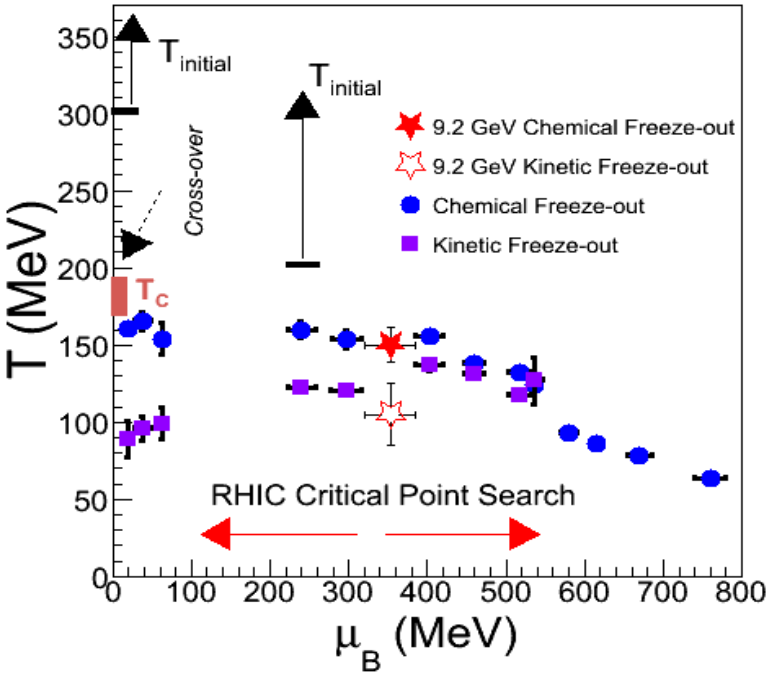
Typowa interpretacja:

Ustalenie się **składu cząstek** (**wymrożenie chemiczne**) – zachodzi **wcześniej**, gdy układ jest gorętszy,

Ustalenie się **widm** (**wymrożenie kinetyczne**) – zachodzi **później**, gdy układ już się schłodził.

L. Adamczyk et al. (STAR), Phys. Rev. C 96 044904 (2017).

Tak więc czasem pokazywane są diagramy fazowe z dwoma przebiegami punktów temperatur:

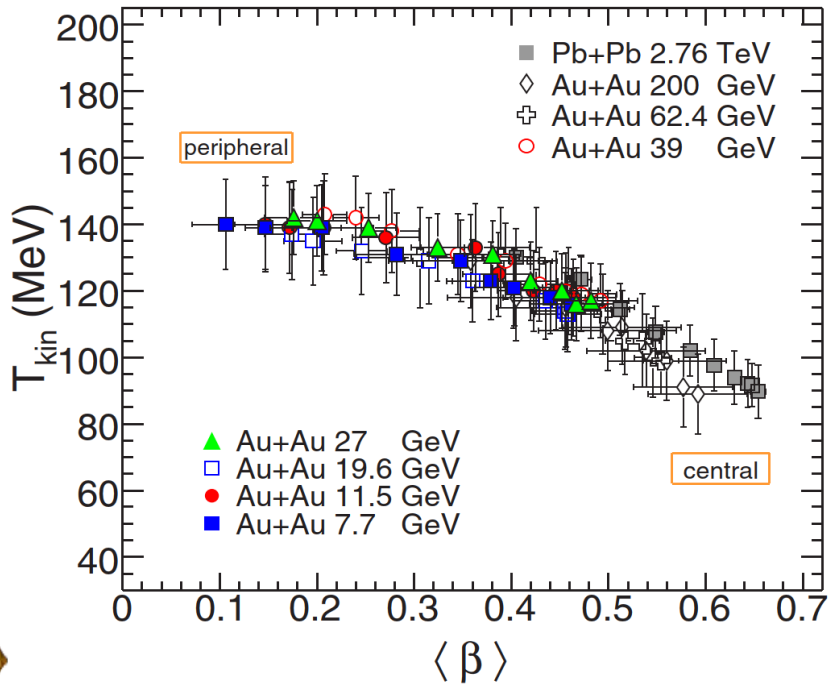


Komentarz ogólny:

W literaturze $\beta_\perp$ rozdziela się na $\parallel$ i $\perp$ do płaszcz. reakcji. Śledzi się również $\beta_\perp$ i T dla różnych obszarów y.

Model BW nie jest „ostatnim słowem”.
Np. istnieje „**statystyka Tsallisa**” , opisująca odstępstwo od równowagi termodynamicznej.

- Jednak pow. obrazek nie jest ścisły, gdyż związek [T_{kin} , $\beta_\perp$] dryfuje w funkcji centralności zderzenia:



L. Adamczyk et al. (STAR), Phys. Rev. C 96 044904 (2017).

Typowa interpretacja:

W zderzeniach peryferyjnych są mniejsze ciśnienia (słaby pływ $\beta_\perp$), za to strefa zderzenia szybciej dezintegruje.

Zderzenia centralne cechują większe ciśnienia (mocny pływ $\beta_\perp$), za to strefa zderzenia dłużej trwa.

Koalescencja (sklejanie nukleonów we fragmenty)

- **Istnienie LCP** wyjaśnialiśmy jak dotąd multifragmentacją (zderzenie → rozdrobnienie). LCP występują jednak też w zderzeniach przy bardzo wysokich energiach (por. wykres).

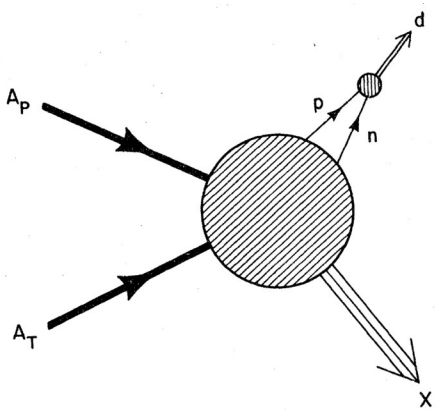
  Energia wiązania deuteronu = 2.2 MeV.
  Jak mogą przeżyć przy tak ogromnych transferach energii ?

- Alternatywna hipoteza: **Coalescence** (*ang.* łączenie)

  Fragmenty jądrowe powstają pod koniec zderzenia, gdy układ się rozrzedzi.
  Tam, gdzie emitowane nukleony mają podobne wektory pędu (szansa, że są blisko w przestrzeni), mogą się skleić w LCP.

  Pierwsza praca: `P. Butler, C. Pearson Phys. Rev. 129, 836 (1963)`

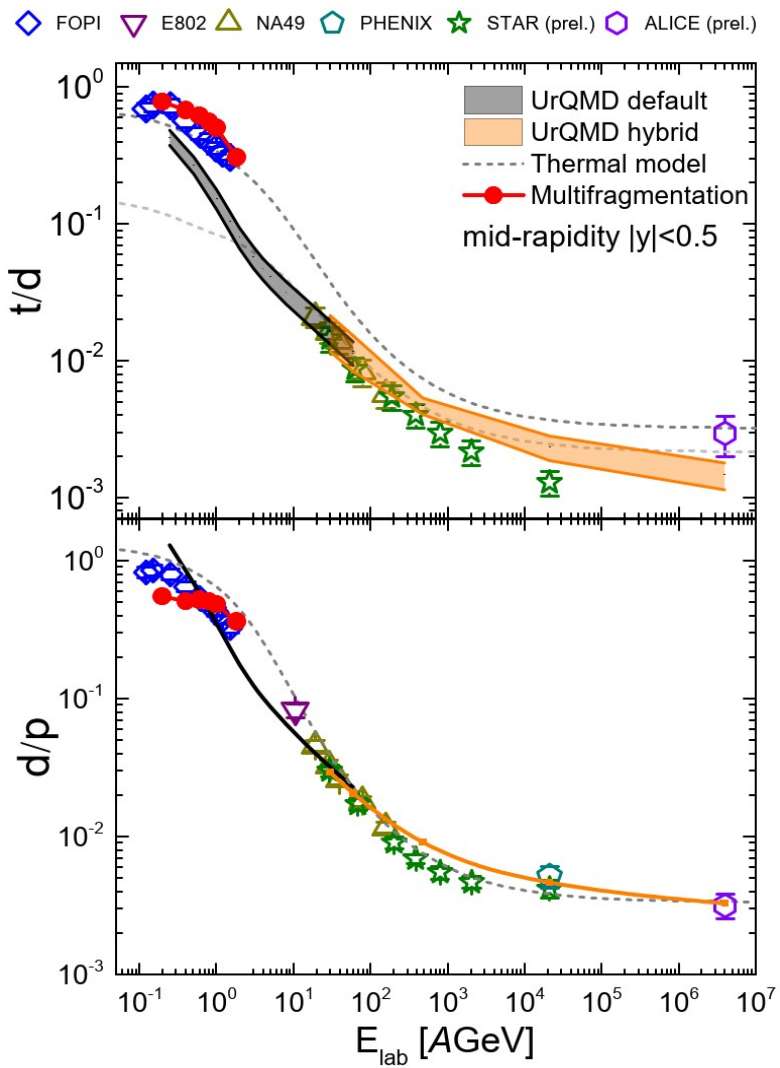
- Rozważmy wpierw sklejenie pn → d. Zakładamy:



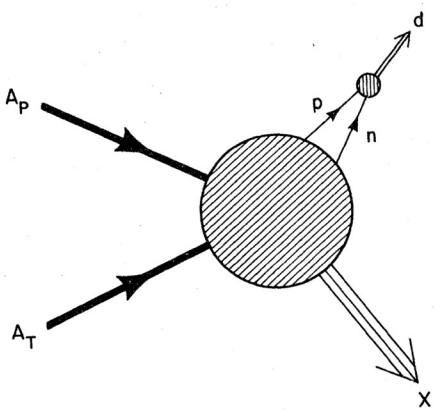
Autor: J. Kapusta (1980)

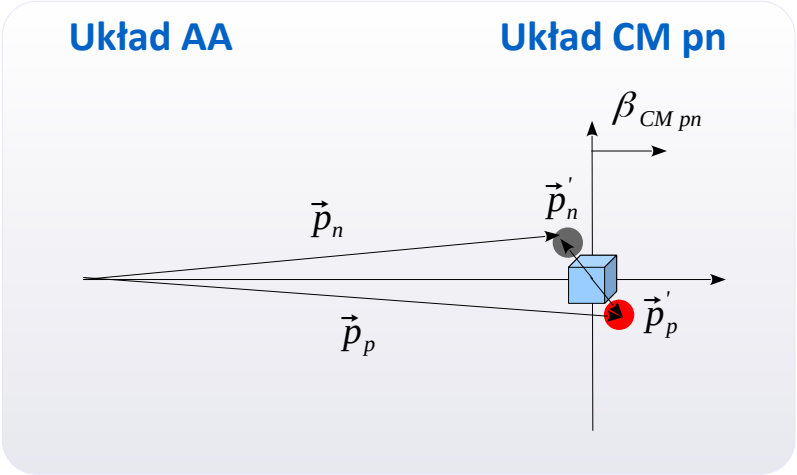
W układzie CM p+n (w okolicy pędu $\vec{0}_{CM}$) panuje gęstość nukleonów: $\frac{d^3N}{dp^3}$

Rozkład obserwujemy w ukł. AA → wykonujemy Tr. Lorentza. Gęstość obserwowana w Lab wychodzi na: $\gamma \frac{d^3N}{dp^3}$



P. Hillmann *et al* J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 49, 055107 (2022)





- Pędy w układzie AA: bez [']
  Pędy w układzie CM pn: z [']

  W układzie CM pn, w komórce d^3p' jest pewna liczba np. protonów *N*. Gęstość krotności: $\frac{d^3N}{dp'^3} = \frac{d^3N}{dp_x' dp_y' dp_z'}$

  Ale rozkład protonów opisujemy w układzie AA
  (np. w tym układzie wiemy, że jest to np. rozkład Boltzmanna, SR, BW, …)

  Transf. Lorentza [CM pn] → [AA] :

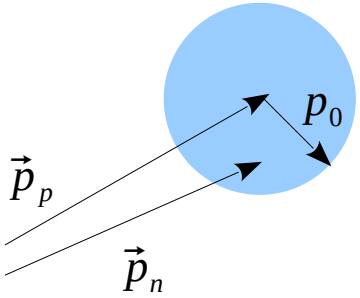
$$dp_z = \gamma_{CM\,pn} \cdot \left(dp_z' + \beta \frac{dE}{dp_z'} dp_z' \right) = \gamma_{CM\,pn} \cdot \left(dp_z' + \beta \underbrace{\frac{p_z'}{E}}_{\to 0} dp_z' \right) \approx \gamma\, dp_z'$$

$$\frac{d^3N}{dp'^3} = \gamma \frac{d^3N}{dp^3}$$

Koalescencja pn → d

Praca przeglądowa: L. Csernai, J. Kapusta, Phys. Rep. 131, 223 (1986)

- **Rozważmy wpierw sklejenie pn → d** i pomińmy na chwilę relatywistykę.
  Zbliżenie w przestrzeni położeń nie jest wykrywalne doświadczalnie.
  Mamy dostęp tylko do przestrzeni **pędów**.



Idea: weźmy np. proton o pędzie $\overline{p}_p$.
Niech do scalenia z neutronem dochodzi pod warunkiem, że pęd neutronu $\overline{p}_n$ będzie w małym kulistym otoczeniu o promieniu $\overline{p}_0$ wokół pędu $\overline{p}_p$.
W tym otoczeniu jest pewna krotność neutronów K_n .

- **Hipoteza:**

Koncentracja deuteronów w komórce pędów wokół $\overline{p}_p$ = Koncentracja protonów w komórce pędów wokół $\overline{p}_p$ × Krotność K_n neutronów o pędach w kuli o promieniu p_0 wokół $\overline{p}_p$

$$\frac{d^3 N_d}{dp^3} = \frac{d^3 N_p}{dp^3} \cdot K_n$$

- K_n znajdziemy z tej proporcji:

$$\frac{K_n}{\frac{4}{3}\pi p_0^3} = \frac{d^3 N_n}{dp^3}$$

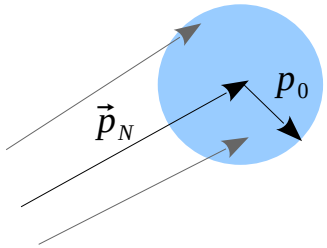
$$\frac{d^3 N_d}{dp^3} = \frac{d^3 N_p}{dp^3} \cdot \frac{d^3 N_n}{dp^3} \cdot \frac{4}{3}\pi p_0^3$$

- Przenosimy wzór relatywistycznie z układu lokalnego do AA:

$$\gamma \frac{d^3 N_d}{dp^3} = \left(\gamma \frac{d^3 N_p}{dp^3}\right) \cdot \left(\gamma \frac{d^3 N_n}{dp^3}\right) \cdot \frac{4}{3}\pi p_0^3$$

Koalescencja (sklejanie nukleonów we fragmenty)

- Rozważmy teraz **sklejenie *A* nukleonów** o bliskich $\overline{p}$ **we fragment *A***.
  Wszystkich nukleonów w strefie zderzenia jest N_{Tot}.



  Idea: weźmy 1 nukleon o pędzie $\overline{p}_N$.
  Jeśli w małym kulistym otoczeniu o promieniu $\overline{p}_0$ doklei się A - 1 nukleonów ($\equiv A'$),
  to utworzy się fragment A.

- Jednak: ta liczba podlega **rozrzutowi** przypadkowemu (rozkład **dwumianowy**).
  $\exists$ prawdopodobieństwo P_1, że 1 nukleon znajdzie się w kuli i się scali („pojedynczy sukces”).
  Średnia liczba nukleonów scalających się: $N_{\text{Tot}} \cdot P_1$

Proporcja:

$$\frac{N_{Tot} \cdot P_1}{\frac{4}{3}\pi p_0^3} = \frac{d^3 N_N}{dp_N^3}$$

(relatywistyka $\rightarrow$ RHS $\cdot\, \gamma$)

Prawdopodobieństwo, że w N_{Tot} próbach będzie $A' \equiv A - 1$ sukcesów:

$$P_{N_{Tot}}(A') = \binom{N_{Tot}}{A'} P_1^{A'} \left(1 - P_1^{N_{Tot}-A'}\right) = \frac{N_{Tot}!}{A'! \cdot (N_{Tot} - A')!} P_1^{A'} \left(1 - P_1\right)^{N_{Tot}-A'} \overset{A' \ll N_{Tot}}{\approx} \frac{\left(N_{Tot} \cdot P_1\right)^{A'}}{A'!}$$

Koalescencja (sklejanie nukleonów we fragmenty)

- **Wracamy do hipotezy głównej.**

Koncentracja fragmentów A w komórce pędów wokół $\bar{p}_p$ = Koncentracja nukleonów w komórce pędów wokół $\bar{p}_p$ × *P* doklejenia A' nukleonów o pędzie w kuli o promieniu p_0 wokół $\bar{p}_p$

$$\gamma \frac{d^3 N_A}{dp_N^3} = \left(\gamma \frac{d^3 N_N}{dp^3}\right) \cdot P_{N_{Tot}}(A')$$

$$P_{N_{Tot}}(A') \approx \frac{\left(N_{Tot} \cdot P_1\right)^{A'}}{A'!}$$

$$N_{Tot} \cdot P_1 = \gamma \frac{d^3 N_N}{dp_N^3} \cdot \frac{4}{3}\pi p_0^3$$

Pęd fragmentu
$p_A = A \cdot p_N$

$$\gamma \frac{d^3 N_A}{dp_A^3} = \left(\gamma \frac{d^3 N_N}{dp_N^3}\right)^A \cdot \frac{1}{A!} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi p_0^3\right)^{A-1}$$

$A' = A - 1$

- Korekta wzoru ze względu na: (1) rozróżnienie neutronów i protonów (2) degenerację spinową:

$$\gamma \frac{d^3 N_A}{dp_A^3} = \left(\gamma \frac{d^3 N_N}{dp_N^3}\right)^A \cdot \frac{2S_A + 1}{2^A} \frac{1}{N!} \frac{1}{Z!} \left(\frac{N_P + N_T}{Z_P + Z_T}\right)^N \left(\frac{4}{3}\pi p_0^3\right)^{A-1}$$

(nie na pamięć :))

Koalescencja (sklejanie nukleonów we fragmenty)

- Istnieją różne warianty wyprowadzeń, również kwantowe. Wszystkie można opisać ogólnym **wzorem koalescencji**:

$$E_A \frac{d^3 N_A}{dp_A^3} = B_A \cdot \left(E_N \frac{d^3 N_N}{dp_N^3} \right)^A$$

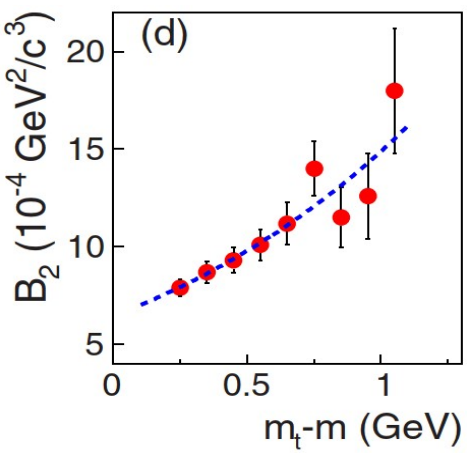
Zamiast γ jest E, ale: $\gamma = \frac{E}{m}$

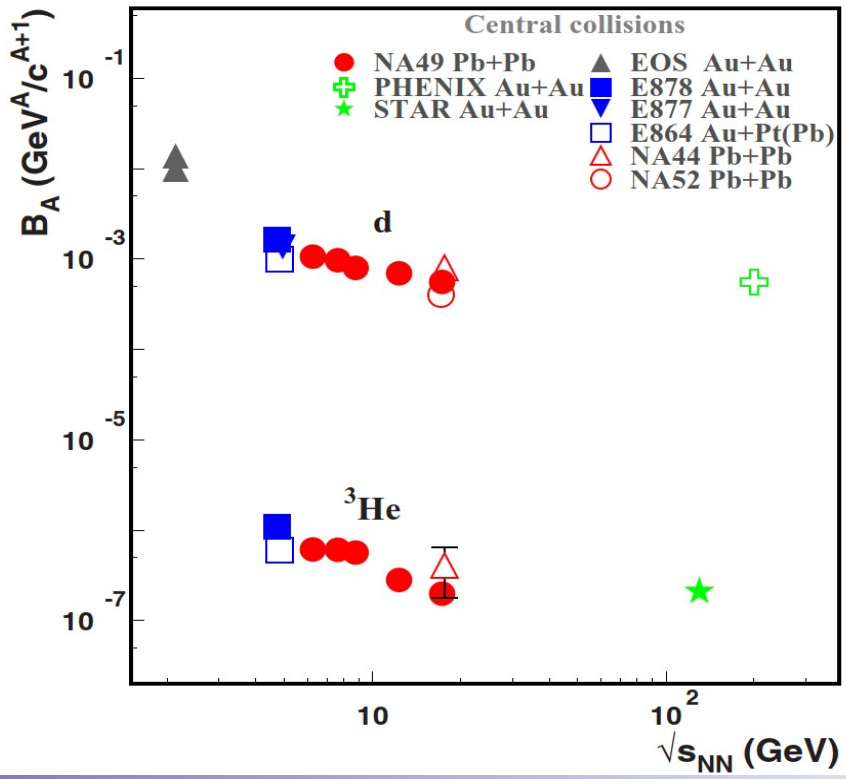
gdzie **B_A („parametr koalescencji”)** jest ogólnym współczynnikiem w modelach i w eksperymentach.

- Doświadczalnie B_A jest parametrem efektywnym: zależy od fragmentu, energii wiązki, ale i pędów.

Przykłady: średnie B_2 = f($\sqrt{s}$)

B_2 = f(m_t) dla Pb+Pb @ T_{Beam} = 80*A* GeV

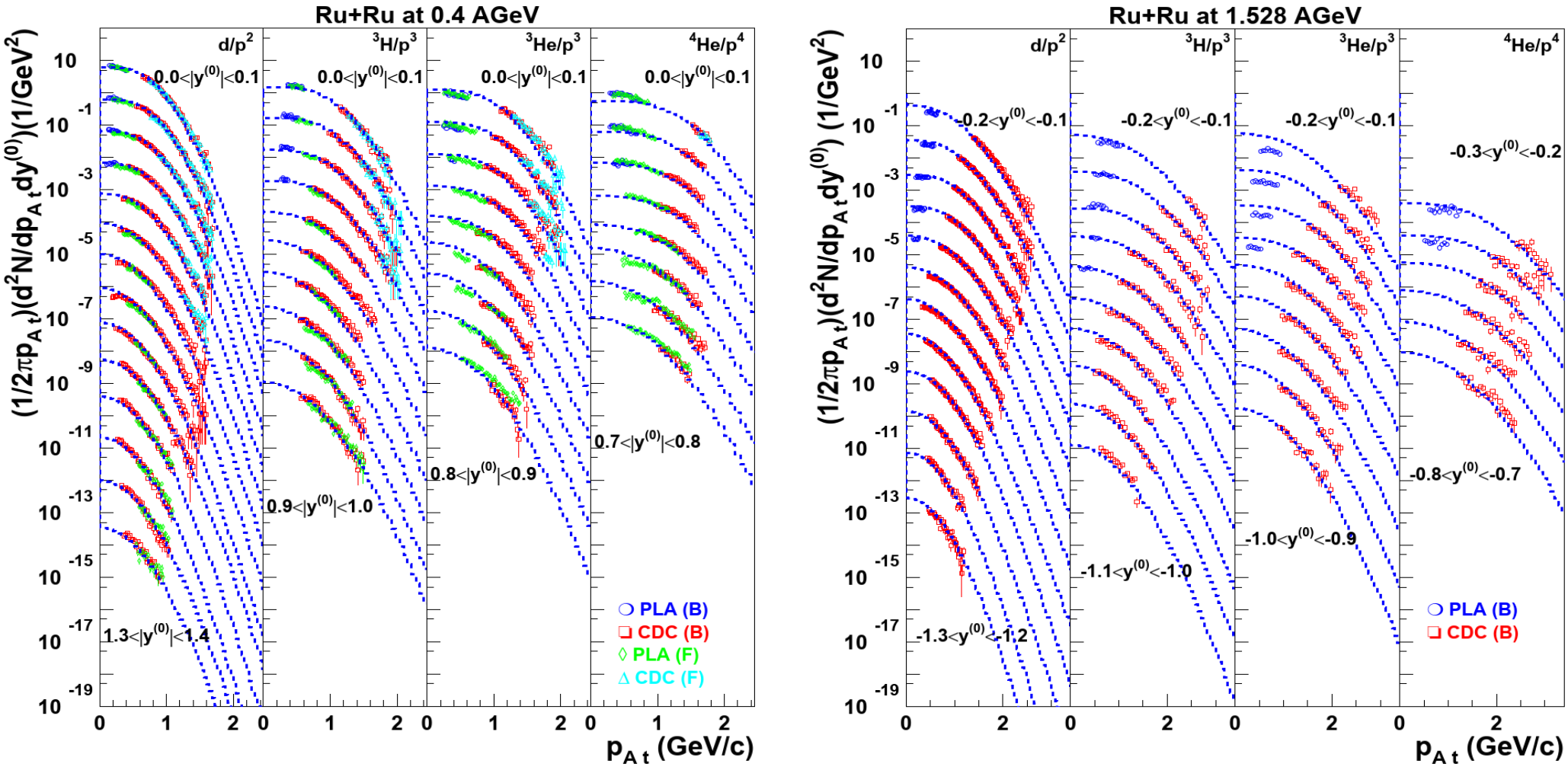




T. Anticic et al. Phys. Rev. C 94, 044906 (2016)

Koalescencja – test przy energiach 0.4 i 1.5A GeV

- Punkty danych: rozkłady **d, t, ^{3,4}He** z Ru+Ru @ 0.4 i 1.5 A GeV (FOPI).
  Niebieskie przerywane krzywe: rozkłady dla **p**, przeskalowane wg wzoru koalescencji, z B_A najlepszego dopasowania.



M. Ryu, Ph.D. Korea University, Seoul (2009). Promotor W. Reisdorf, GSI.

Anizotropie rozkładu azymutalnego

- Płaszczyzna reakcji
- Pływy (anizotropie rozkładu azymutalnego)
  - Rozmycie płaszczyzny reakcji: poprawka Ollitrault'a
  - Doświadczalne rozkłady pływu skierowanego i eliptycznego

Płaszczyzna reakcji

- Rozważmy zderzenie **nie-centralne**.

  Płaszczyzna reakcji:
  rozpięta przez wektory osi wiązki $\bar{z}$ i parametru zderzenia $\bar{b}$.
  Środki mas jąder leżą w płaszczyźnie reakcji.

  W zderzeniu płaszczyzna reakcji tworzy z układem Lab kąt φ_r.

  φ_r : **„kąt płaszczyzny reakcji”**

- Wg. „czystego” modelu statystycznego, emisja jest izotropowa.
  Stosowaliśmy nakładki: Siemens-Rasmussen (izotropowa),
  Blast-Wave (symetria cylindryczna, tj. w kącie ϕ).

  A jak jest doświadczalnie?

  Kłopot:

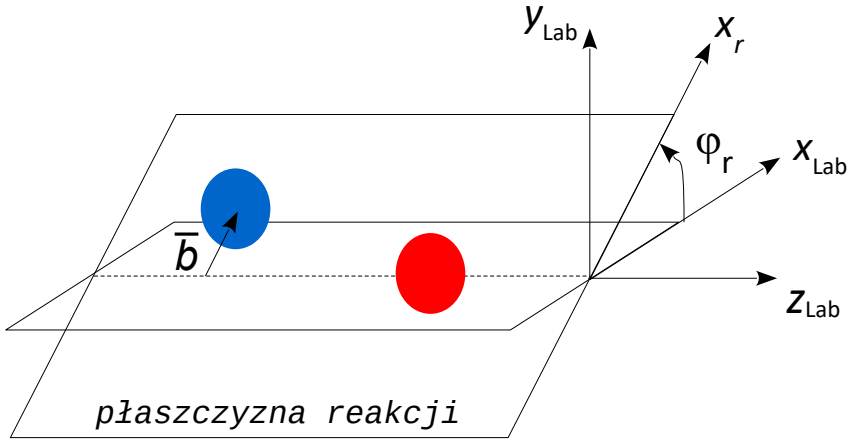
  jeśli rozkład $dN/d\phi$ wzgl. płaszczyzny reakcji ma anizotropię,
  to chaotyczność φ_r zamazuje ją i rozkład $dN/d\phi_{w\,Lab}$ = const .

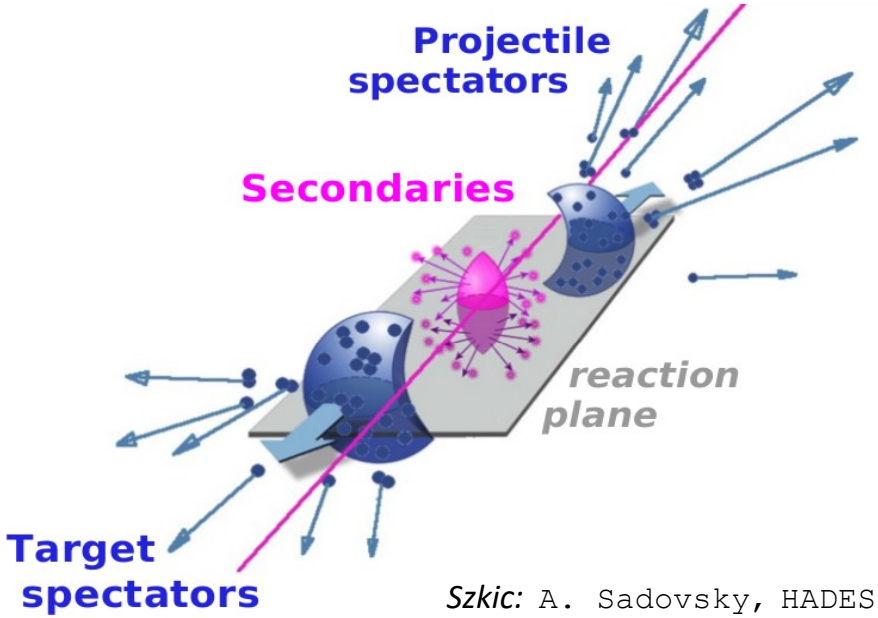
- Gdyby <u>w każdym zderzeniu</u> móc zrekonstruować kąt φ_r ...

  ... wówczas w każdym ze zderzeń można
  „przekręcić” p_T wszystkich cząstek wstecz o φ_r.

  Uzyskalibyśmy pierwotny rozkład $dN/d\phi$.

  Q: Jak zrekonstruować kąt φ_r ?





Szkic: A. Sadovsky, HADES

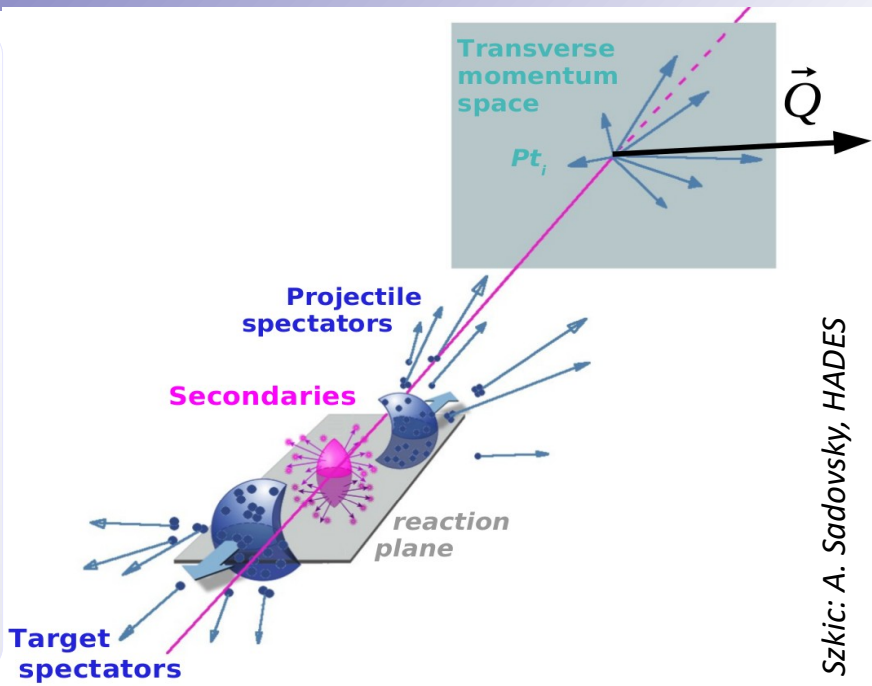
- **Metoda pędów poprzecznych**

P. Danielewicz, G. Odyniec, Phys. Lett. B 157, 146 (1985)

Cząstki emitowane na brzegach rozkładu y, preferencyjnie pochodzą z obszarów widzów. Zbudujmy wektor $\vec{Q}$ („**w. płaszcz. reakcji**")

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N_{\text{widzów}}} w_i \cdot \vec{p}_{\perp,i} \qquad w_i = \begin{cases} 1 & y_{0,i} > \Delta y \\ -1 & y_{0,i} < -\Delta y \\ 0 & |y_{0,i}| < \Delta y \end{cases}$$

Jeśli zachodzi jakaś anizotropia w kącie ϕ (symetryczna względem płaszczyzny reakcji), to $\vec{Q}$ ją „wychwyci" i ustawi się wzdłuż tej płaszczyzny (modulo fluktuacja statystyczna) $\Rightarrow$ kąt ψ_r (estymator kąta φ_r)



Szkic: A. Sadovsky, HADES

- **Rozkład na szereg Fouriera**

ϕ : kąt azymutalny cząstki względem płaszczyzny reakcji. $\phi \in [0, 2\pi)$ $\rightarrow$ rozkład $dN/d\phi$ traktujemy jako periodyczny. Dowolną funkcję periodyczną można rozłożyć na szereg Fouriera. Dodatkowo, $dN/d\phi$ ma symetrię wzgl. pł. reakcji. Czyli:

$$\frac{dN}{d\phi} \sim \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n\geq 1}^{\infty} v_n \cos n\phi\right)$$

S. Voloshin, Y. Zhang, Z. Phys. C 70, 665 (1996)

wkład izotropowy

v_n : wagi kolejnych wkładów, $v_n \in [-1, 1]$

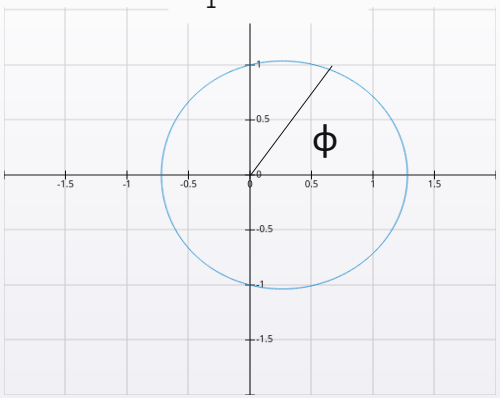
Nazwa – ***współczynniki pływu*** (***flow coefficients***)

Zachodzi: $v_n = \langle \cos n\phi \rangle$

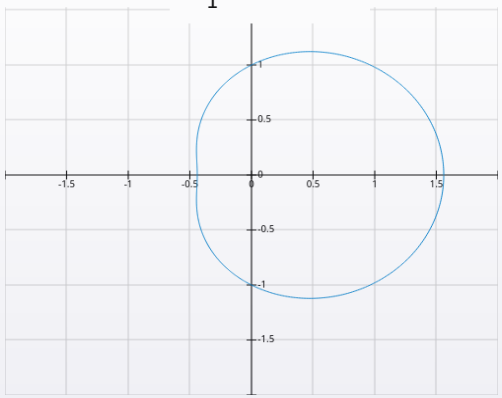
Jaki rozkład generują dwie pierwsze harmoniczne?

- Przypadek: izotropia + v_1 (**pływ skierowany** / **directed flow**)

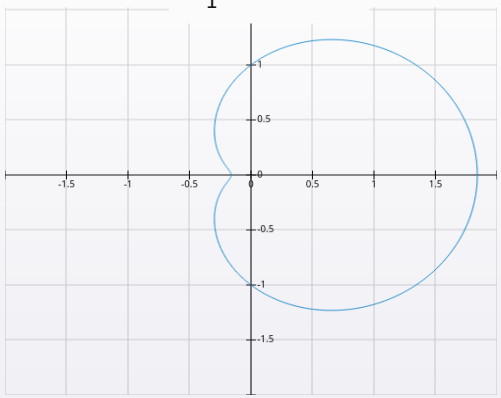
$v_1 = 0.14$



$v_1 = 0.28$

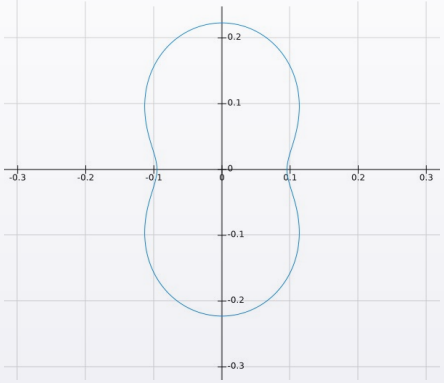


$v_1 = 0.42$

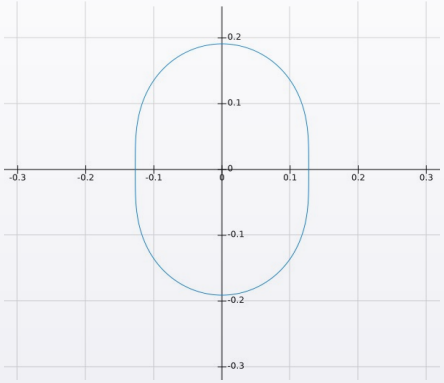


- Przypadek: izotropia + v_2 (**pływ eliptyczny** / **elliptic flow**)

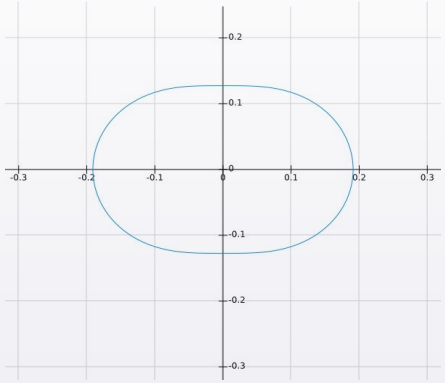
$v_2 = -0.2$



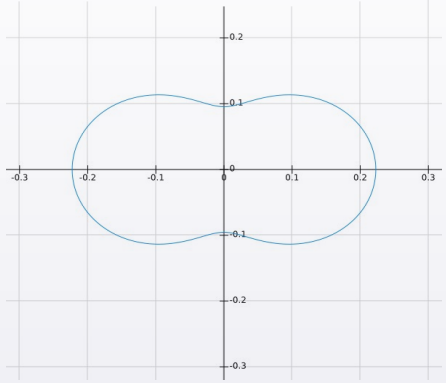
$v_2 = -0.1$



$v_2 = 0.1$



$v_2 = 0.2$



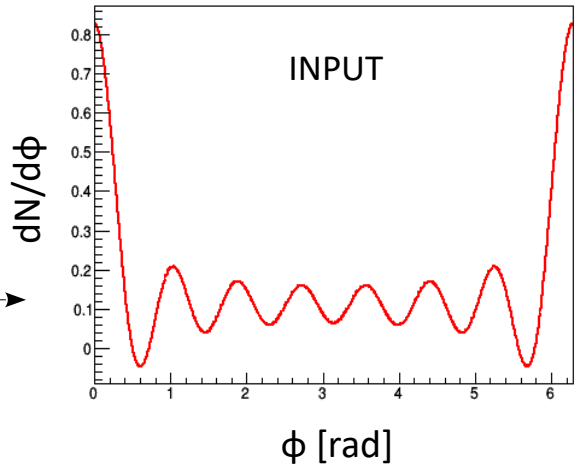
Symulacja: generacja pływu i jego rekonstrukcja

- Załóżmy, że rozkład $dN/d\phi$ składa się z 7 współczynników v_i, każdy o wartości $v_i = 0.3$, $i = \{1 \dots 7\}$.

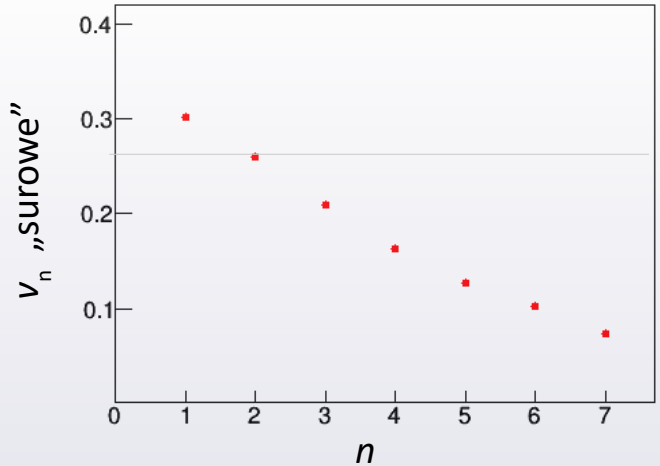
  Symulacja: 10^5 zderzeń × 60 wyemitowanych cząstek w 1 zderzeniu.
  Pęd każdej cząstki = 1 (to uproszczenie).

  - Każde zderzenie: φ_r próbkowany izotropowo
  - Każda cząstka: ϕ_i próbkowany z $dN/d\phi$ i obracany do Lab : $\phi_{Lab,i} = \phi_i + \varphi_r$

- Następnie **rekonstrukcja**. W każdym zderzeniu:
  - Rekonstrukcja kąta płaszczyzny reakcji ψ_r via $\overline{Q}$ (*uwaga*: ψ_r to estymator φ_r)
  - Transformacja kątów cząstek z Lab do układu płaszcz. reakcji: $\phi_i = \phi_{Lab,i} - \psi_r$
  - Ekstrakcja v_n według: $v_n \approx \langle \cos n\phi \rangle$



- Skutek:

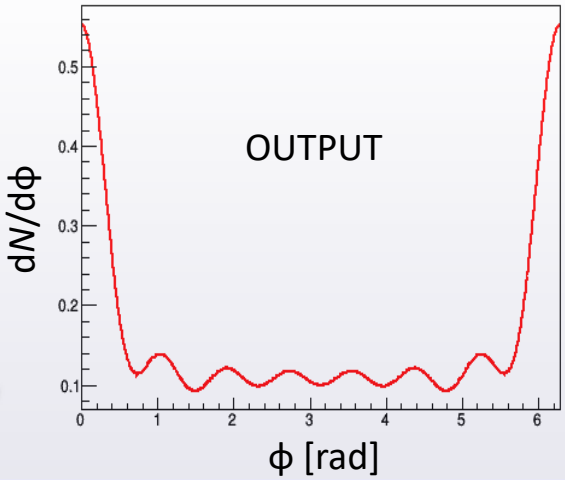


Im wyższy stopień v_n (wyższe harmoniczne),

tym bardziej wkład został stłumiony…

Q: Gdzie tkwi problem?

Efekt fizyczny ➡ Efekt fizyczny



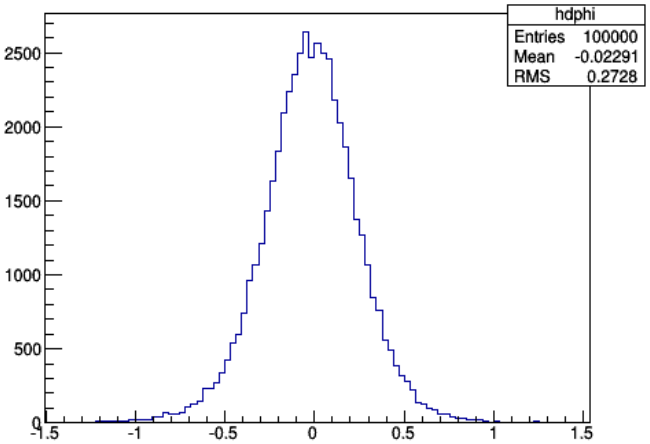
Rozmycie płaszczyzny reakcji – i metoda korekcji

- Przyczyna problemu:

  jeżeli liczba cząstek w 1 zderzeniu nie jest wysoka,
  to **zrekonstruowany** kąt płaszczyzny reakcji ψ_r
  jest tylko **estymatorem prawdziwego** kąta φ_r ,
  a pomiar „myli się” średnio o **niepewność** $\Delta\varphi_r$.

  Możemy to zobaczyć w symulacji →

  Jeżeli ∃ anizotropia rozkładu d*N*/dϕ , to ograniczona statystyka ją rozmywa.



$\psi_r - \varphi_r$ [rad]

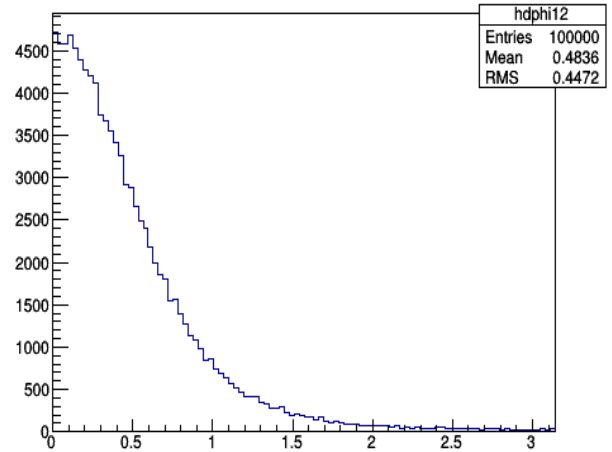
- ***„Metoda Ollitraulta”* korekcji pływu** [J.Ollitrault, arXiv:nucl-ex/9711003]
  Ograniczona statystyka w 1 zdarzeniu
  ⇒ $\overline{Q}$ rozmyte zgodnie z 2D rozkładem Gaussa.

- Rozmycie $\Delta\varphi_r$ osłabia coraz silniej kolejne współczynniki v_n , ale w sposób <u>regularny</u>

$$\langle \cos n\psi \rangle = \langle \cos n\phi \rangle \cdot \langle \cos n\Delta\varphi_r \rangle$$

estymator — **wartość prawdziwa** — **współczynnik osłabienia**

- Jak oszacować $\Delta\varphi_r$, skoro nie znamy prawdziwego φ_r ?
  W każdym zderzeniu dzieli się próbkę na 2 części.
  Wyznaczamy $\psi_{r,1}$ i $\psi_{r,2}$ z tych podpróbek.
  Wyrażenie $\Delta\varphi_{r12} = |\psi_{r,1} - \psi_{r,2}|$ podlega rozrzutowi →



$\Delta\varphi_{r12} = |\psi_{r,1} - \psi_{r,2}|$ [rad]

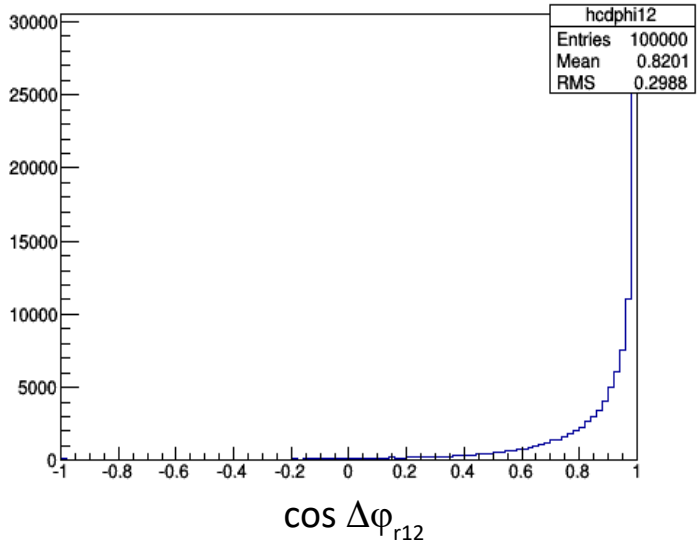
- **Najkrótszy przepis na korekcję**
  - Budujemy histogram zmiennej: $\cos \Delta\varphi_{r12}$
  - Pobieramy wartość średnią: $\langle \cos \Delta\varphi_{r12} \rangle$

    W ramach metody Ollitrault, wartość ta zależy od pewnego parametru χ :

$$\langle \cos \Delta\varphi_{r12} \rangle = \frac{\pi}{8} \chi^2 e^{-\chi^2} \cdot \left[I_0\left(\frac{\chi^2}{4}\right) + I_1\left(\frac{\chi^2}{4}\right) \right]^2$$

gdzie $I_{0,1}$: funkcja Bessel'a

  - Wyznaczamy wartość χ (np. numerycznie).



- Na tym etapie znamy χ. Współczynniki korekcji dla kolejnych wyrazów v_n zależą tylko od χ i mają postać:

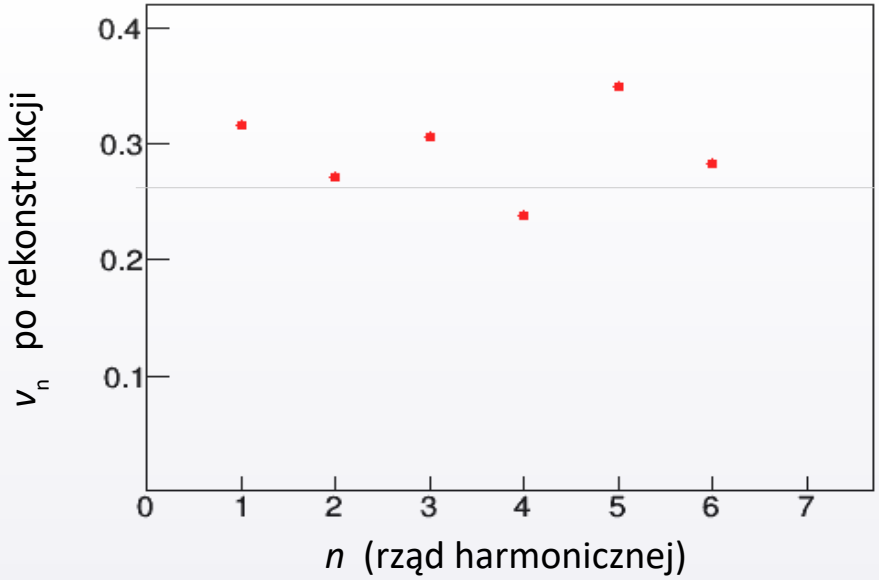
$$\langle \cos n\Delta\varphi_r \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \chi e^{-\chi^2/2} \cdot \left[I_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\chi^2}{2}\right) + I_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{\chi^2}{2}\right) \right]$$

gdzie I_x : funkcja Bessel'a

Clou: to się d a j e zrobić !

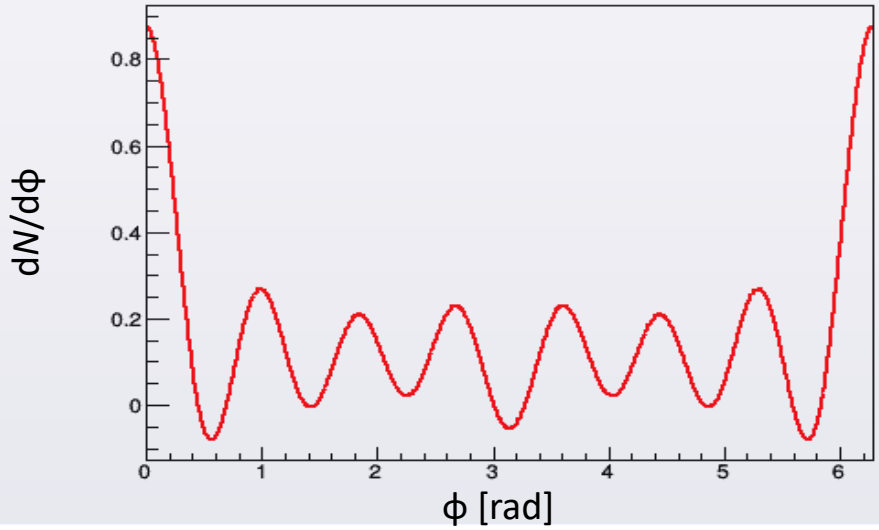
- Symulacja.

Wynik po korekcji
metodą Ollitrault:



Rozrzut v_n związany z niepewnościami,

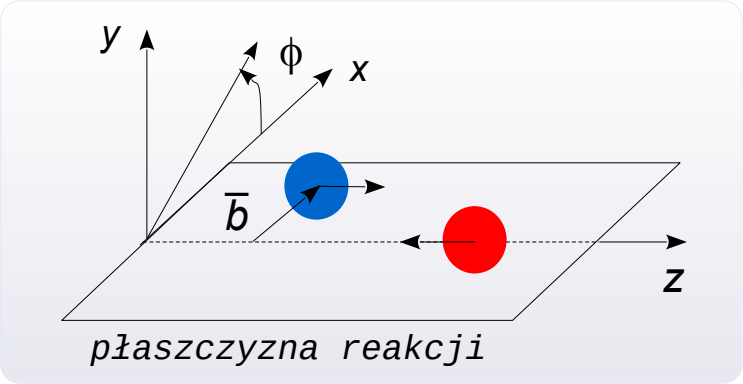
ale przeciętny $v_n \approx 0.3$ (trend opadający cofnięty)

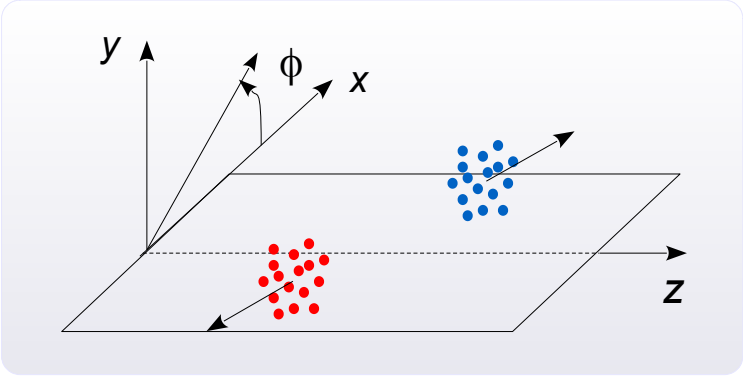


Skorygowany rozkład $\frac{dN}{d\phi}$

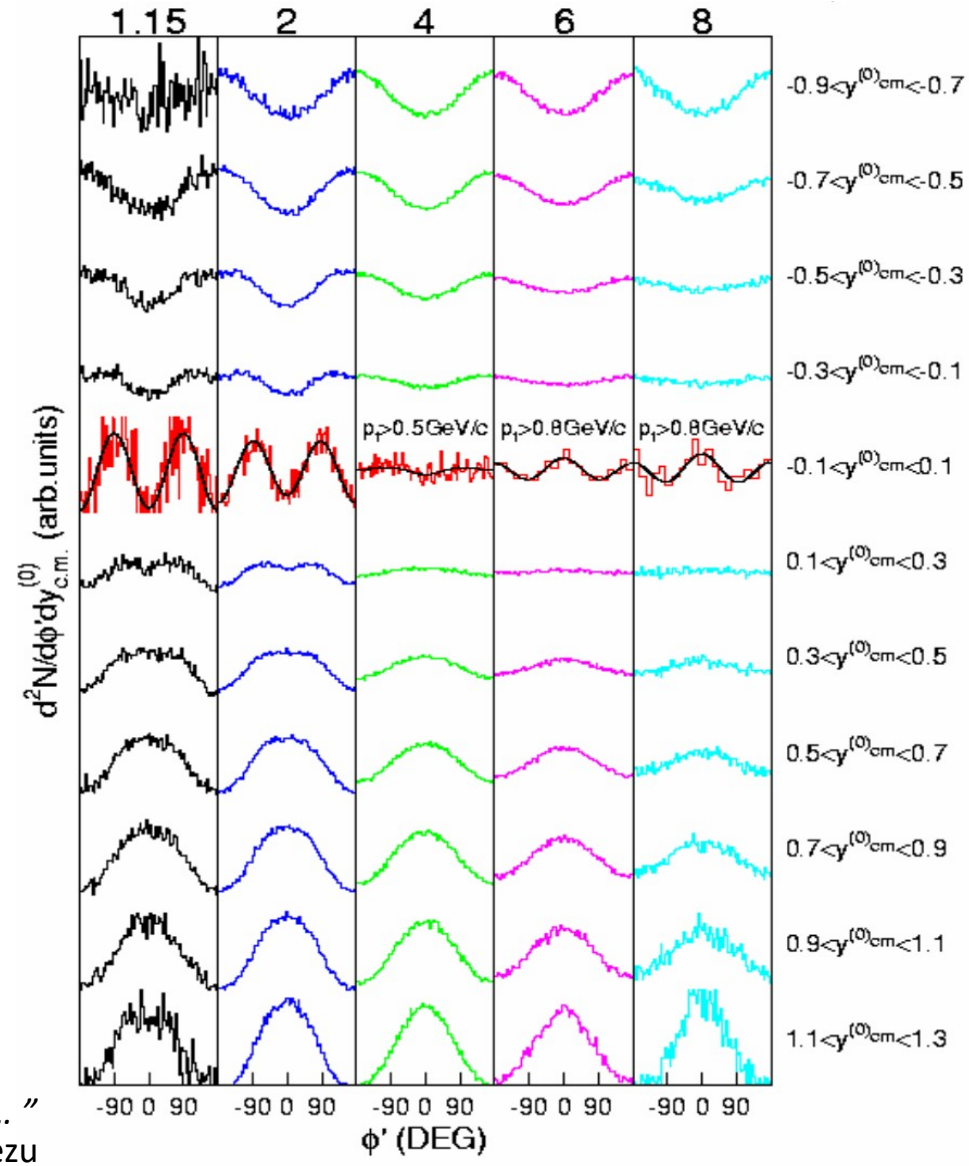
Pływy – wyniki doświadczalne

- Rozkłady dN/dϕ **protonów** ze zderzeń Au+Au @ 1.15 – 8*A* GeV dla kolejnych przedziałów pospieszności $y^{(0)\,CM}$ (uśrednione po p_T)
- Orientacja kąta ϕ





„Panta rhei … ”
Heraklit z Efezu



C.Pinkenburg et al., Phys.Rev.Lett 83,1295 (1999)

Pływy – wyniki doświadczalne

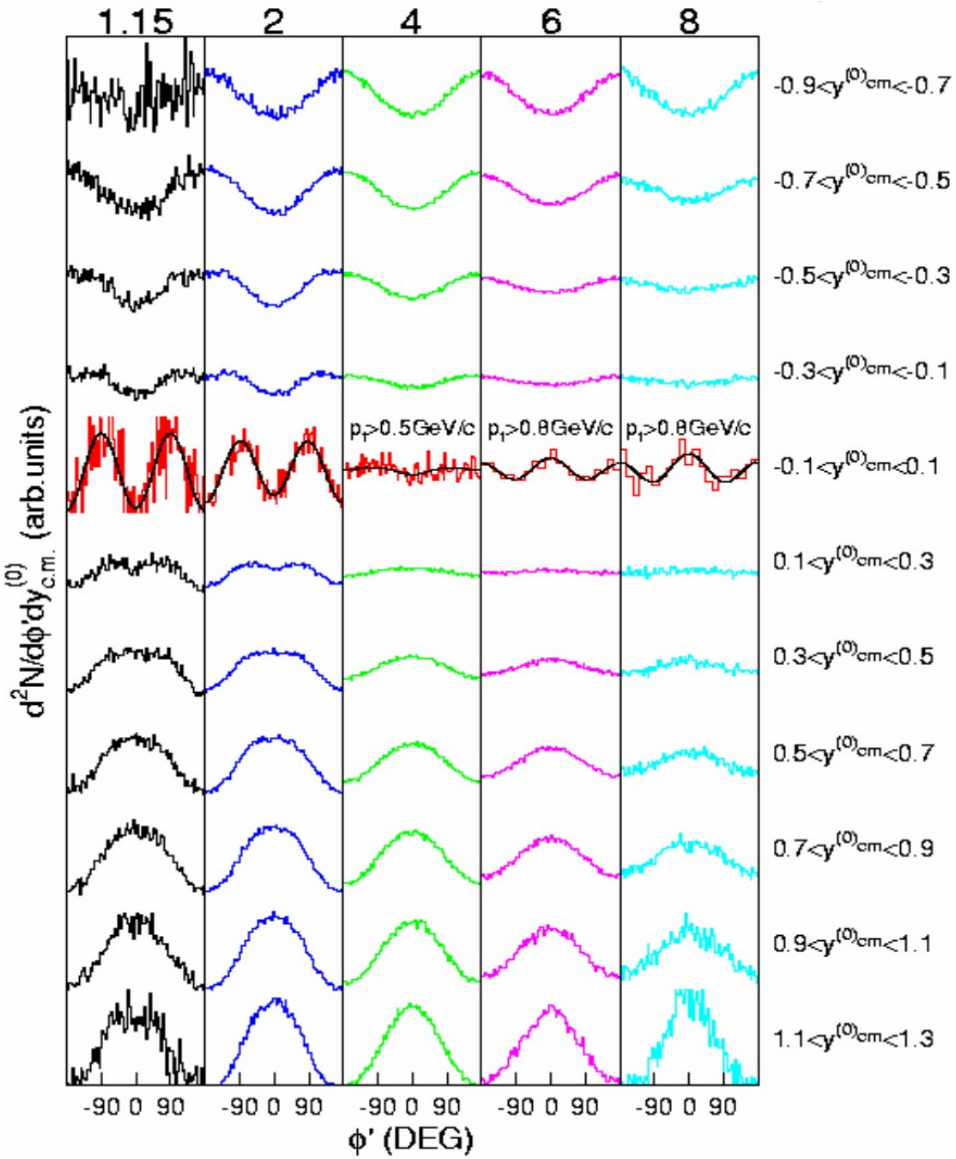
- *Spójrzmy na* $T_{Beam} \approx$ 1 .. 3*A* GeV

$y_z^{(0),CM}$	Efekt wiodący	v_1	v_2
< 0	silna preferencja ku *x* < 0	< 0	
≈ 0	silna preferencja ku OY ↕	= 0	< 0
> 0	silna preferencja ku *x* > 0	> 0	

- *Spójrzmy na* $T_{Beam} \approx$ 5 .. 8*A* GeV

$y_z^{(0),CM}$	Efekt wiodący	v_1	v_2
< 0	silna preferencja ku *x* < 0	< 0	
≈ 0	silna preferencja ku OX ↔	= 0	> 0
> 0	silna preferencja ku *x* > 0	> 0	

- **Silne pływy**:
  v_1 (pływ skierowany / directed flow) i/lub
  v_2 (pływ eliptyczny / elliptic flow)
- Jest to dodatkowy składnik ruchu kolektywnego (nie-termicznego)



C.Pinkenburg et al., Phys.Rev.Lett 83,1295 (1999)

- *Spójrzmy na* $T_{\text{Beam}} \approx$ 1 .. 3*A* GeV

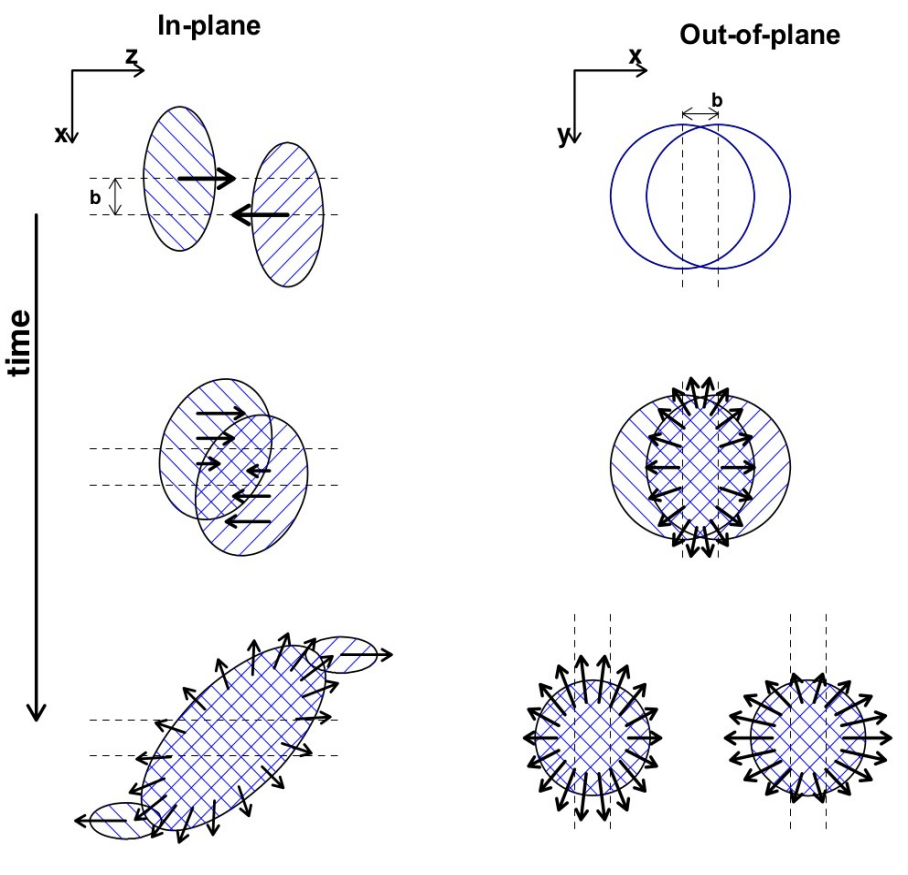
$y_z^{(0),CM}$	Efekt wiodący	v_1	v_2
< 0	silna preferencja ku *x* < 0	< 0	
≈ 0	silna preferencja ku OY ↕	= 0	< 0
> 0	silna preferencja ku *x* > 0	> 0	

- *Spójrzmy na* $T_{\text{Beam}} \approx$ 5 .. 8*A* GeV

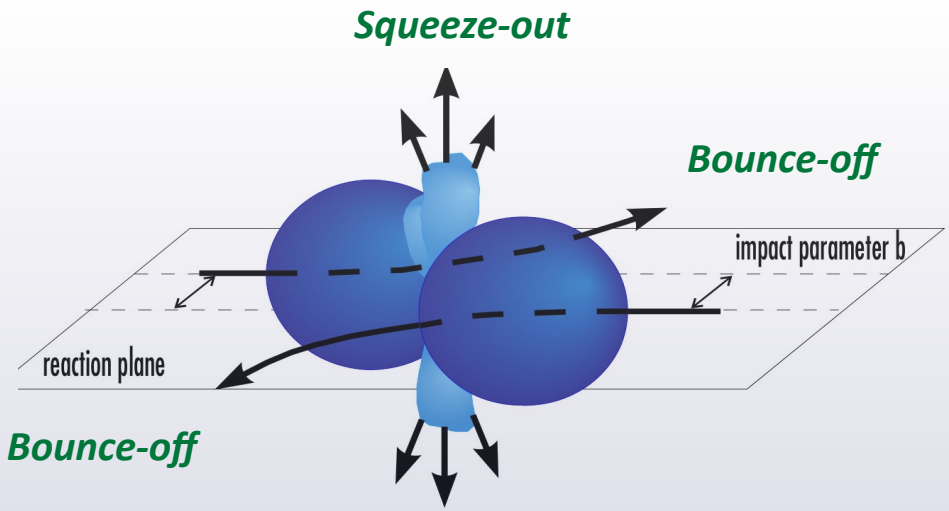
$y_z^{(0),CM}$	Efekt wiodący	v_1	v_2
< 0	silna preferencja ku *x* < 0	< 0	
≈ 0	silna preferencja ku OX ↔	= 0	> 0
> 0	silna preferencja ku *x* > 0	> 0	

- **Silne pływy**:
  v_1 (pływ skierowany / directed flow) i/lub
  v_2 (pływ eliptyczny / elliptic flow)
- Jest to dodatkowy składnik ruchu kolektywnego (nie-termicznego)

- **Interpretacja graficzna przebiegu zderzenia**



Źródło: N. Herrmann, FOPI/CBM



- ***bounce-off*** (wzdłuż płaszczyzny reakcji)

  $\Leftrightarrow$ $v_1 > 0$ dla $y_z > 0$
  $v_1 < 0$ dla $y_z < 0$

- ***Squeeze-out*** (na zewnątrz płaszczyzny reakcji)

  $\Leftrightarrow$ $v_2 < 0$ obserwowany w midrapidity

  (*tak się dzieje dla* $T_{\text{Beam}} \approx 1 .. 3A$ GeV)

- Willy Reisdorf (2012) :

Even under the constraints of symmetric heavy ion systems, the flow fields v_1 and v_2 have complex multidimensional dependences:

$$v_1 = v_1(E/u, A_{sys}, Z_{sys}, b_0, A, Z, y_0, u_{t0}) \quad (11)$$

$$v_2 = v_2(E/u, A_{sys}, Z_{sys}, b_0, A, Z, y_0, u_{t0}) \quad (12)$$

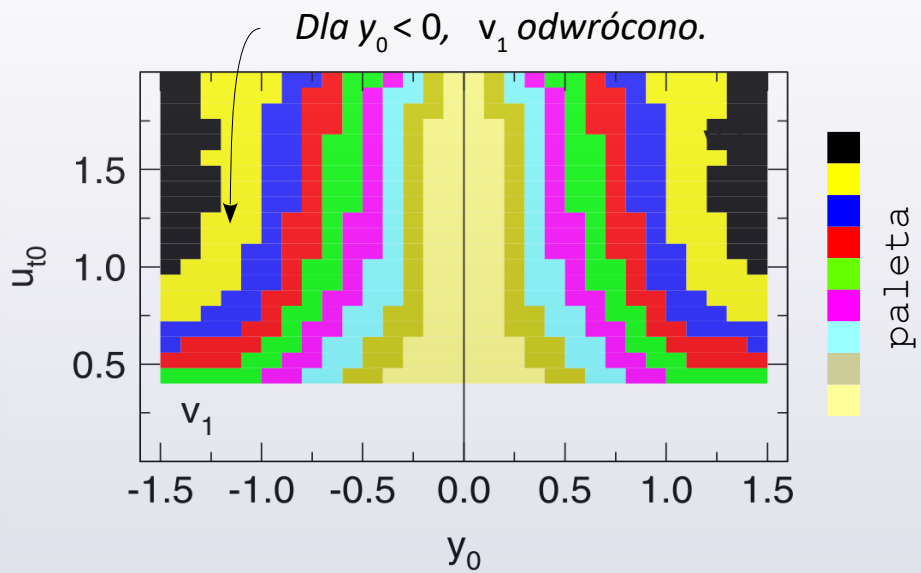
where E/u is the incident beam energy per mass unit, A_{sys}, Z_{sys} are the system mass and charge, A, Z is the ejectile composition. As a consequence a complete systematics encompasses an enormous amount of information. It is out of question to present all this information in one readable paper: the chosen one-dimensional cuts through the flow topology are necessarily restrictive and

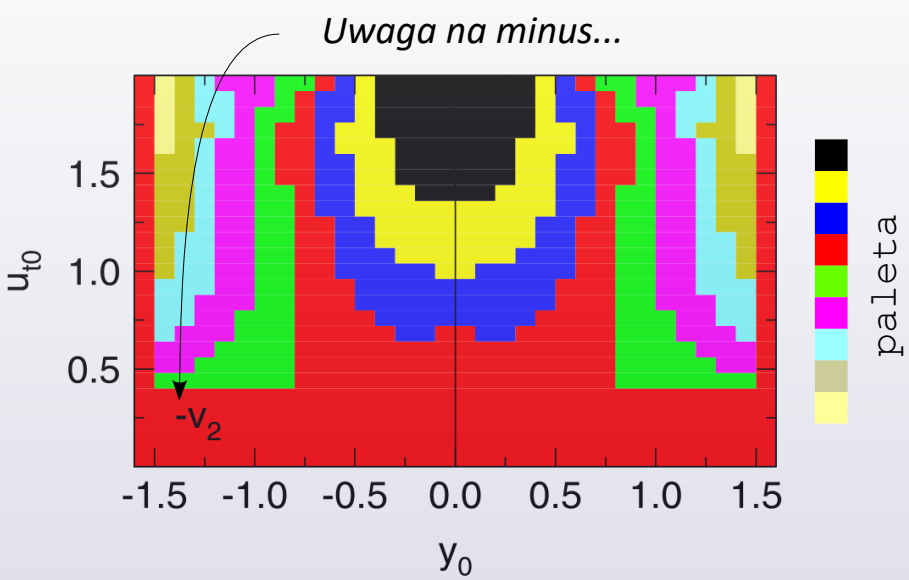
Omówimy jedynie wiodące efekty.

Pływ protonów w przestrzeni pędowej

- Mapy pływów: skierowanego v_1 i eliptycznego v_2 w przestrzeni fazowej na przykładzie protonów z semicentralnych zderzeń Au+Au @ 1*A* GeV

$$\left\{ u_{t0} \equiv \frac{\beta_t \gamma}{(\beta_t \gamma)^{\text{wiązki}}} \sim p_t \right.$$





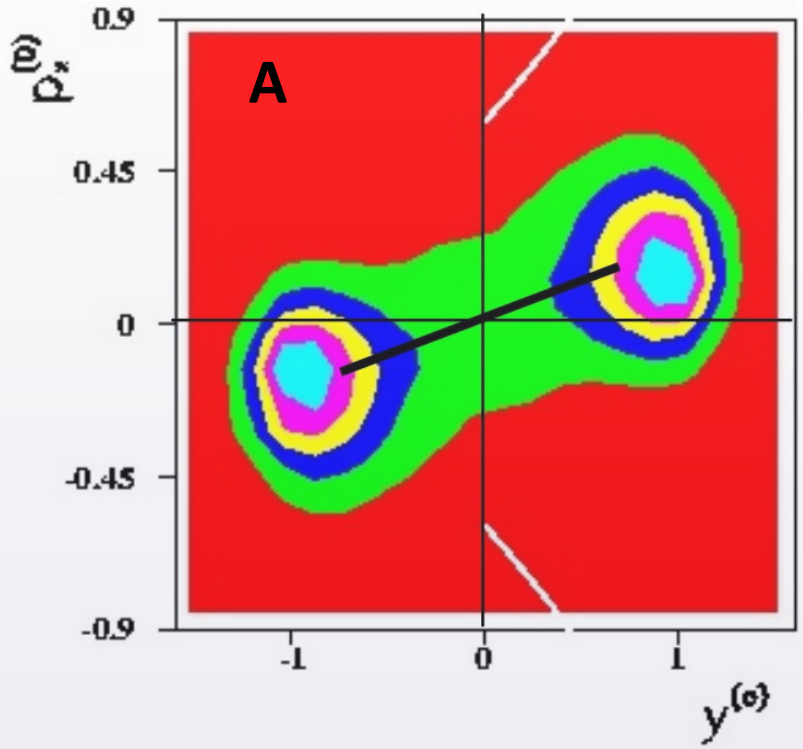
W. Reisdorf etal., Nucl. Phys. A 876, 1 (2012)

- **Pływ v_1** (tendencja do emisji w kierunku OX) narasta z pospiesznością → Efekt **bounce-off**.
  Pływ v_1 narasta też z prędkością (pędem) ⊥ : im szybsze cząstki, tym bardziej na „bok".
  Dla $y_0 = 0$, pływ $v_1 = 0$ (w midrapidity v_1 zmienia znak)

- **Pływ v_2** silnie ujemny w midrapidity (tendencja ku OY) → Efekt **squeeze-out**.
  Pływ v_2 : rośnie ujemna wartość z prędkością (pędem) ⊥ : im szybsze cząstki, tym squeeze-out silniejszy

Pływ boczny / Sideflow: dawna reprezentacja

- Rozkład dla ^{4}Li emitowanych z Au+Au @ 400A MeV

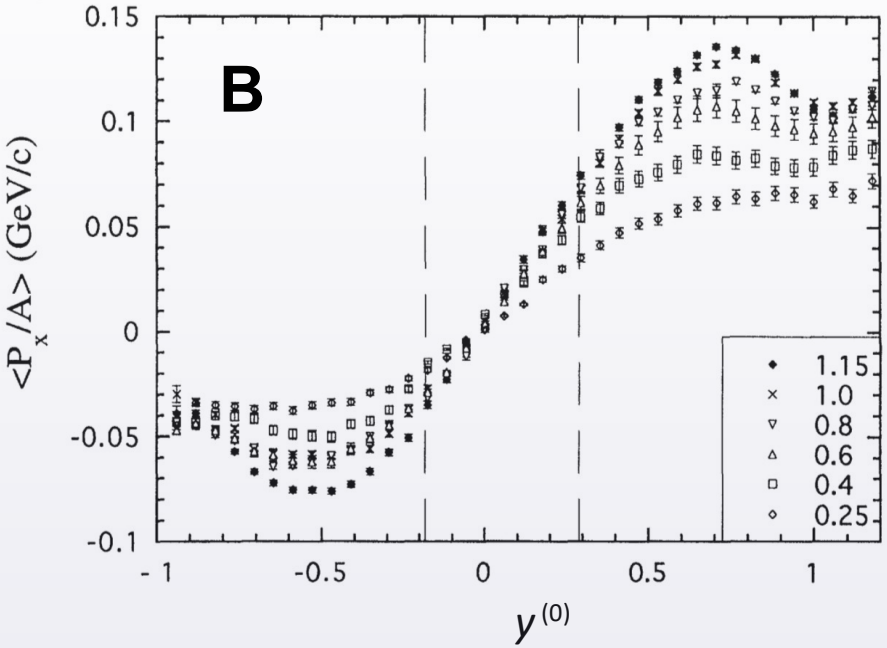


P.Crochet et al., Nucl.Phys.A 624, 755 (1997)

- Zmienne:

$$p_x^{(0)} \equiv \frac{p_x / A}{p_{\text{beam}}^{\text{cm}}} \qquad y^{(0)} \equiv \frac{y - y^{\text{CM}}}{y^{\text{CM}}}$$

- **Pływ boczny** p + d + t + ^{3,4}He (łącznie) emitowanych z Au+Au przy $T_{\text{Beam}} \in$ [0.25 … 1.15] *A* GeV.



M.Partlan et al., Phys.Rev.Lett 75, 2100 (1995)

- Wykres B: zmienne bardzo podobne do tych z A.
  B jest „projekcją z A”, 2 → 1 dim.

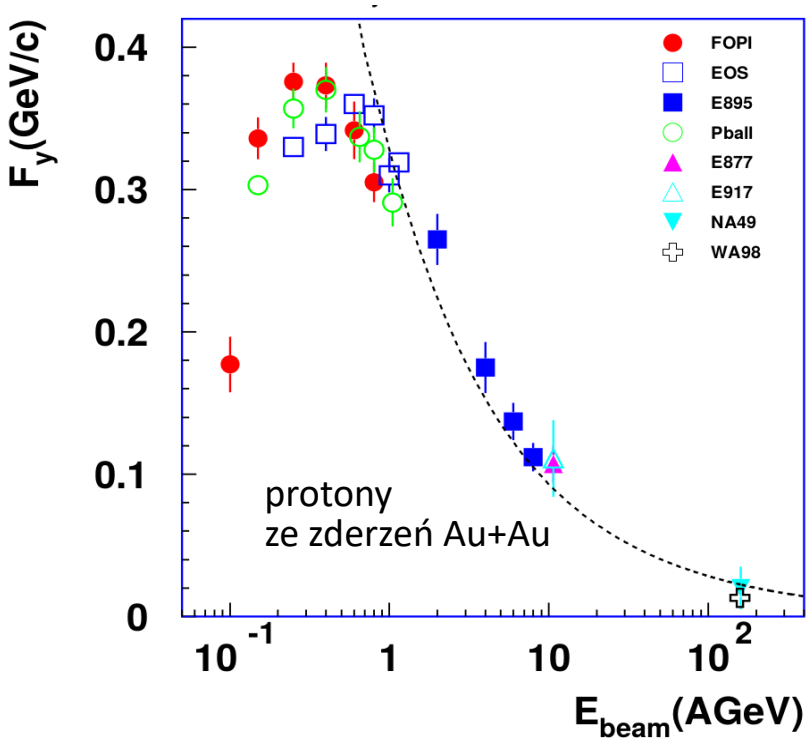
- Ważne wnioski:
  ① Pływ boczny zmienia się z E_{Kin} wiązki
  ② **Miara nasilenia: 1. pochodna wzięta w $y = y_{\text{CM}}$**

- **Zmienna F_y**: („y" pochodzi od pochodnej po rapidity)

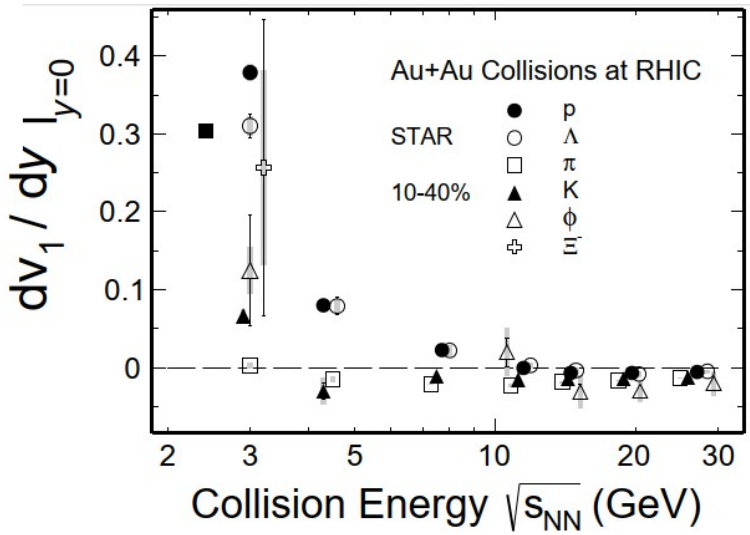
$$F_y \equiv \left. \frac{d\langle p_x / A\rangle}{dy} \right|_{y=y^{CM}}$$

- Funkcja wzbudzenia F_y (zależność od $E_{Kin,\,Beam}$) dla emisji fragmentów z Au+Au

- Dziś, pod p_x/A podstawia się v_1 i pokazuje, jak poniżej. (dla porównania – protony $\sqrt{s_{NN}} \approx$ 3 .. 30 GeV odpowiada $E_{K,Beam}/A \approx$ 3 .. 500 GeV)



W.Reisdorf et al., Ann. Rev. Nucl. Part. Sci 47,663 (1997)

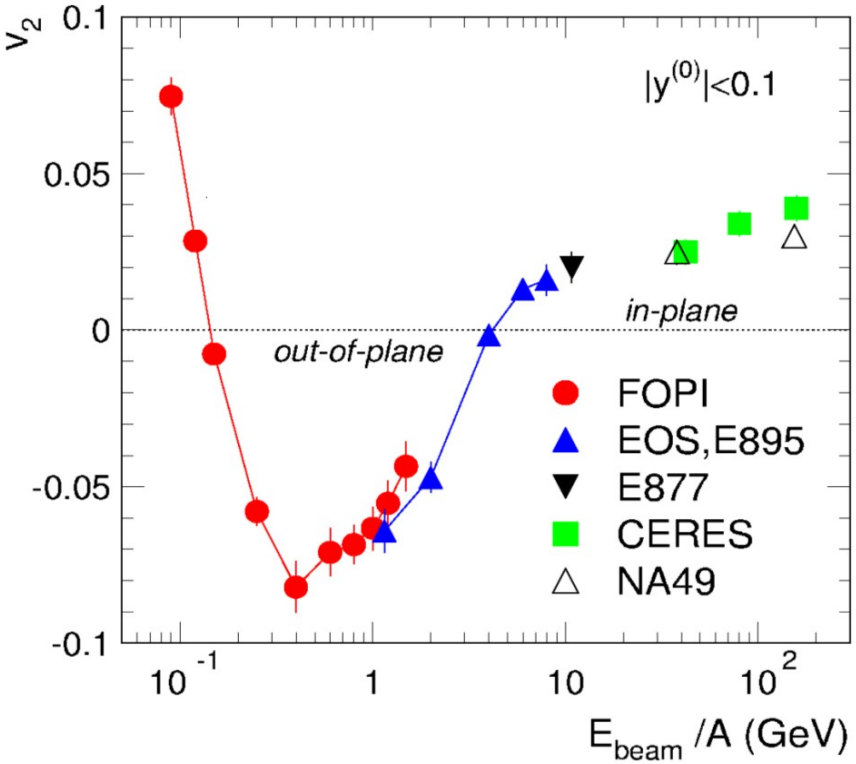


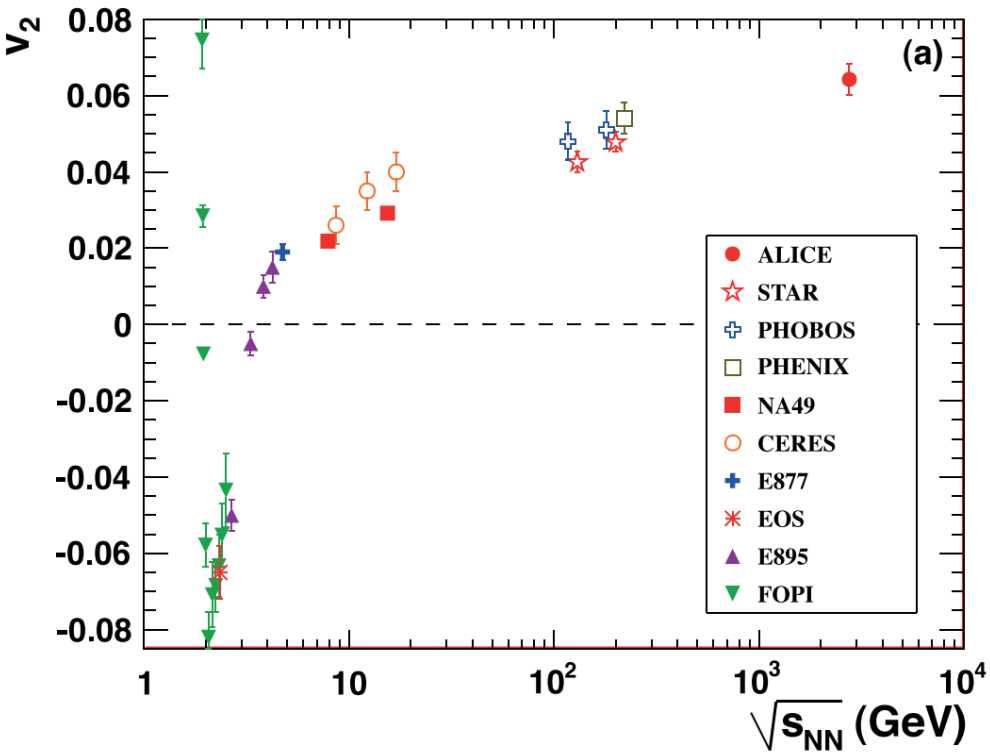
Wnioski: pływ boczny

- wyraźny przy $E_{Kin,Beam}$ ~ kilkaset A MeV,
- przy wyższych $E_{Kin,Beam}$ – słabnie.

Pływ eliptyczny w funkcji energii wiązki

A.Andronic et al., Phys. Lett. B 612, 173 (2005)





R. Snellings, New J. Phys. 13 055008

Pływ eliptyczny v_2

- Dodatni dla $T_{Beam} \lesssim 0.1A$ A GeV
- Ujemny dla $T_{Beam} \in (0.1 .. 5)$ A GeV
- Dodatni dla $T_{Beam} \gtrsim 5$ A GeV

Interpretacja

Obrót układu wokół osi $\perp$ do płaszczyzny reakcji - skutkuje odrzutem na boki.

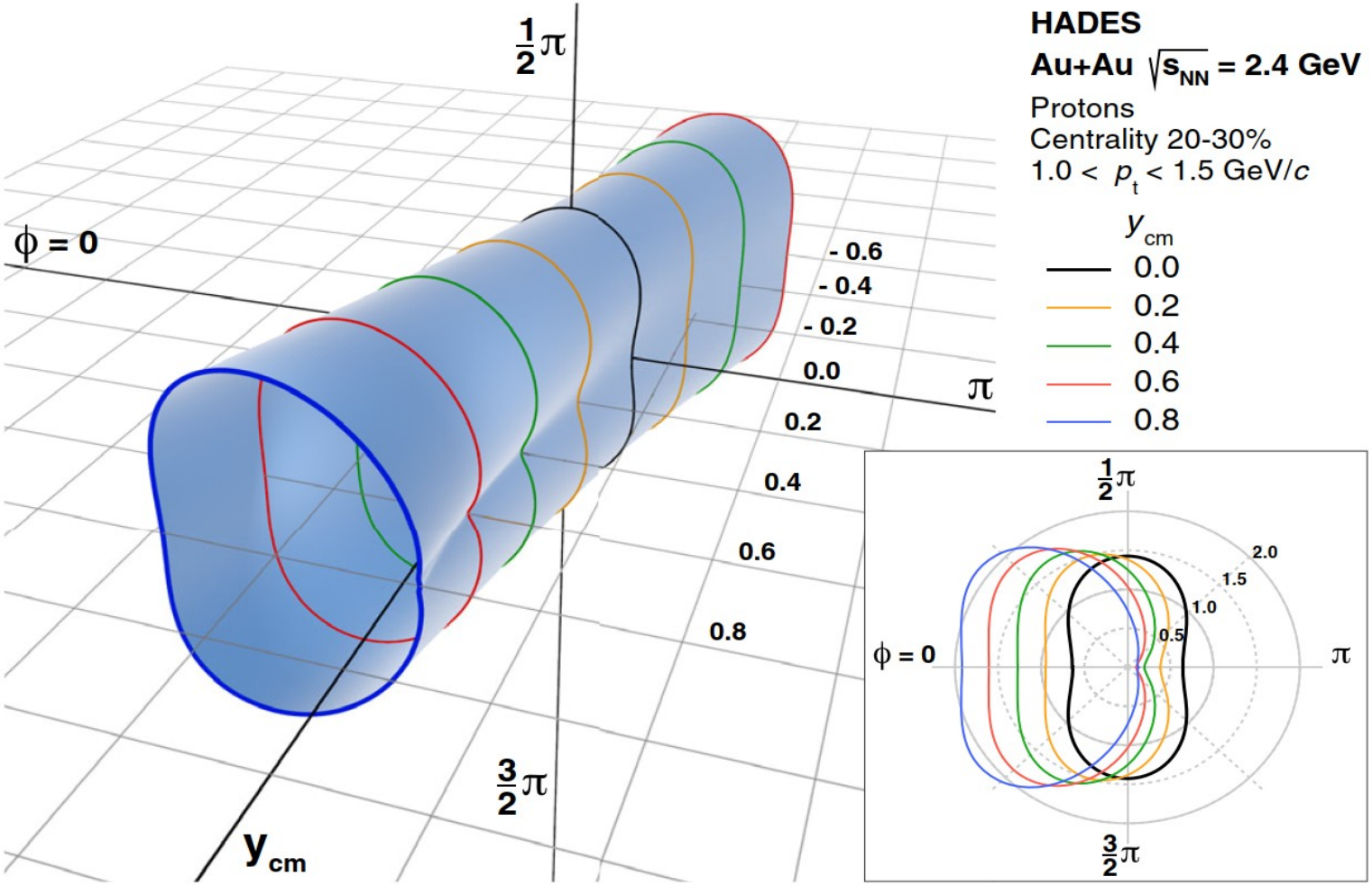
Spektatorzy nie zdołali umknąć – tłumią emisję przy płaszczyźnie reakcji.

Strefa zderzenia: pionowa elipsoida $\Rightarrow$ gradienty ciśnień $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ emisja: pozioma elipsoida

Rekonstrukcja rozkładu kąta φ po ekstrakcji harmonik

- Rekonstrukcja d*N*/dϕ w kolejnych przedziałach pospieszności dla protonów emitowanych z Au+Au przy energii 1.2A GeV. Otrzymane na podstawie ekstrakcji v_1 .. v_6 (wagi dla 1. - 6. harmonicznej)



J. Adamczewski-Musch et al. (HADES) Phys. Rev. Lett. 125, 262301 (2020).

Równanie stanu materii jądrowej

- Energia wiązania, materia jądrowa
- Równanie stanu materii jądrowej
  - Ciśnienie i moduł sprężystości
  - Równanie stanu dla materii asymetrycznej ($N \neq Z$)
  - Wpływ na obserwable: pływy, produkcja K^+

Równanie stanu materii jądrowej (zarys)

- **Realne jądro atomowe**: zbiór nukleonów oddziałujących silnie, słabo i kulombowsko, o skończonej N i V. Nukleony z ∞ wpadają do studni potencjału (energia wiązania E_B), w której nabierają energii kinetycznej (ruch Fermiego). W **modelu kroplowym**:

$$E_B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \delta(A,Z)$$

Dla przeciętnego jądra atomowego: $E_B / A \approx 8$ MeV.

- **Materia jądrowa**: abstrakcyjna materia złożona z nukleonów o nieskończonej N i V, ale o skończonej ρ. Stopień jej związania zależy od: temperatury, gęstości, proporcji n/p .

$$E_B(\rho = \rho_0, T = 0) = a_V A \quad \ldots \quad - a_A \frac{(N-Z)^2}{A}$$

(ρ_0 = **0.17 fm^{-3}** : „**gęstość normalna** materii jądrowej")

Dla symetrycznej ($N = Z$) <u>*materii jądrowej*</u> w stanie normalnym: $E_B / A \approx 16$ MeV.

- Podczas zderzenia jądro/materia gęstnieje i rozrzedza się. Jak E_B / A zależy od koncentracji ρ ? Pewne są 2 punkty:

① dla $\rho = 0$ (nukleon swobodny), $E_B / A = 0$ MeV
② dla $\rho = \rho_0$ (stabilne jądro) , $E_B / A = -16$ MeV

- Można wyprowadzać modele oddziaływań, które odtwarzają obserwacje [①, ②] .
Można też wstawić do symulatora zderzeń jakąś zależność funkcyjną, zgodną z [①, ②].
Miejscem testu są finalne rozkłady kinematyczne cząstek: czy/kiedy model zgodzi się z eksperymentem?

Równanie stanu (EoS), szkic

- **Równanie stanu (Equation of State / EoS)** substancji to **zależność między zmiennymi jej stanu.** Tu: $E = f(\rho, T)$

Energię można ujmować na różne sposoby:

E : całkowita, $\bar{\epsilon}$ **: średnia na nukleon,** e **: koncentracja energii**

Powiązanie:

$$\bar{\epsilon}(\rho, T) \equiv \frac{E}{A}\left[\frac{MeV}{nukl}\right] = \frac{e}{\rho}\left[\frac{MeV/fm^3}{nukl/fm^3}\right]$$

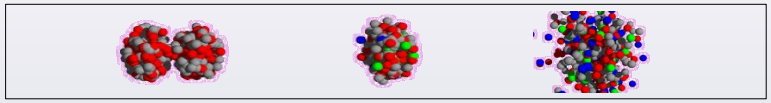
- Energia jądra atomowego na nukleon (zapis półrelatywistyczny) :

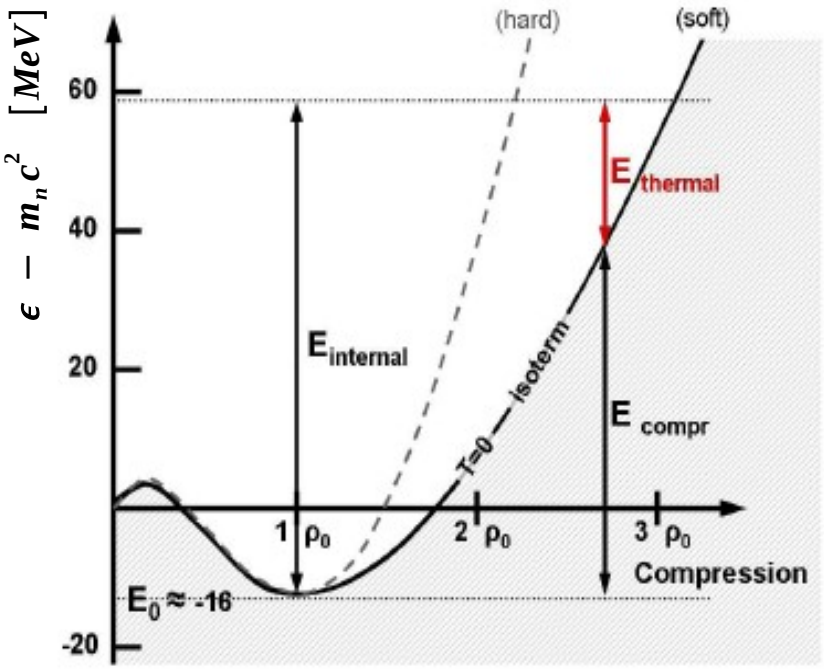
$$\bar{\epsilon}(\rho, T) = m_N c^2 + \underbrace{\left[\bar{\epsilon}_{Kin} + \bar{u}\right](\rho, T=0)}_{E_B/A} + \bar{\epsilon}(\rho, T>0)$$

- Wykres: jakościowe zachowanie EoS materii jądrowej.

Warto porównać ten wykres do dynamiki zderzenia. Prześledźmy:

$\rho_0 \rightarrow 3\rho_0 \rightarrow <\rho_0$





Równanie stanu (EoS), przygotowanie do rozwinięcia

- Startujemy z **I zasady termodynamiki:** $dE = dQ - p\,dV = T\,dS - p\,dV$

Przy $T = 0$, **ciśnienie**

$$p = -\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_{T=0} = \left| \begin{array}{l} \bar{\epsilon} = \dfrac{E}{A} \\ \rho = \dfrac{A}{V} \\ d\rho = -\dfrac{A}{V^2}dV \end{array} \right| = -\left.\frac{\partial(\bar{\epsilon} A)}{-\dfrac{V^2}{A}\cdot\partial\rho}\right|_T = +\left(\frac{A}{V}\right)^2 \cdot \left.\frac{\partial\bar{\epsilon}}{\partial\rho}\right|_T = \rho^2 \cdot \left.\frac{\partial\bar{\epsilon}}{\partial\rho}\right|_T$$

Zauważmy, że dla gęstości normalnej $(\rho = \rho_0)$ równowaga $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial\bar{\epsilon}}{\partial\rho} = 0$, co zarazem oznacza $p = 0$ (brak ciśnień)

- W mechanice definiuje się *moduł ściśliwości* (compressibility modulus) $\chi = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial p}$

Jego odwrotnością jest *moduł sprężystości objętościowej* (bulk modulus) $\kappa = -V\dfrac{\partial p}{\partial V} = \rho \cdot \dfrac{\partial p}{\partial\rho}$

W fizyce jądrowej: ***moduł sprężystości*** **(incompressibility modulus)** :

$$\kappa_{nuclear} \equiv 9\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{T=0}$$

- Podsumujmy wielkości termodynamiczne:

ciśnienie $p = \ldots = -\rho^2\left.\dfrac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right|_{T=0}$

moduł sprężystości $\kappa = \ldots = +\rho\left.\dfrac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{T=0}$

- W badaniach jądrowych:

moduł sprężystości $\kappa \equiv 9\left.\dfrac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{T=0}$

Równanie stanu (EoS), przygotowanie do rozwinięcia

- W fizyce jądrowej: ***moduł sprężystości*** (**incompressibility modulus**) :

$$\kappa_{nuclear} \equiv 9 \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{T=0}$$

$$\kappa = 9 \left.\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \rho} \right)\right|_{T=0} = 9 \cdot \left(2\rho \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial \rho^2} \right)_{T=0} = 9 \cdot \left(2\frac{p}{\rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial \rho^2} \right)_{T=0}$$

[przepis na $\kappa(\varrho)$]

- W pracach zwykle pisze się o $\kappa(\varrho = \varrho_0)$. Ponieważ ϱ_0 odpowiada minimum równania stanu, to:

$$\kappa(\rho = \rho_0) = 9 \cdot \left(\rho_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial \rho^2} \right)_{T=0} = 9 \cdot \left.\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}\right|_{T=0}$$

[krzywizna $\bar{\epsilon}(\rho)$ w ρ_0]

- Mamy równanie stanu w ogólnej postaci : $\bar{\epsilon} = m_N c^2 + \left[\bar{\epsilon}_{Kin} + \bar{u}\right](\rho, T=0) + \bar{\epsilon}(\rho, T>0)$

Wyrażenie dla $T = 0$ składa się z części ***kinetycznej*** i ***potencjalnej***.

Część ***kinetyczną*** już wyprowadziliśmy (w ramach „gazu” Fermiego). Przypomnijmy:

Gęstość dostępnych stanów energetycznych : $g(\epsilon_{Kin}) = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} (2m)^{3/2} \epsilon_{Kin}^{1/2}$

Energia Fermiego : $\epsilon_F = \frac{(c\, p_F)^2}{2 m_N c^2} = \frac{(\hbar c)^2}{2 m_N c^2} \cdot \left(3\pi^2 \frac{\rho}{2}\right)^{2/3}$

Energia Fermiego dla $\rho = \rho_0$ wynosi 37 MeV. Ale zależy ona od gęstości jądra: $\epsilon_F \sim \rho^{2/3}$

Równanie stanu (EoS) : część kinetyczna

- ... przypomnijmy:

Gęstość dostępnych stanów energetycznych : $$g(\epsilon_{Kin}) = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} (2m)^{3/2} \epsilon_{Kin}^{1/2}$$

Energia Fermiego : $$\epsilon_F = \frac{(c\, p_F)^2}{2 m_N c^2} = \frac{(\hbar c)^2}{2 m_N c^2} \cdot \left(3\pi^2 \frac{\rho}{2}\right)^{2/3}$$

Energia Fermiego dla $\rho = \rho_0$ wynosi 37 MeV. Ale zależy ona od gęstości jądra: $\epsilon_F \sim \rho^{2/3}$

➡ **Średnia energia kinetyczna 1 nukleonu ($T = 0$) :** $$\bar{\epsilon}_{Kin} = \int_0^\infty \epsilon_{Kin} \cdot g(\epsilon_{Kin}) \cdot n(\epsilon_{Kin})\, d\epsilon_{Kin} = \frac{3}{5}\epsilon_F$$

Przy $\rho = \rho_0$: $\bar{\epsilon}_{Kin} = \frac{3}{5}\epsilon_F(\rho_0) = 22{,}2\ \mathrm{MeV}$, natomiast poza ρ_0 : $\bar{\epsilon}_{Kin} \sim \rho^{2/3}$

- Wstawmy $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{Kin} + \bar{u}$ do wyrażenia na **ciśnienie** :

$$p = \rho^2 \left.\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \rho}\right|_{T=0} = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{3}{5}\epsilon_F + \bar{u}\right]\Bigg|_{T=0} = \left| \begin{array}{c} \epsilon_F = \alpha \rho^{2/3} \\ \frac{\partial \epsilon_F}{\partial \rho} = \alpha \cdot \frac{2}{3}\rho^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{\epsilon_F}{\rho} \end{array} \right| = \frac{2}{5}\rho\epsilon_F + \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{u}{\rho}\Bigg|_{T=0}$$

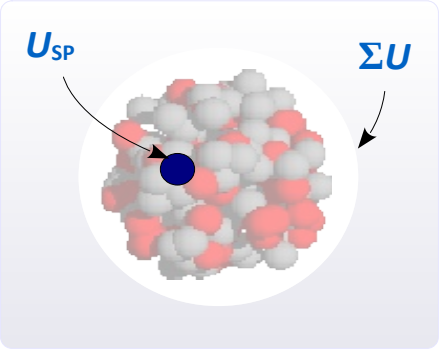
- ... i wtedy **moduł sprężystości**:

$$\kappa(\rho) = 9\frac{\partial p}{\partial \rho}\Bigg|_{T=0} = \frac{18}{5}\left(\epsilon_F + \rho\frac{\partial \epsilon_F}{\partial \rho}\right) + 9\left(2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{u}{\rho} + \rho^2\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\frac{u}{\rho}\right)_{T=0} = 6\epsilon_F + 9\left(2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{u}{\rho} + \rho^2\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\frac{u}{\rho}\right)_{T=0}$$

- **Ogólna uwaga o Energii potencjalnej**

Jest różnica między ① E_{pot} **naszego ciała w polu od A-1 ciał.**
(tzw. U_{SP} **= single-particle potential**) , a

② E_{pot} **układu A ciał** ($\Sigma\, U_{SP}$)



Zagadnienie EoS wymaga podania ② , bo rozważamy energię układu.

W pracach zwykle podaje się ① (tzw. U_{SP} **= single-particle potential**),
bo w symulacjach hamiltonian cząstki potrzebuje ① .

- Jeśli $\Sigma U \equiv$ całkowita E_{Pot}, $\bar{u} \equiv$ średnia ϵ_{Pot} na 1 nukleon i $u \equiv$ koncentracja E_{Pot} ,

to analogicznie do $\bar{\epsilon} \equiv \dfrac{E}{A} = \dfrac{e}{\rho}$ mamy: $\bar{u} = \dfrac{\Sigma U}{A} = \dfrac{u}{\rho}$

- **Recepta na przejście $U_{SP} \rightarrow \bar{u}$:**

$$\bar{u} = \frac{\int U_{SP}\, dA}{A} = \left| \begin{array}{l} \rho = \dfrac{A}{V} \\ d\rho = \dfrac{dA}{V} \end{array} \right| = \frac{\int U_{SP}\, d\rho}{\rho}$$

(zatem $u = \int U_{SP}\, d\rho$)

Równanie stanu (EoS) – typowa parametryzacja

- Rozważmy pewną ogólną **rodzinę potencjałów jednocząstkowych**:

$$U_{SP} = A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma}$$

Uwaga: opisuje ona materię *symetryczną* ($N = Z$). Asymetrię rozpatrzymy później.

Dostajemy **gęstość energii potencjalnej**:

$$u(\rho) = \int U_{SP}\, d\rho = \frac{A}{2}\frac{\rho^2}{\rho_0} + \frac{B}{\sigma + 1}\frac{\rho^{\sigma+1}}{\rho_0^{\sigma}}$$

i stąd **średnią energię potencjalną na nukleon $\bar{u}$** :

$$\bar{u} = \frac{u}{\rho} = \frac{A}{2}\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{B}{\sigma + 1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma}$$

- Podstawmy wynik do p :

$$p(\rho) = \frac{2}{5}\rho\,\epsilon_F + \rho\left[\frac{A}{2}\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{B\sigma}{\sigma + 1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma}\right]$$

...i do κ :

$$\kappa(\rho) = \ldots = 6\,\epsilon_F + 9\left[A\frac{\rho}{\rho_0} + B\sigma\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma}\right]$$

$$\kappa(\rho_0) = 6\,\epsilon_F + 9(A + B\sigma)$$

Jednoznaczna recepta:

dla danego U_{SP} oddzdziałującego na każdy nukleon

mamy dany moduł sprężystości materii jądrowej w $\rho = \rho_0$

- Przykładowo:

A [MeV]	B [MeV]	σ	κ (ρ_0) [MeV]	Typ EoS
-124	70.5	2.11	445	Hard
-356	303	7/6	200	Soft

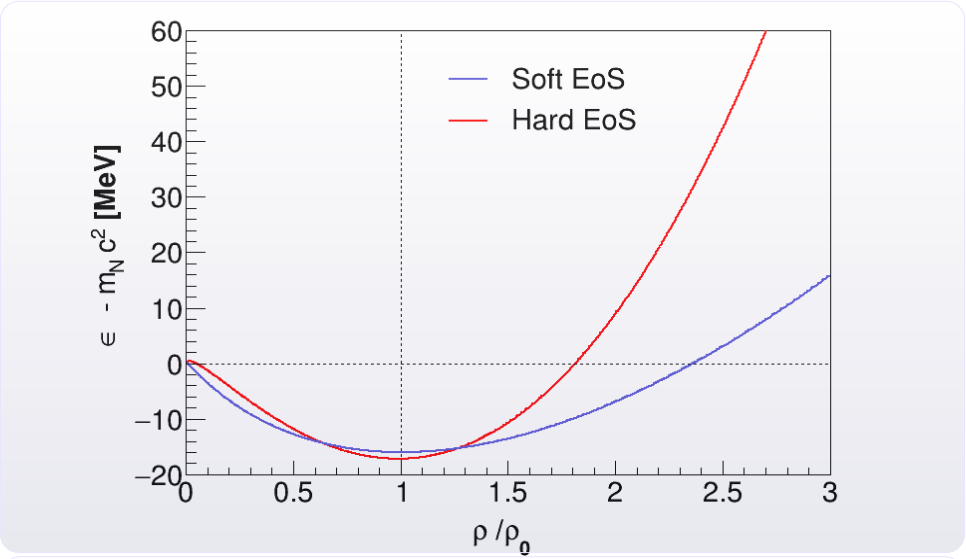
Równanie stanu (EoS) – prosty przykład

- Przykład: $$U_{SP} = A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma}$$

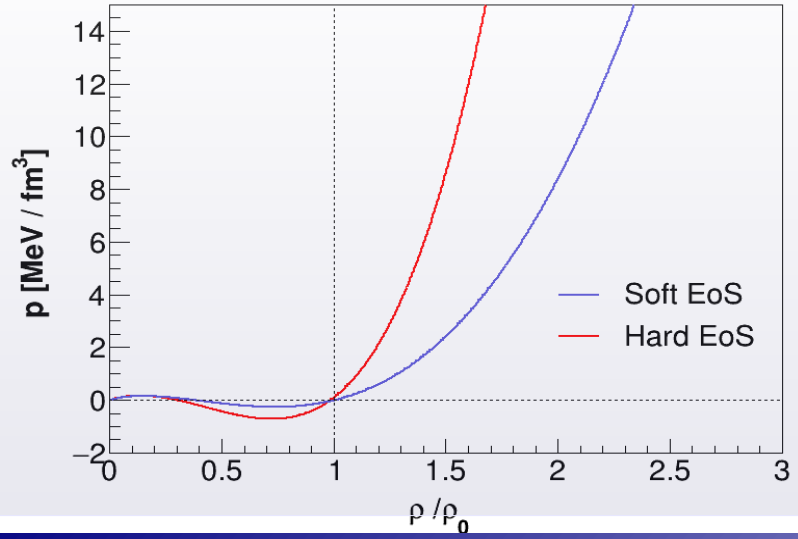
A [MeV]	B [MeV]	σ	κ (ρ_0) [MeV]	Typ EoS
-124	70.5	2.11	445	Hard
-356	303	7/6	200	Soft

- Przypomnijmy. Dla $T = 0$,

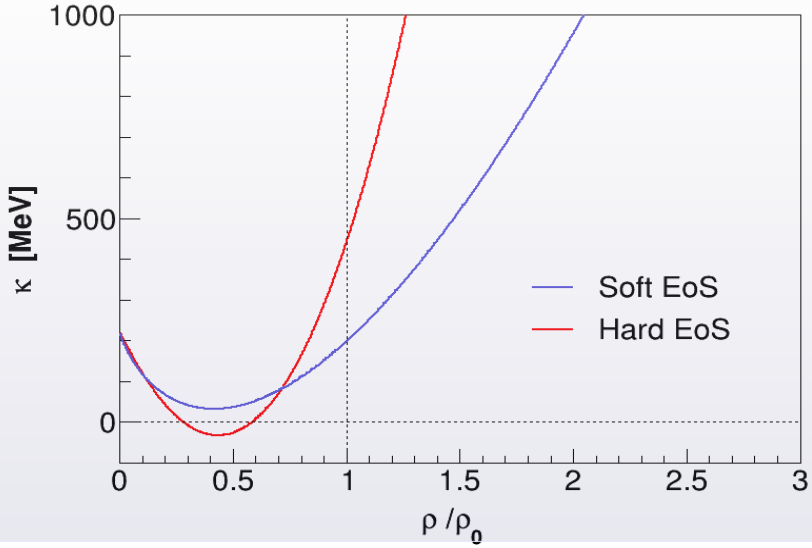
$$\bar{\epsilon}\,(\rho,\, T{=}0) = m_n c^2 + \left[\bar{\epsilon}_{Kin} + \bar{u}\right](\rho,\, T{=}0)$$



- **Ciśnienie.** Nb.: 1 MeV/fm^3 = $1.6 \cdot 10^{32}$ Pa



- **Moduł sprężystości** (incompressibility modulus)



Jak EoS wpływa na przebieg zderzenia?

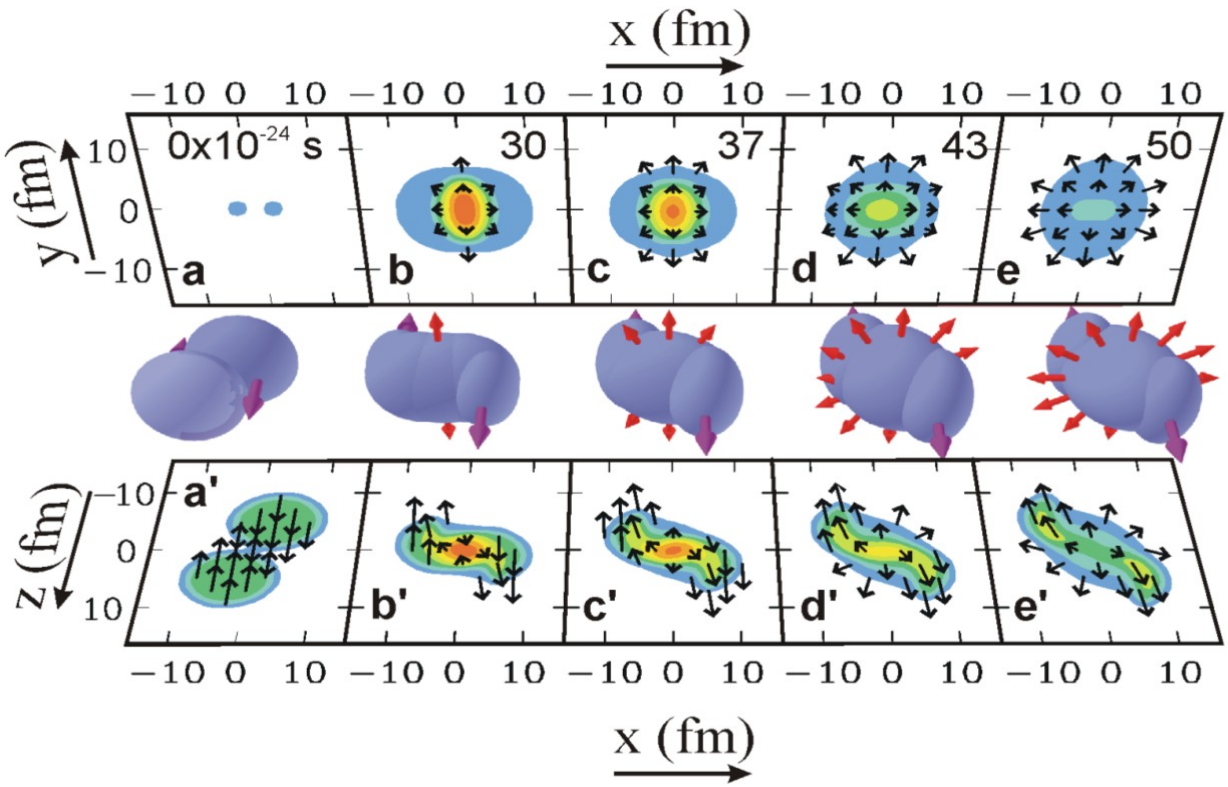
- Parametry EoS określają profil $p(\varrho)$. Jeśli rozkład ϱ w przestrzeni jest nierównomierny $\Rightarrow$ występują gradienty p.
  Nierównowaga ciśnień powoduje wypychanie (wciąganie) materii w danych kierunkach.
  To wpływa na rozkłady zmiennych kinematycznych, np. generuje pływ poprzeczny .

- Przykład: symulacja Au+Au @ 2*A* GeV w ramach modelu transportu BUU. Użyty typ EoS: $U_{SP} = \dfrac{a\rho + b\rho^{\sigma}}{1 + \left(0.4\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma-1}} + \Delta U(p)$

P. Danielewicz et al., Science 298, 1592 (2002), arXiv: nucl-th/0208016

Rozkład ciśnienia ($\perp$, kolor)

Rozkład gęstości (kolor)



Strzałki ukazują pole prędkości

Wpierw (b-c) spektatorzy blokują wypływ materii w płaszczyźnie reakcji. Po odblokowaniu, (e) materia płynie na boki.

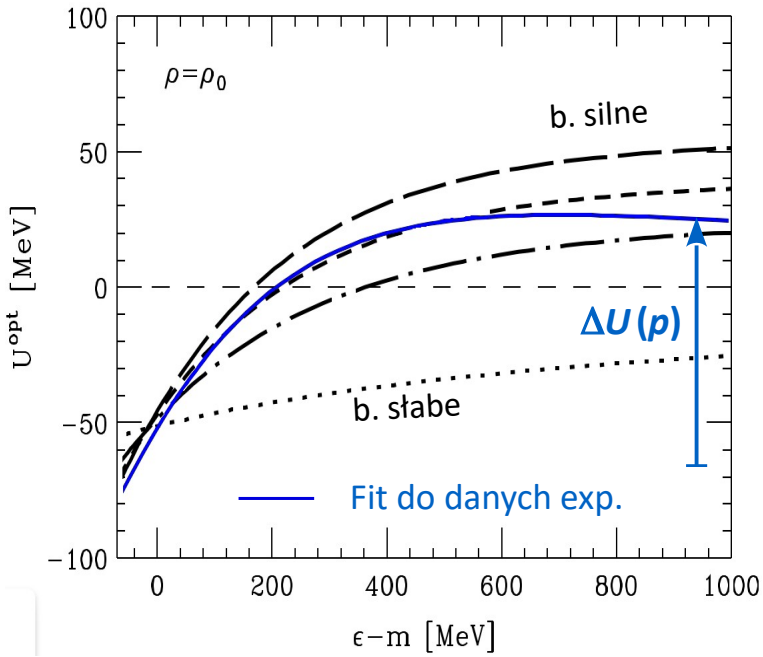
Potencjał zależny od pędu

- **Elastyczne rozpraszanie p + A** pozwala na wydobycie pot. jądrowego.
  Potencjał, który dla $p \to 0$ jest przyciągający ($\exists$ *jądra atomowe*)
  dla wysokich pędów … staje się odpychający

  Różne modele często porównuje się przez:

$$U(p,\rho) \equiv E(p,\rho) - \sqrt{m^2 + p^2}$$

  tj. różnica między energią nukleonu modelowaną w ośrodku
  a energią nukleonu swobodnego.



P. Danielewicz, Nucl. Phys. A 673, 375 (2000)

- Nazwijmy **$\Delta U(p)$** różnicę między $U(p)$ a $U(0)$.

  Widać, że **$\Delta U(p)$ zawsze osłabia wiązanie**.
  Przy wyższych *p* może nie dopuścić do związania (całkowite $U > 0$),
  tj. materia **wypycha cząstkę na zewnątrz**.

  Nie ma jednej recepty na wzór modelujący. Często stosowana postać :

$$\Delta U_{SP}(p) = \frac{2C}{\rho_0} \sum_{i=n,p} \int \frac{g\, d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{f_i(x,\vec{p}\,')}{1 + \left[\frac{\vec{p}-\vec{p}\,'}{\Lambda}\right]^2}$$

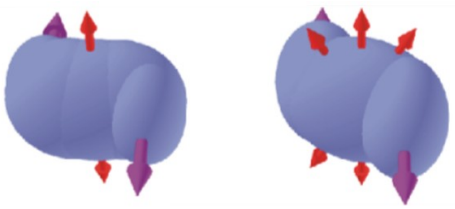
(*C* jest dopasowywane do wyników potencjału, a te pochodzą z porównania danych exp. rozpraszania na jądrze - z modelem optycznym)

Uwagi:
1) efekt na nasz nukleon jest sumą wkładów od sąsiadów.
2) *wzór daje tylko zmianę $\Delta U = f(p)$*

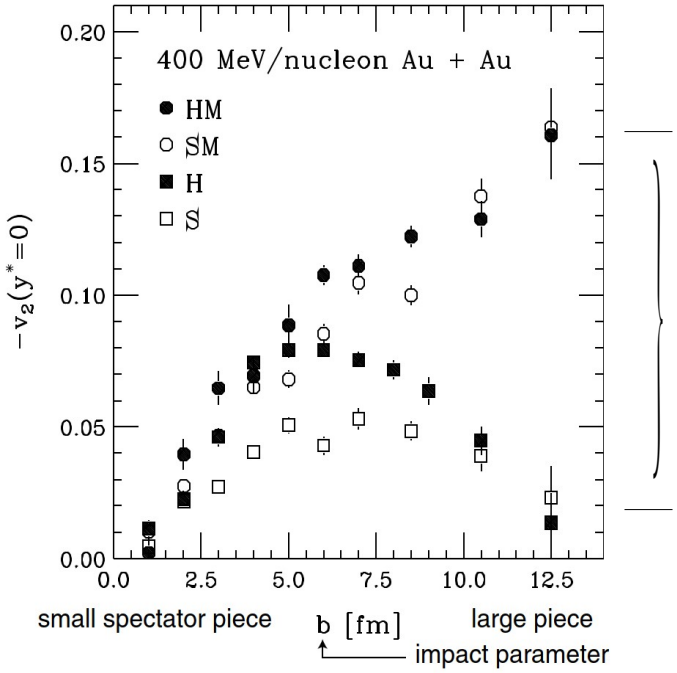
- Szczególnie czuły na $\Delta U_{SP}(p)$ jest:

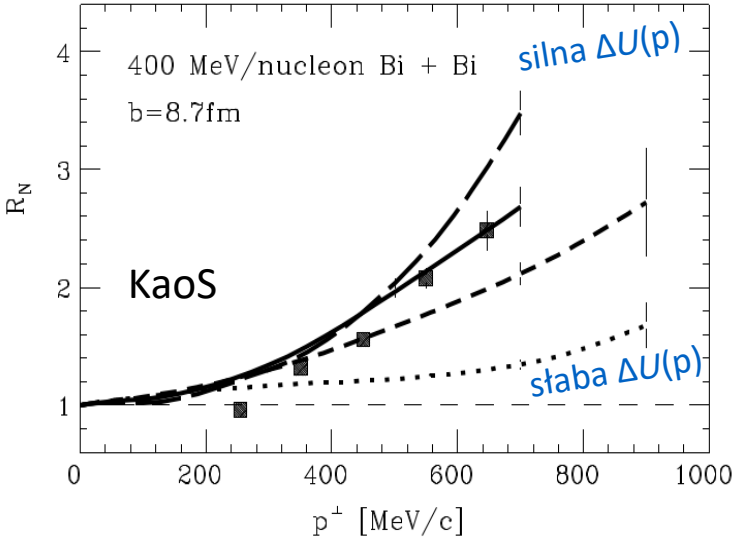
  pływ v_2 protonów w midrapidity dla zderzeń peryferyjnych.

  Szybkie nukleony z midrapidity, lecące w płaszczyźnie reakcji, uderzają w spektatorów (którzy nie zdążyli uciec).
  Te lecące $\perp$ nie napotykają na przeszkodę. To wzmacnia $v_2 < 0$.



model →





- **Próbkowanie doświadczalne efektu.**

  Dane doświadczalne: w formie $R_N = \dfrac{N(90^\circ) + N(270^\circ)}{N(0^\circ) + N(180^\circ)}$

  Krzywe: różne stopnie nasilenia $\Delta U_{SP}(p)$

  Ogólny wniosek: to się daje dopasować.

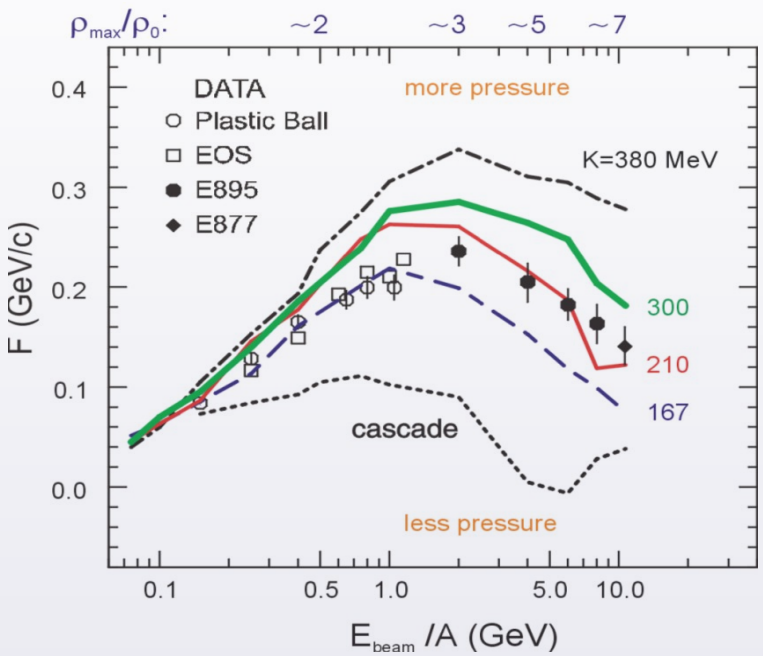
P. Danielewicz, Acta Phys. Pol. B 33, 45 (2002)

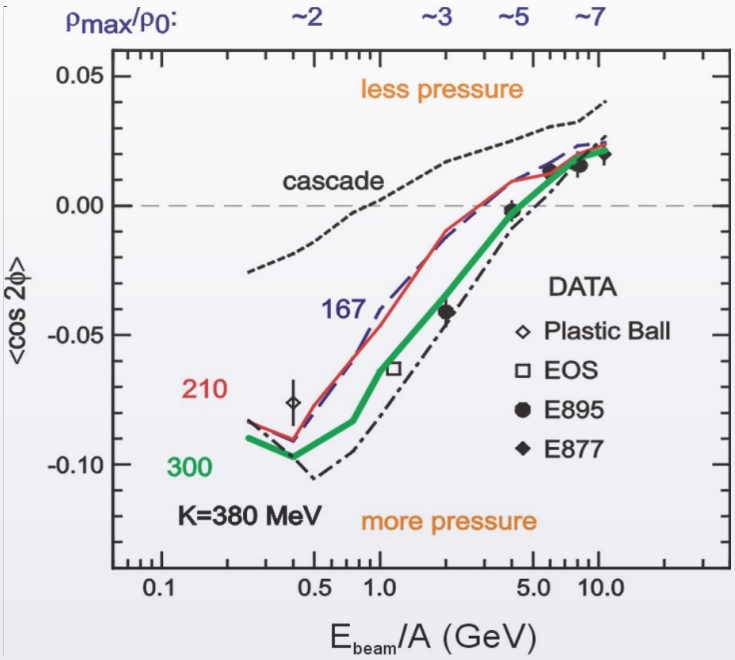
Jak EoS wpływa na obserwable?

- Obserwable opisujące pływ: miejsce spotkania eksperymentu z teorią (w symulacji testujemy daną hipotezę o EoS).
- Przykład: zderzenia Au+Au przy b = 5 .. 7 fm dla różnych energii wiązki: exp vs BUU.

***Pływ boczny* (miara)** $$F = \left.\frac{d\langle p_x/A\rangle}{d\langle y/y_{CM}\rangle}\right|_{y=y_{CM}}$$

Pływ eliptyczny $$v_2 = \langle \cos 2\phi \rangle$$





P. Danielewicz et al., Science 298, 1592 (2002)

- Wnioski: opis pływu bocznego i eliptycznego przy EoS użyty w tej pracy - umiarkowanie opisuje dane doświadczalne.

  Pływ boczny ⇨ $\kappa(\rho_0) \sim$ [165 .. 210] MeV Pływ eliptyczny ⇨ $\kappa \sim$ 300 MeV.

Ciśnienia w materii jądrowej

- Mając oszacowanie EoS, można szacować **ciśnienia**.

Przytoczmy: $$p = -\frac{\partial E}{\partial V}\bigg|_{T=0} = \rho^2 \cdot \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial \rho}\bigg|_{T=0}$$

Górny wykres:

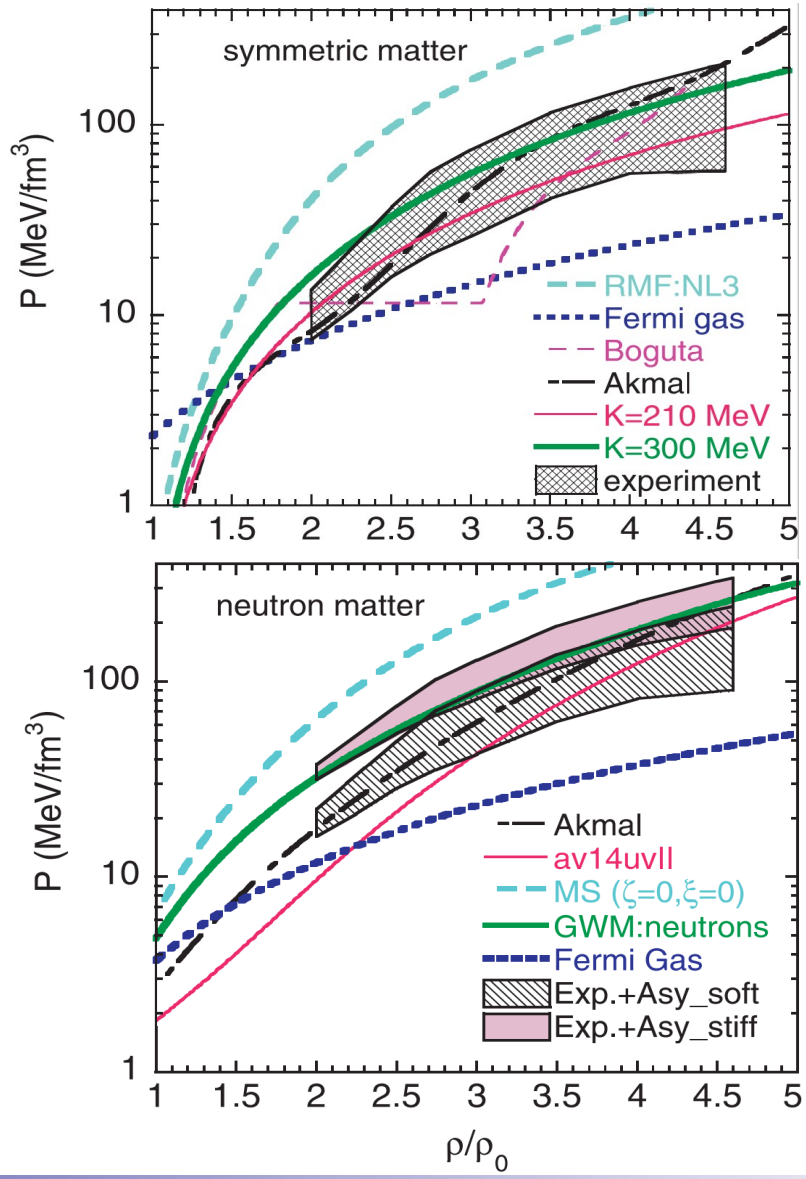
Obszar : porównanie exp. z modelem transportu (symulacją zderzenia dającą rozkłady) Dolne i górne ograniczenie odpowiadają wariantom EoS dla $\kappa(\rho_0)$ = 167 i 380 MeV .

Ciśnienia są rzędu kilkudziesięciu MeV/fm^3
(przy czym 10 MeV/fm^3 = $1.6 \cdot 10^{33}$ Pa)

- W powyższych rozważania zakładano materię symetryczną ($N = Z$)
Dla ^{197}Au nadwyżka neutronów $(N - Z)/A$ = 20% .
Parabole mas pokazują, że energia wiązania jest czuła na asymetrię ($N \neq Z$). Wkrótce rozwiniemy EoS o to zagadnienie.

Tu nadmieńmy, że mając EoS rozwinięty o część asymetryczną można pójść do **materii całkowicie neutronowej** (~**gwiazda neutronowa**) i szacować ciśnienia w niej.

- Dla materii neutronowej ciśnienia wyszły 1 - 3 $\times$ wyższe.
Daje to oszacowania warunków w gwiazdach neutronowych.



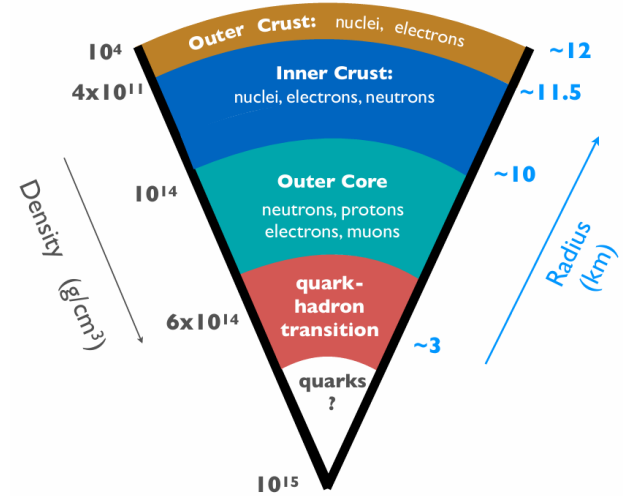
P. Danielewicz et al., Science 298, 1592 (2002)

Związek z gwiazdami neutronowymi

- Wg dzisiejszej wiedzy, **jądro (core) gwiazdy neutronowej (NS)** składa się z materii jądrowej, głównie neutronów. Jeszcze głębiej może zachodzić uwolnienie kwarków (quark deconfinement) .

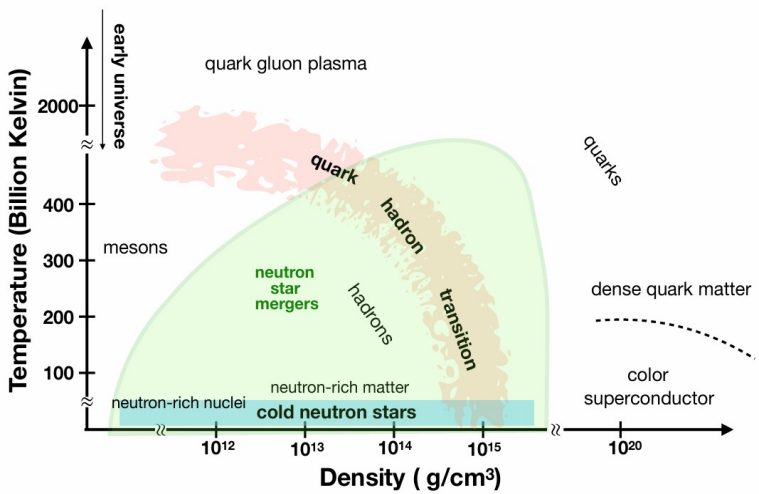
- Silne podobieństwo materii [w jądrach atomowych] i [w jądrze NS] pozwala na zestawianie obu na tym samym diagramie fazowym, por. poniżej.

[Zderzenie gwiazd neutronowych] można zestawiać ze [zderzeniami jąder atomowych]. Przykład takiego zestawienia – to dwie symulacje stopklatek zderzeń, opublikowane w Nature. Wg modeli, osiągane są temperatury ~ kilkudziesięciu MeV.



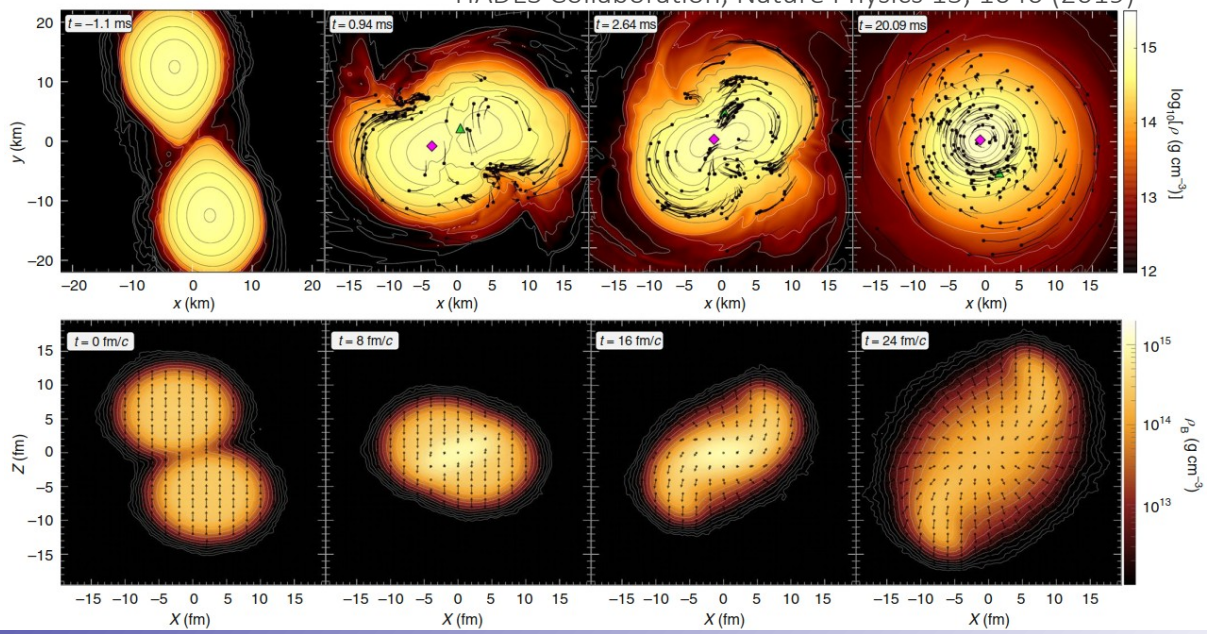
V. Kalogera et al., arXiv: 2111.06990

V. Kalogera et al., arXiv: 2111.06990



(*Temperatura* 10 MeV = $1.2 \cdot 10^{11}$ K
$\rho_0 = 2.7 \cdot 10^{14}$ g/cm³)

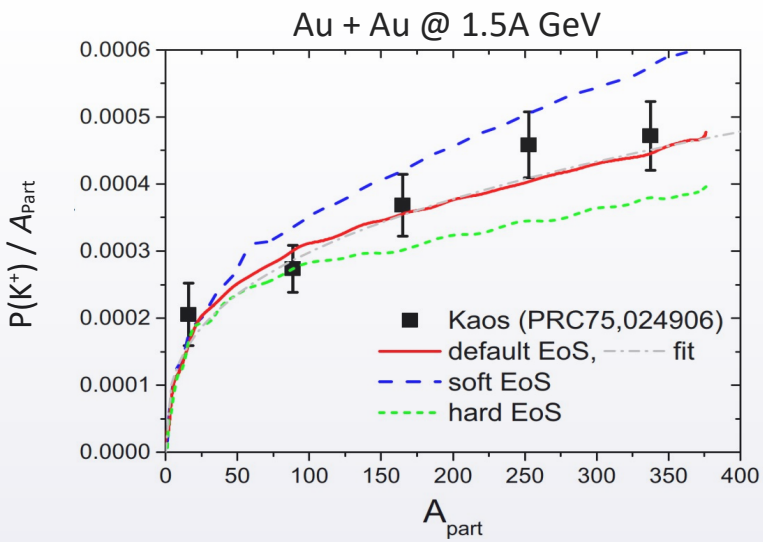
HADES Collaboration, Nature Physics 15, 1040 (2019)



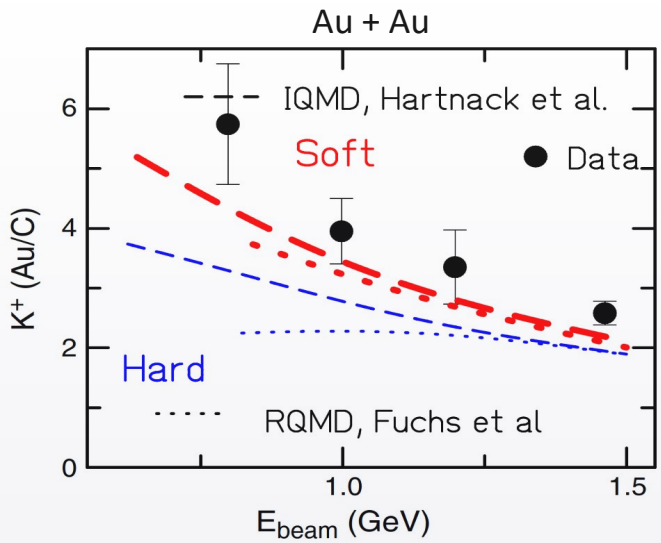
Jak jeszcze EoS wpływa na obserwable?

- **Krotność produkcji K^+** (można skanować w funkcji centralności i energii wiązki)

  Można zderzać jądra większe/mniejsze lub centralne/peryferyjne.
  Krotność K^+ (na zderzenie) dzielimy przez A_{Part}, aby odciąć trywialny efekt wzrostu krotności z objętością strefy zderzenia.



T. Song et al., Phys. Rev. C 103, 044901 (2021)



C. Hartnack et al., Phys. Rep. 510, 119 (2012)

- Porównanie z symulacją w modelu PHSD

  „soft" : κ = 210 MeV
  „default": κ = 300 MeV
  „hard" : κ = 380 MeV

- Obserwujemy stosunek $\left.\frac{N(K^+)}{A_{Part}}\right|_{Au+Au} / \left.\frac{N(K^+)}{A_{Part}}\right|_{C+C}$

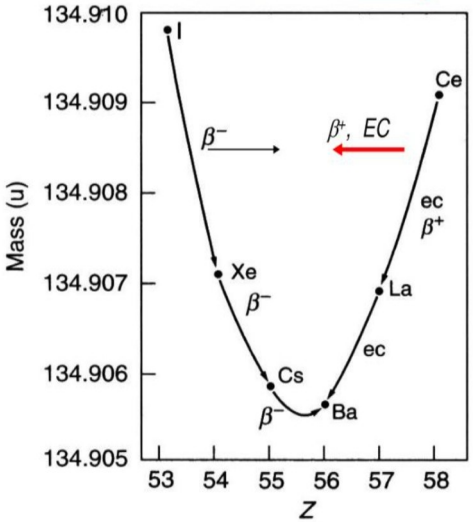
  bo węgiel jest tu referencją („prawie bez ośrodka").

- Warianty: „soft" : κ = 210 MeV
  „hard" : κ = 380 MeV

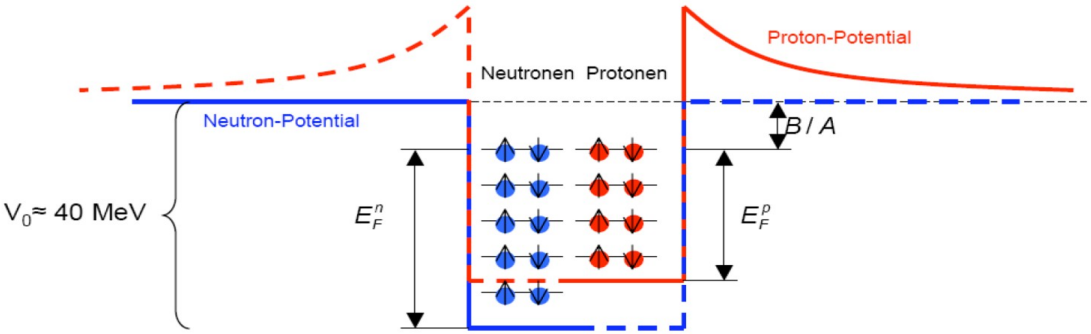
- **Co jest kluczem** do takiego zachowania?

  W pobliżu progu na produkcję K^+, krotność rośnie silniej, niż $\sim A_{Part}^{1.0}$. Tzn dużo ośrodka sprzyja produkcji K^+.
  Jeśli EoS jest „soft", to zderzenie doprowadza do wysokich gęstości. Jeśli „hard" – to ich nie osiąga.

- … ale **materia jądrowa** jest zwykle **niesymetryczna** ($N \neq Z$).
  Zależność energii wiązania od asymetrii widać wyraźnie w warunkach pokojowych:
  parabole mas dla A = const.
  Musimy to uwzględnić. Asymetria wchodzi i do energii kinetycznej, i potencjalnej.



- **Energia kinetyczna**. Powróćmy do modelu Fermiego:



Źródło: R. Krücken

Energia Fermiego (p i n osobno):

$$\epsilon_{F,n} = \frac{p_{F,n}^2}{2m_N} = \frac{(\hbar c)^2}{2m_N c^2}(3\pi\rho_n)^{2/3} \qquad \epsilon_{F,p} = \frac{p_{F,p}^2}{2m_N} = \frac{(\hbar c)^2}{2m_N c^2}(3\pi\rho_p)^{2/3}$$

- **Średnia energia kinetyczna** jądra złożonego „osobno” z neutronów i protonów:

$$\bar{E}_{Kin,J} = N \cdot \frac{3}{5}\epsilon_{F,n} + Z \cdot \frac{3}{5}\epsilon_{F,p} = \frac{3}{5}\frac{(\hbar c)^2 \ (3\pi^2)^{2/3}}{2m_N c^2}\left[N \cdot \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} + Z \cdot \left(\frac{Z}{V}\right)^{2/3}\right] = \frac{3}{5}\frac{(\hbar c)^2 \ (3\pi^2\rho_0)^{2/3}}{2m_N c^2} \cdot A\left[\left(\frac{N}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}\right]$$

$$\left(\rho_0 = \frac{A}{V} \right)$$

Część asymetryczna równania stanu

- **Średnia energia kinetyczna** jądra złożonego „osobno” z neutronów i protonów:

$$\bar{E}_{Kin,J} = \frac{3}{5}\frac{(\hbar c)^2 \left(3\pi^2\rho_0\right)^{2/3}}{2 m_N c^2} \cdot A\left[\left(\frac{N}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3}\right]$$

- Wprowadzamy **współczynnik asymetrii**: $\delta \equiv \frac{N - Z}{A}$ i zapiszmy:

$$1 + \delta = \frac{2N}{A} \qquad \text{oraz} \qquad 1 - \delta = \frac{2Z}{A}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Kin,J} = \frac{3}{5}\frac{(\hbar c)^2 \left(3\pi^2\rho_0\right)^{2/3}}{2 m_N c^2} \cdot \frac{A}{2^{5/3}}\left[1 + \frac{5}{3}\delta + \frac{5}{9}\delta^2 + \ldots + 1 - \frac{5}{3}\delta + \frac{5}{9}\delta^2 + \ldots\right] = A \cdot \frac{3}{5}\epsilon_F \cdot \left[1 + \frac{5}{9}\delta^2 + \ldots\right]$$

- **Energia na nukleon** (część kinetyczna) :

$$\bar{\epsilon}_{Kin} = \frac{E_{Kin}}{A} = \frac{3}{5}\epsilon_F \cdot \left[1 + \frac{5}{9}\delta^2 + \ldots\right]$$

... parabola ☺

- Definiuje się też „**energię symetrii**” ***S***: różnica w *E/A* między materią neutronową ($\delta = 1$) a symetryczną ($\delta = 0$) .

  ⇒ Wkład kinetyczny do energii symetrii: $S_{Kin} = \frac{1}{3}\epsilon_F$

  Ale pamiętamy, że ϵ_F zależy od gęstości: ⇒ $S_{Kin} = \epsilon_F(\rho_0) \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}$

  Dla gęstości normalnej: $S_{Kin}(\rho_0) = 12.3\ \text{MeV}$

Część asymetryczna równania stanu

- Przejdźmy do **potencjału**. Rozważmy rozszerzenie rodziny potencjałów **jednocząstkowych** o człon asymetryczny:

$$U_{SP,\,p/n} = U_{Pot,N} + U_{Pot,\,Sym} = A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma} + 2S_{Pot}\frac{\rho_P - \rho_N}{\rho_0}\cdot\tau_{p/n}$$

, gdzie $\tau_p = +1$, $\tau_n = -1$

Wyznaczmy wpierw **gęstość energii potencjalnej**, $u\,(\rho_p\,,\,\rho_n)$, traktując dwie gęstości jako niezależne zmienne:

$$\left.\begin{aligned} u &= \int U_{SP}\,d\rho_p = \int U_{Pot,N}\,\rho_p + 2S_{Pot}\left(\frac{\rho_p^2}{2\rho_0} - \frac{\rho_n\rho_p}{\rho_0}\right) + const\left(\rho_n\right) \\ u &= \int U_{SP}\,d\rho_n = \int U_{Pot,N}\,\rho_n - 2S_{Pot}\left(\frac{\rho_p\rho_n}{\rho_0} - \frac{\rho_n^2}{2\rho_0}\right) + const\left(\rho_p\right) \end{aligned}\right\} \quad u = \int U_{Pot,N}\,d\rho + S_{Pot}\frac{\left(\rho_p - \rho_n\right)^2}{\rho_0}$$

➡ Czyli **średnia energia potencjalna na nukleon $\bar{u}$** :

$$\bar{u} = \bar{u}_{Pot,N} + S_{Pot}\frac{\left(\rho_p - \rho_n\right)^2}{\rho_0\rho} = \bar{u}_{Pot,N} + S_{Pot}\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\delta^2$$

... też parabola ☺

- Definiowaliśmy jeszcze **energię symetrii S**:
różnica $\bar{\epsilon}$ między materią neutronową ($\delta = 1$) a symetryczną ($\delta = 0$) :

$$S(\rho) = \frac{1}{3}\epsilon_F(\rho_0)\cdot\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} + S_{Pot}\cdot\frac{\rho}{\rho_0}$$

W warunkach pokojowych dostajemy:

$$S(\rho_0) = \frac{1}{3}\epsilon_F(\rho_0) + S_{Pot} = 12.3\,\mathrm{MeV} + S_{Pot}$$

Część asymetryczna równania stanu

- Reasumując: **pełne równanie stanu materii asymetrycznej** (w tym modelu) :

$$\bar{\epsilon} = mc^2 + \underbrace{\frac{3}{5}\epsilon_F(\rho_0)\cdot\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}}_{\text{część symetryczna: } \epsilon_{Kin} \text{ oraz } u_{Pot}} + \underbrace{\frac{A}{2}\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{B}{\sigma+1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma}}_{} + \underbrace{\frac{1}{3}\epsilon_F(\rho_0)\cdot\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3}\delta^2}_{\text{część asymetryczna: } \epsilon_{Kin} \text{ oraz } u_{Pot}} + \underbrace{S_{Pot}\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\delta^2}_{}$$

, dla potencjału o postaci :

$$U_{SP,\,p/n} = U_{Pot,\,N} + U_{Pot,\,Sym} = A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\sigma} + 2S_{Pot}\frac{\rho_P - \rho_N}{\rho_0}\cdot\tau_{p/n}$$

gdzie współczynnik asymetrii materii jądrowej:

$$\delta \equiv \frac{N - Z}{A}$$

Część asymetryczna równania stanu – eksperyment

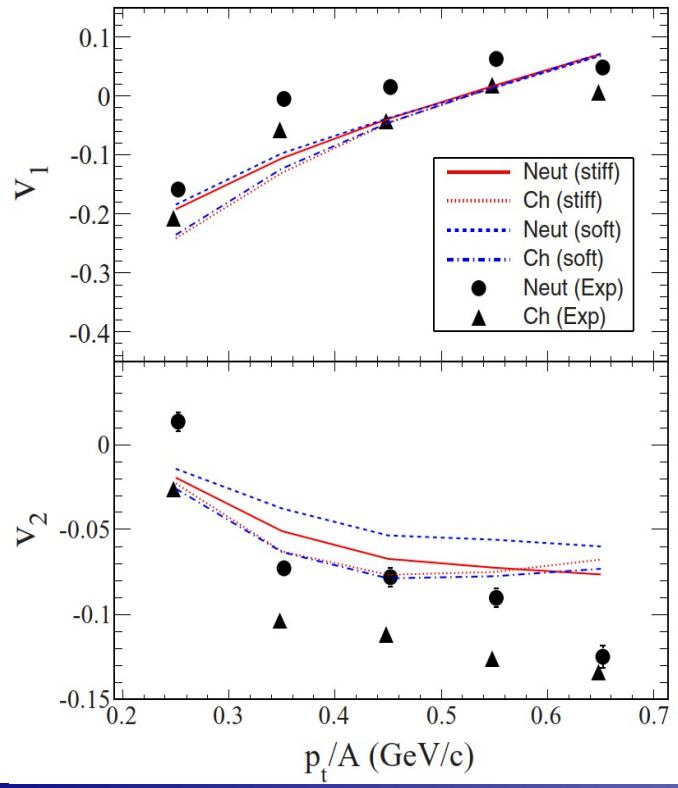
- Aby szukać asymetryczną część EoS, śledzi się głównie **różnice pomiędzy pływem neutronów i protonów**. Dane są ubogie, gdyż pomiar neutronów jest trudny.
- Niedawne wyniki: semicentralne zderzenia Au+Au @ 400A MeV (grupa **ASY-EOS**). *Uwaga*: **dla Au, $\delta = 0.2$** (sporo)

Porównane exp z UrQMD, gdzie wpisano potencjał U_{SP} zgodny z:

$$S(\rho) = 12\ \mathrm{MeV} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} + 22\ \mathrm{MeV} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \qquad \gamma \in \{0.5\ ,\ 1.5\}$$

SOFT STIFF

P. Russotto et al. (ASY-EOS) Phys. Rev. C 94, 034608 (2016)



- Przebiegi eksperymentalne v_1 i v_2 są nieco inne dla protonów i dla neutronów.
- Dodanie członu symetrii do U_{SP} różnicuje przebieg v_1 i v_2 pomiędzy neutronami a protonami w kierunku zgodnym z eksperymentem.
- Jednak obliczenia nie wyjaśniają całkowicie danych. (UrQMD jest znany zaniżania pływów przy średnich i niskich energiach wiązek).

Część asymetryczna równania stanu

- Teorie proponują różne postacie $S(\rho)$ w EoS.
  M.in. parametrów jest często więcej, niż tylko S_{Pot}.

  $S(\rho)$ można wydobywać, porównując teorię z eksperymentem w szeregu różnych efektów (m.in. pływy).

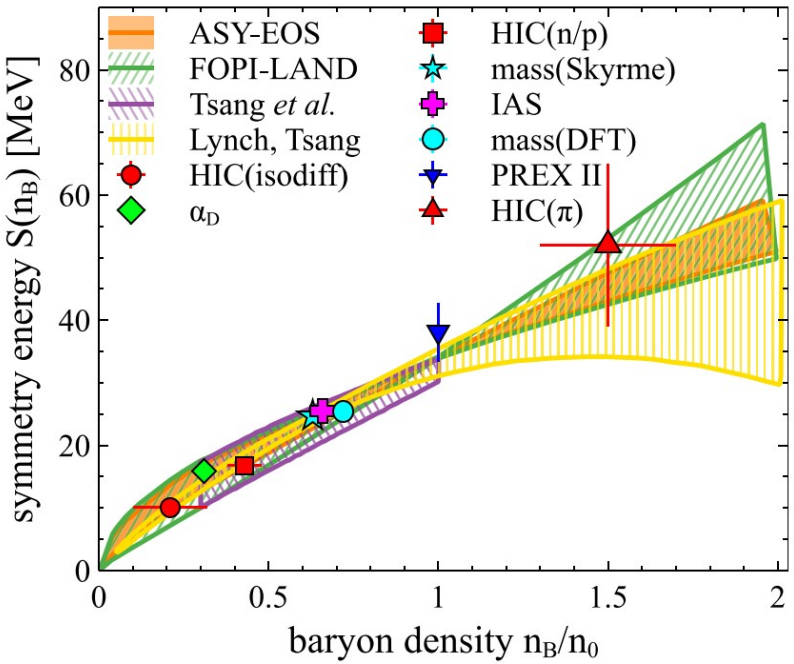
  Typowo **$S(\rho_0)$** wychodzi **ok. 30 MeV**.

  Nie jest to równe parametrowi asymetrii w LDM,
  (wzór na E wiązania poniżej; parametr $a_A \approx 23$ MeV)

$$E_B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \delta(A,Z)$$

  Głównym powodem jest, że średnia koncentracja w jądrze jest $< \rho_0$ (z powodu zaniku gęstości przy brzegu jądra) .

A. Sorensen et al, Prog. Part. Nucl. Phys, 134, 104080 (2024)



- **W modelach transportu** (symulacjach zderzeń AA) ustawia się **potencjał U_{SP}** (steruje hadronem w materii).

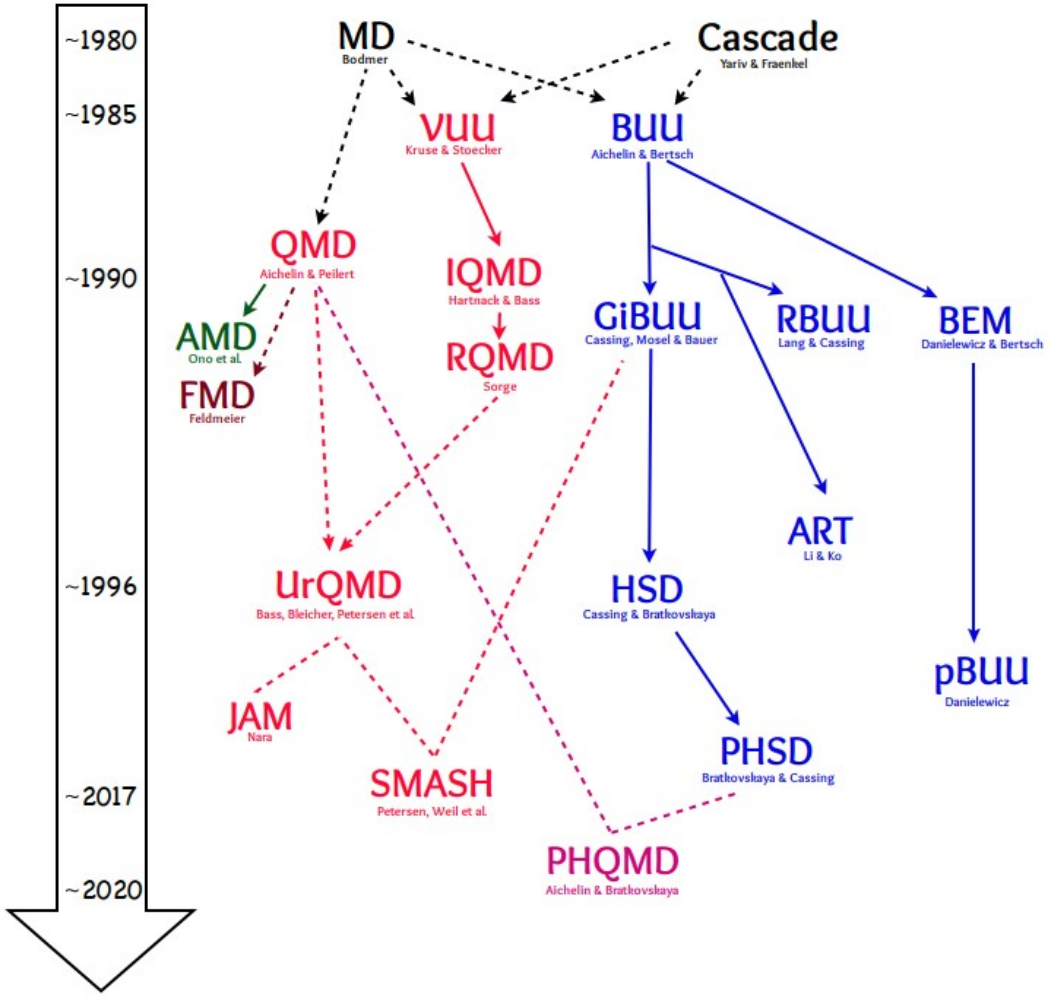
  Np. w GiBUU czy SMASH, autorzy sugerują poniższe wartości:

  GiBUU : S_{Pot} = 15 MeV $\Rightarrow$ $S(\rho_0)$ = 27.3 MeV
  SMASH : S_{Pot} = 18 MeV $\Rightarrow$ $S(\rho_0)$ = 30.3 MeV

Modelowanie zderzeń jądrowych

- Równanie BUU
  - ruch w potencjale + zderzenia
- Podejście QMD
- Obszar hadronowy a kwarkowo-gluonowy
- Zestawienie istotnych cech modeli transportu
- Testowanie modeli transportu

Chronologia modeli transportu

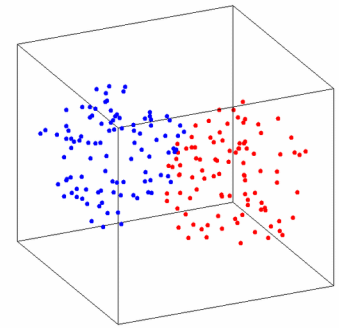


Od pierwszych prób modelowania zderzeń (~ 1980) różne grupy teoretyków rozwinęły wiele modeli. Dają się jednak wyróżnić dwie gałęzie: podejście **BUU** i podejście **QMD** . Opiszemy je oba.

- Równanie transportu **B**olzmanna – **Ü**hlinga – **U**hlenbecka. Przykładowe wprowadzenia:

```
B.Serot, J.Walecka, arXiv:nucl/th/9701058 rozdział 7A
C.Hartnack et al., Eur. Phys. J. A 1, 151 (1998)
```

- Zarys (*uproszczony*). rozważmy *N* cząstek poruszających się w przestrzeni fazowej.
Ich rozkład opisuje funkcja $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Cząstki są **w polu opisanym potencjałem *U*** (średnie pole; cecha BUU).



$$N = \int d^3\boldsymbol{r} \int d^3\boldsymbol{p}\ f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)$$

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial r_i} d r_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} d p_i$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_r f \cdot \boldsymbol{v} - \nabla_p f \cdot \nabla_r U$$

$$\frac{\partial f}{\partial r_i} d r_i = (\nabla_r f) \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$$

$$d\boldsymbol{p} = -\nabla_r U\, dt$$

- Potencjał *U* średniego pola:

$$U = U(\rho) + U_{Coulomb} + U(\vec{p})$$

$$U(\rho) = \alpha \frac{\rho}{\rho_0} + \beta \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

(*równanie stanu materii jądrowej, typowa parametryzacja*)

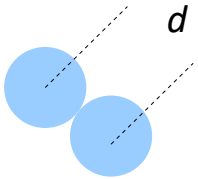
$$U(\vec{p}) = \delta \frac{8}{\rho_0 (2\pi)^3} \int d^3 p' \frac{f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}')}{1 + \left(\frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'}{\Lambda}\right)^2}$$

(*Człon potencjału zależny od pędu, przykładowa parametryzacja*)

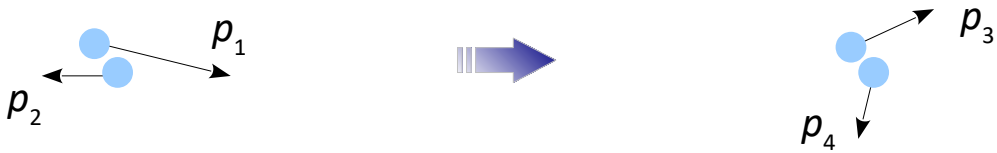
- Gdyby *N = const*, to byłoby: $\frac{df}{dt} = 0$

- … ale są jeszcze **zderzenia**. Rozważmy proces dwuciałowy (1,2) → (3,4).
  Prawdopodobieństwo zderzenia opisuje przekrój czynny σ (lub $d\sigma/d\Omega$) .
  Do zderzenia dochodzi, gdy:

$$d < \sqrt{\frac{\sigma_{NN}}{\pi}}$$



- Zderzenie generuje jednostkową stratę w komórce pędów p_1 i p_2 na rzecz p_3 i p_4.



- Ale trzeba uwzględnić zakaz Pauliego (pędy p_3 i p_4 nie zawsze są dostępne).
  Uwzględnia się to probabilistycznie:

f (**r**,**p**,t)	to zarazem prawdopodobieństwo obsadzenia pędu p.
$1 - f$(**r**,**p**,t)	to prawdopodobieństwo, że komórka pędu p jest wolna.

→ Dodatkowy człon w równaniu BUU, opisujący zderzenia: $\frac{df}{dt} = I_{coll}$

$$I_{coll} = \sum_{\substack{kanały\\reakcji}} \int \frac{d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4}{(2\pi)^6} \frac{d\sigma_{12\to 34}}{d\Omega'} \cdot \Big[\underbrace{(1-f_1)(1-f_2)f_3 f_4}_{\text{Zyski}} - \underbrace{f_1 f_2 (1-f_3)(1-f_4)}_{\text{Straty}}\Big] \cdot \underbrace{\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)}_{\text{Zasada zachowania pędu}}$$

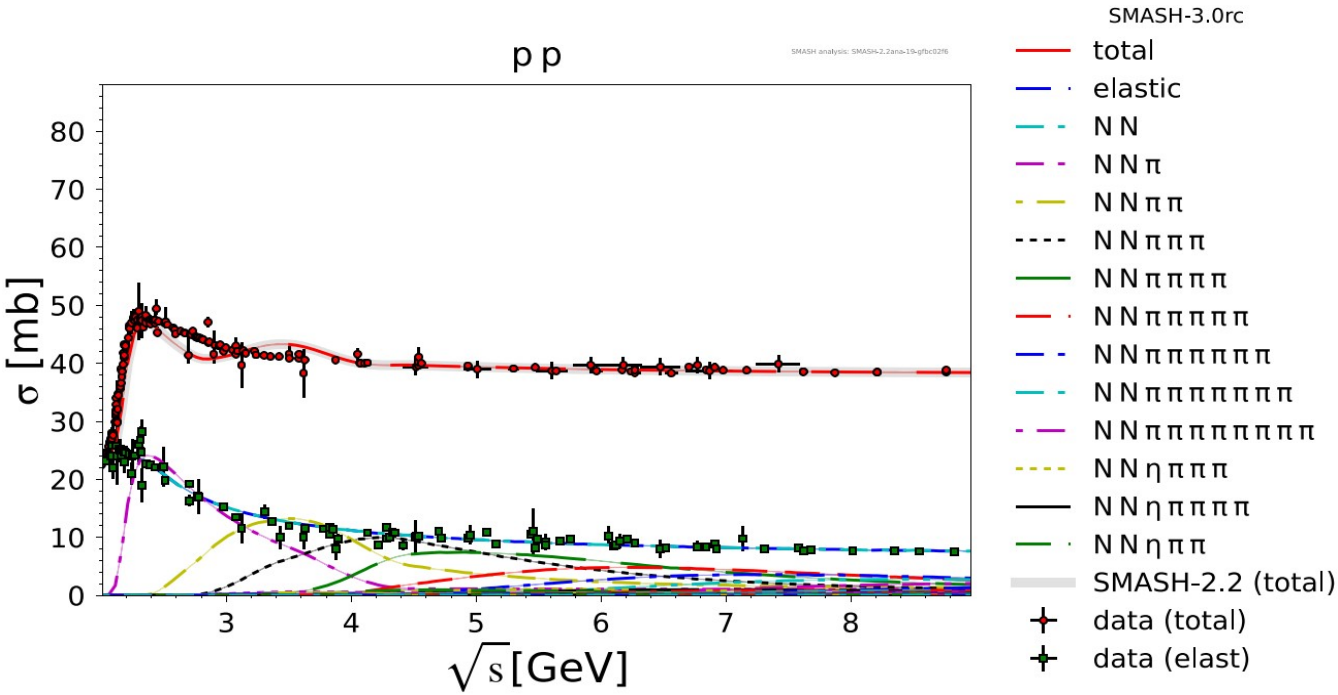
- Równanie **BUU** (Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck) w skrócie:

$$\frac{df}{dt} = I_{coll}$$

- **Produkcja nowych cząstek** zachodzi również w formie zderzeń.
  Każdy model transportu ma wpisany zestaw kanałów reakcji. Dla kanału, ma wpisaną parametryzację σ = f(energia) .
  Są to zwykle dopasowania do zmierzonych danych. Niektóre kanały (np. produkcja p/ fragmentację strun) opisuje algorytm.

- Niektóre kanały są doświadczalnie (prawie) niemożliwe do wyizolowania (np. $N\Delta \rightarrow X$: nie istnieją stacjonarne Δ) .
  Stosuje się szereg argumentów fizycznych: zasada równowagi szczegółowej, symetria izospinowa, bilans prod. dziwności itd.

- **Flagowe publikacje modeli transportu** listują wpisane kanały, ukazując wykresy na σ = f(energia) i użyte formuły.
  Ciekawie ukazane jest to w modelu SMASH, poprzez kolekcję w sieci użytych wykresów σ [**tu**].
  Można zobaczyć, jak w SMASHu poszczególne kanały produkcji sumują się do całości.



Modele transportu oparte o BUU: działanie

- W każdym zderzeniu przygotowuje się rozkład $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ *w stanie początkowym*:

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \sum_{i=1}^{A_{pocisk}+A_{tarcza}} \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\ \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_i)$$

- **Inicjalizacja położeń**

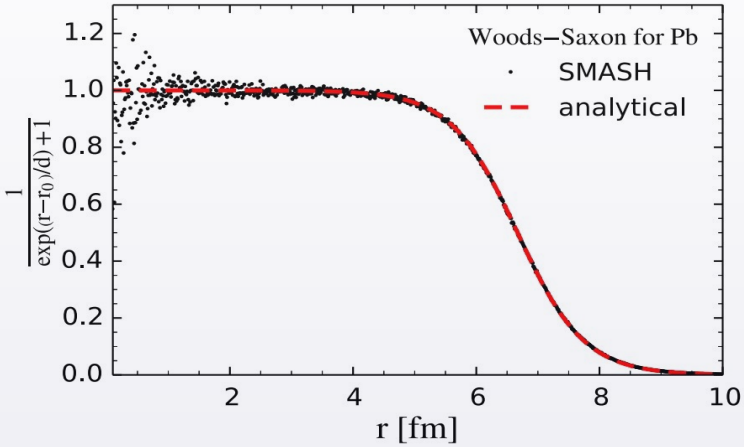
Bazowo: rozkład **Woodsa-Saxona** z parametrami uzyskanymi z badań exp. rozpraszania (np. elektronów) na jądrze.

$$\frac{d^3N}{dr^3} = \frac{\rho_0}{\exp\left(\frac{r-r_0}{d}\right) + 1}$$

TABLE I. This table summarizes the specific parameters used in the Woods–Saxon initialization for some nuclei.

Nucleus	A	r_0 [fm]	d [fm]
U	238	6.86	0.556
Pb	208	6.67	0.54
Au	197	6.38	0.535
Cu	63	4.20641	0.597

J. Weil et al., Phys. Rev. C 94, 054905 (2016)



- **Inicjalizacja pędów**

Typowo: dla nukleonów w odległości r od środka, p losowane z jednorodnej sfery, tj: $p \in [0, p_{Fermi}(r)]$

$$p_{Fermi}(\vec{r}) = \hbar \left[\frac{3}{2}\pi^2 \rho(\vec{r}) \right]^{1/3}$$

Typowo, w środku jądra pęd Fermiego $\approx$ 270 MeV/c .

Modele transportu oparte o BUU: działanie

- Ruchem danej cząstki steruje *hamiltonian 1-ciałowy* :

  Jeśli potencjał nierelatywistyczny: $H = \sqrt{p^2 + m^2} + U$

  Jeśli potencjał relatywistyczny: $E = \sqrt{\left(\vec{p} - \vec{V}_V\right)^2 + \left(m - U_S\right)^2} + V_0$

- *W kolejnych krokach czasowych* (n) położenie i pęd i-tej cząstki ewoluuje zgodnie z: (wariant nierelat.)

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}}_i = \nabla_{\boldsymbol{p}_i} H \\ \dot{\boldsymbol{p}}_i = -\nabla_{\boldsymbol{r}_i} H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{r}_i(n+1) = \boldsymbol{r}_i(n) + \dfrac{\boldsymbol{p}_i\left(n+\frac{1}{2}\right)}{m} \cdot \Delta t + \nabla_{p_i} U_i \cdot \Delta t \\ \boldsymbol{p}_i\left(n+\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{p}_i\left(n-\frac{1}{2}\right) - \nabla_{\boldsymbol{r}_i} U_i(n) \cdot \Delta t \end{cases}$$

$\oplus$ zderzenia: jeśli $d < d_{\min}$ i brak zakazu Pauliego $\rightarrow$ to $\delta(p_1)$ i $\delta(p_2)$ przechodzą w $\delta(p_3)$ i $\delta(p_4)$

- <u>Uwaga</u>: W BUU jedyne oddziaływanie typu potencjałowego (ciągłe) – to średnie pole.
  Brak potencjałowego oddziaływania nukleon–nukleon (oprócz zderzeń).

  $\Rightarrow$ BUU zwykle nic nie wie o łączeniu się sąsiednich nukleonów w *LCP* (d, t, ^{3}He, …).

- W modelach **QMD** obiektami są pakiety falowe nukleonów:

np. C.Hartnack et al.
Eur. Phys. J. A 1, 151 (1998)
arxiv.org/abs/nucl-th/9811015

$$\Psi = \prod_i \psi_i \sim \prod_i \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{r}_i(t))^2}{L}\right] \cdot \exp\left[i\,\boldsymbol{x}_i\,\boldsymbol{p}_i(t)\right]$$

Parametr L opisuje rozmiar paczki. Wyznacza się go tak, by Ψ opisywała zanik gęstości na brzegu jądra.

- Cząstka 'i' porusza się w potencjale $\oplus$ się zderza.

Potencjał budowany jest jednak z sumy potencjałów od cząstek 'j' otaczających cząstkę 'i'.

Hamiltonian kwantowy:

$$\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \sum_i T_i + \sum_i \sum_{j>i} \int \psi_i^* \psi_j^* \; V^{ij}(x_1, x_2) \; \psi_i \psi_j \; dx_1 dx_2$$

Równania ruchu:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}}_i = \dfrac{\boldsymbol{p}_i}{m} + \nabla_{\boldsymbol{p}_i} \sum_j \langle V_{ij} \rangle \\ \dot{\boldsymbol{p}}_i = -\nabla_{\boldsymbol{r}_i} \sum_{j \neq i} \langle V_{ij} \rangle \end{cases}$$

(numerycznie śledzi się centroidy paczek falowych)

- **Oddziaływania N_i–N_j :**

$$V_{ij} = V_{ij}^{Skyrme} + V_{ij}^{Yukawa} + V_{ij}^{pędowe} + V_{ij}^{Coulomb} + V_{ij}^{Asymetrii\ pn}$$

$$= \left[t_1 + t_2\, \rho^{\gamma-1}(\boldsymbol{x}_i)\right] \cdot \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) + t_3 \frac{\exp\left\{-|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|/\mu\right\}}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|/\mu} +$$

$$+ t_4 \ln^2\left(1 + t_5 (\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j)^2\right) \cdot \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) + \frac{Z_i Z_j e^2}{\{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\}} + t_6 \frac{1}{\rho_0} T_i^3 T_j^3 \cdot \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$$

- Z *referatu* Ch. Hartnacka i J. Aichelena (2015), autorów **IQMD**:

Definition of the potentials

$$
\begin{aligned}
V^{ij} &= G^{ij} + V^{ij}_{\mathrm{Coul}} \\
&= V^{ij}_{\mathrm{Skyrme}} + V^{ij}_{\mathrm{Yuk}} + V^{ij}_{\mathrm{mdi}} + V^{ij}_{\mathrm{Coul}} + V^{ij}_{sym} \\
&= t_1\delta(\vec{x}_i - \vec{x}_j) + t_2\delta(\vec{x}_i - \vec{x}_j)\rho^{\gamma-1}(\vec{x}_i) + t_3\frac{\exp\{-|\vec{x}_i - \vec{x}_j|/\mu\}}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|/\mu} + \\
& t_4\ln^2(1 + t_5(\vec{p}_i - \vec{p}_j)^2)\delta(\vec{x}_i - \vec{x}_j) + \frac{Z_iZ_je^2}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \\
& t_6\frac{1}{\varrho_0}T_3^iT_3^j\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)
\end{aligned}
$$

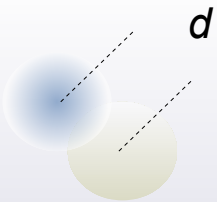
Bethe Weizsaecker –mass formula:

Volume term **+Surface term** **+Coulomb term** **+symmetry term**

(nucl. eos) **(+pairing term not included)** **(asy- eos)**

- **Zderzenie**. Zachodzi, gdy środki pakietów 2 nukleonów zbliżą się bardziej niż:

$$d < \sqrt{\frac{\sigma_{NN}}{\pi}}$$



Zakaz Pauliego uwzględniany.

- Wybierając komponenty V_{ij} : $V^{Skyrme} + V^{Yukawa} + V^{Pędowe}$, można poprzez odcałkowanie po rozkładzie koncentracji „odtworzyć” dane parametry U_{SP}, a więc odtworzyć dane równanie stanu materii jądrowej.

$$U(\rho) = \alpha \frac{\rho_{int}}{\rho_0} + \beta \left(\frac{\rho_{int}}{\rho_0}\right)^{\gamma} + U^{Pędowe}$$

$$U^{Pędowe} = \delta \cdot \ln^2\left(\epsilon \cdot (\Delta p)^2 + 1\right)$$

Δp : pęd cząstki względem $\langle p \rangle$ ośrodka

Można tak dobrać parametry V_{ij} ,
aby symulacja opisywała dane równanie stanu,
(w tym „wytworzyć” scenariusze hard/soft)

	α (MeV)	β (MeV)	γ	δ (MeV)
S	-356	303	1.17	—
SM	-390	320	1.14	1.57
H	-124	71	2.00	—
HM	-130	59	2.09	1.57

- Wariant **Isospin-QMD** (**IQMD**) :
  - Osobne traktowanie n, p, Δ, π
  - Możliwe oddziaływanie proton-neutron
  - Można opisać asymetryczną (n ≠ p) część energii wiązania

IQMD dostarcza ram do opisu łączenia nukleonów w LCP (klastry).

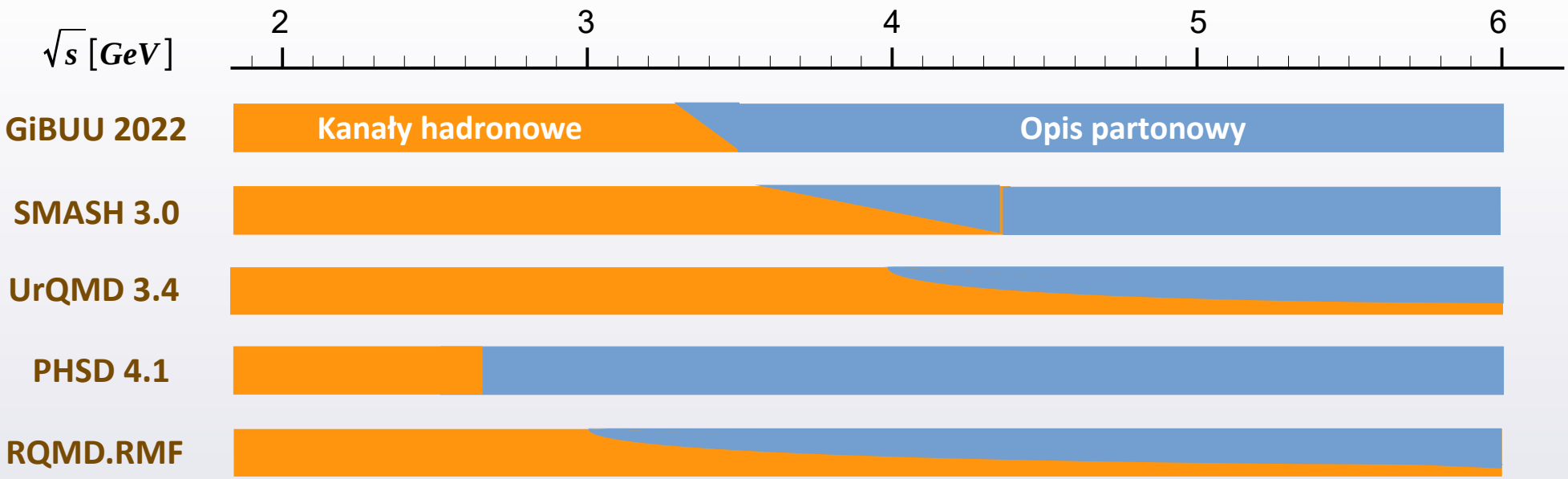
Modele transportu: granica stosowalności podejścia hadronowego

- Z uwagi na skracanie się $\lambda_{\text{de Broglie}}$ z *E* wiązki, zwiększając energię – z **obszaru hadronowego** przechodzimy do **obszaru kwarków i gluonów** (QG). Modele transportu starają się opisywać obie te dynamiki.

  Niektóre modele proponują całościowo dodanie wstępnego etapu zderzenia jako fazy QGP, przechodząc do **opisu hydronamicznego**, po którym następuje **hadronizacja** (płyn QG $\rightarrow$ gaz hadronów) .

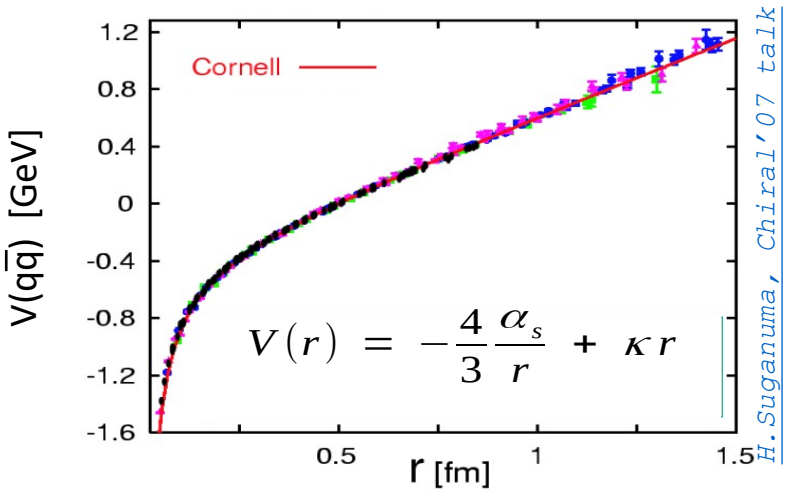
  Zarazem większość modeli już na etapie hadronowym włącza uwzględnianie stopni swobody QG, gdy w indywidualnym zderzeniu hadron-hadron, $\sqrt{s}$ przekroczy wartość progową.

- W kanałach barion-barion (BB):



- Opis kanałów QG: tzw. „struny”. Między 2 kwarkami powstaje odcinek („struna”) z jednorodnym rozkładem energii. Struna zostaje rozkawałkowana na porcje, z których powstają się hadrony.

- **Potencjał QCD** :
  Przyciągające oddziaływanie silne między q a $\bar{q}$.

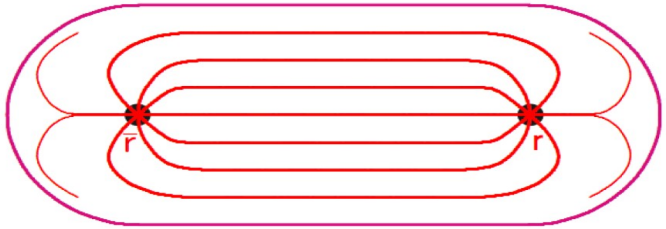


- W modelowaniu zderzeń, struny powstają w kontekście pojedynczego zderzenia hadron-hadron, gdy $\sqrt{s}$ przekracza pewien próg (kilka GeV). Ale gdzie i jak?

▷ Zawsze pomiędzy daną parą kwarków. Dwie opcje:

⊙ **Wymiana pędów**:
dwa kwarki zderzają się i wymieniają pęd. Tworzy to wydłużenie w każdym hadronie (a więc strunę).

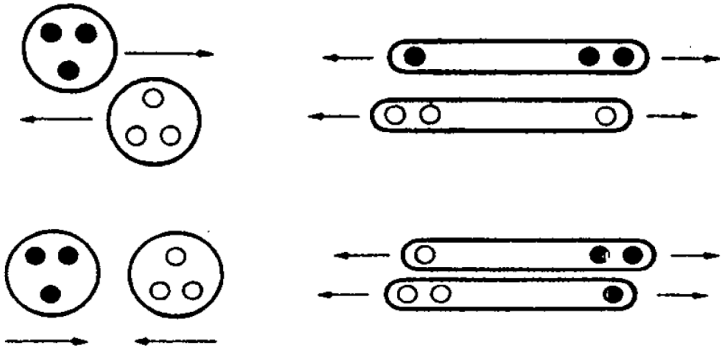
⊙ **Wymiana koloru**:
Jeden kwark z h_1 łączy się z 2 kwarkami z h_2 (1. struna).
Reszta oddziaływuje też tak (2. struna).



Linie pola kolorowego (QCD) są ściśnięte do rurek (inaczej, niż linie pola EM).

Przestrzeń pomiędzy dwoma kwarkami mieści energię z (w przybliżeniu) płaskim rozkładem gęstości.

Obiekt w tym modelu – cienka rurka łącząca kwarki z liniowym rozkładem *E* – nazywany jest "**struną**".



H.Schmidt, J.Schukraft, J.Phys.G 19, 1705 (1993)

T.Sjöstrand, Pythia talk

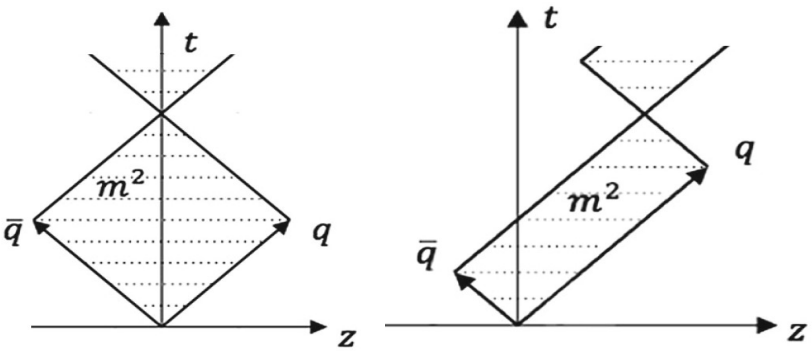
- **Model strunowy LUND**
  [B. Andersson et al, Phys. Rep. 97, 31 (1983)]

Rozważmy parę kwarków q i $\bar{q}$, dla uproszczenia – bezmasowych i poruszających się tylko w kierunku Z.

Jaki jest ich ruch? (= Jak ewoluuje struna?)

Hamiltonian: $H = |p_1| + |p_2| + \kappa|x_1 - x_2|$

W układzie CM **W układzie Lab**

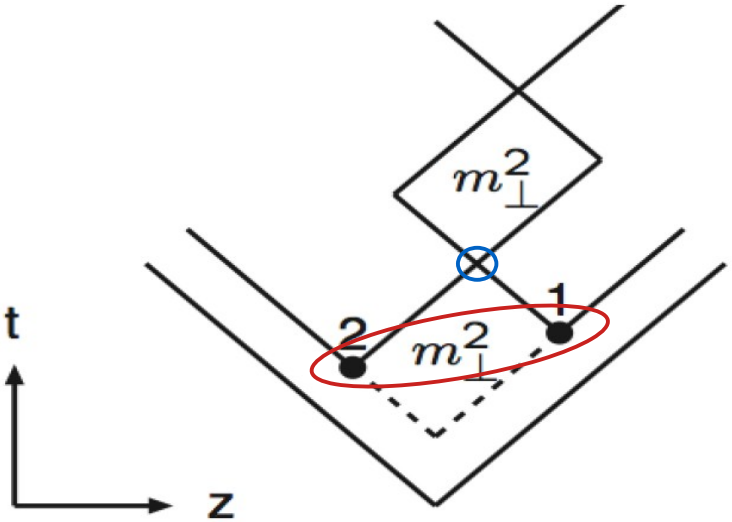


- W pewnym momencie staje się energetycznie korzystne, aby zerwać strunę ("**fragmentacja struny**") , zebrać energię z odcinka dookoła punktu zerwania i utworzyć z niej nową parę $q\bar{q}$.

Wykres ukazuje dwa takie **werteksy utworzenia par (1, 2)**. Ale partnerzy pary oddalają się od siebie.

Jednakże, prawy kwark z werteksu "2" łączy się z lewym kwarkiem z werteksu "1" . W ten sposób powstaje nowy hadron (**hadronizacja**). (Czas potrzebny do uformowania hadronu jest nie do końca jasny).

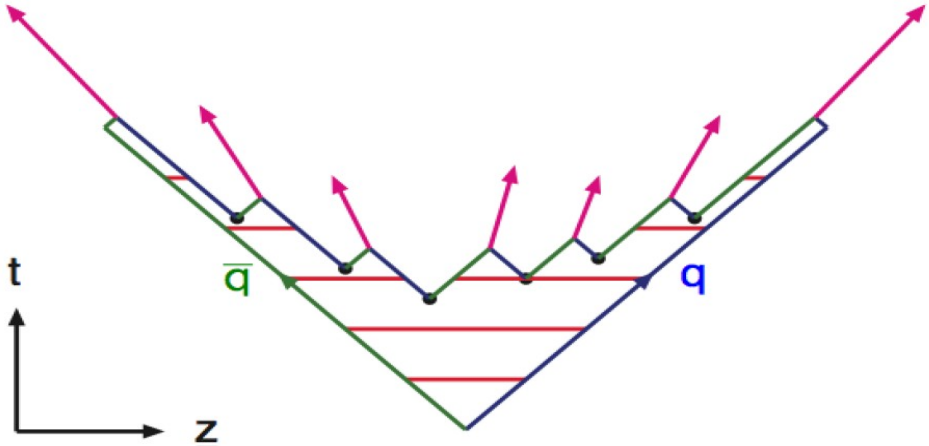
W modelach zakłada się, że właśnie **pierwsze przecięcie** jest punktem powstania nowego hadronu.



T.Sjöstrand, Pythia talk

Obszar soft QCD ("struny")

- Obraz ogólny: wiele hadronów utworzonych z fragmentującej się struny. *T.Sjöstrand, Pythia talk*



- Kwantowo-mechanicznie utworzenie pary rozpatrywane jest jako tunelowanie przez dziurę po przerwanej strunie. Idea jest również rozciągnięta na kwarki masywne. Wyprowadza się **prawdopodobieństwo powstania danego kwarku** :

$$P_q \sim \exp\left(-\frac{\pi m_{\perp q}^2}{\kappa}\right) = \exp\left(-\frac{\pi p_{\perp q}^2}{\kappa}\right) \exp\left(-\frac{\pi m_q^2}{\kappa}\right)$$

  - ▷ Szansa utworzenia par kwarków o danych zapachach wychodzi w proporcji: **$u\bar{u} : s\bar{s} : c\bar{c} \approx 1 : 0.3 : 10^{-11}$**
  - ▷ Rozkład p_T dla każdego kwarku wychodzi gaussowski – i taki sam dla każdego zapachu kwarku

- Przy formowaniu nowego hadronu z pary kwarków, wartość p_T hadronu jest sumą p_T jego składników.

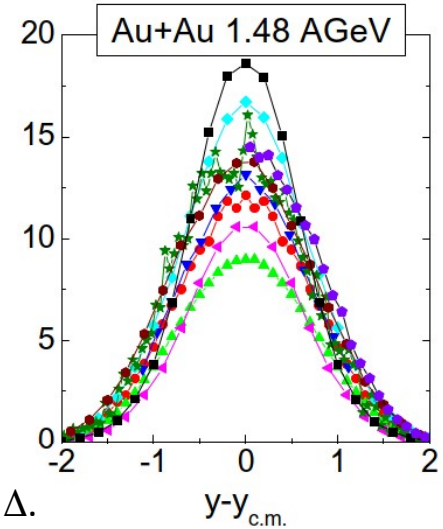
- Rozpowszechnioną implementacją modelu jest **PYTHIA** – generuje cząstki w zderzeniach hadron-hadron.

Procedury PYTHIA są wywoływane w trakcie symulowania zderzenia przez GiBUU, SMASH i JAM2/RQMD.
UrQMD i PHSD mają swoje własne podejścia do fragmentacji struny.

Charakterystyka głównych cech wybranych modeli transportu

Cechy	GiBUU	IQMD	UrQMD	JAM2/RQMD	SMASH	PHSD
Potencjał relatywistyczny	opcjonalnie	n,p : nie K : tak	tak	tak	tak	tak
Potencjał = średnie pole	tak	n,p : nie K : tak	nie	Opcjonalnie	tak	tak
Potencjał = suma pot. nukleonów	nie	tak	tak	Opcjonalnie	nie	nie
Potencjał elektromagnetyczny	tak	tak	tak dla barionów nie dla π	Opcjonalnie	Opcjonalnie	nie
Potencjał zależny od pędu	tak	tak	nie	tak	nie	tak
Tworzenie LCP (klastrów)	na końcu symulacji	na końcu symulacji	nie	na końcu symulacji	na końcu symulacji	nie
Zmiany mas hadronów w ośrodku jądrowym	tak	tak	nie	Bariony: tak K, π: nie	nie	tak
Faza kwark/gluon opisana „strunami”	Pythia	nie	Ujęcie własne	Pythia	Pythia	Ujęcie własne

- Porównanie modeli transportu w pracy E. Kolomeitsev et al. J.Phys.G 31, S741 (2005) wykazało spore różnice w przewidywaniach.
  Casus drastyczny: rozkład pospieszności π^+ z Au+Au @ 1.48A GeV, b = 1 fm.

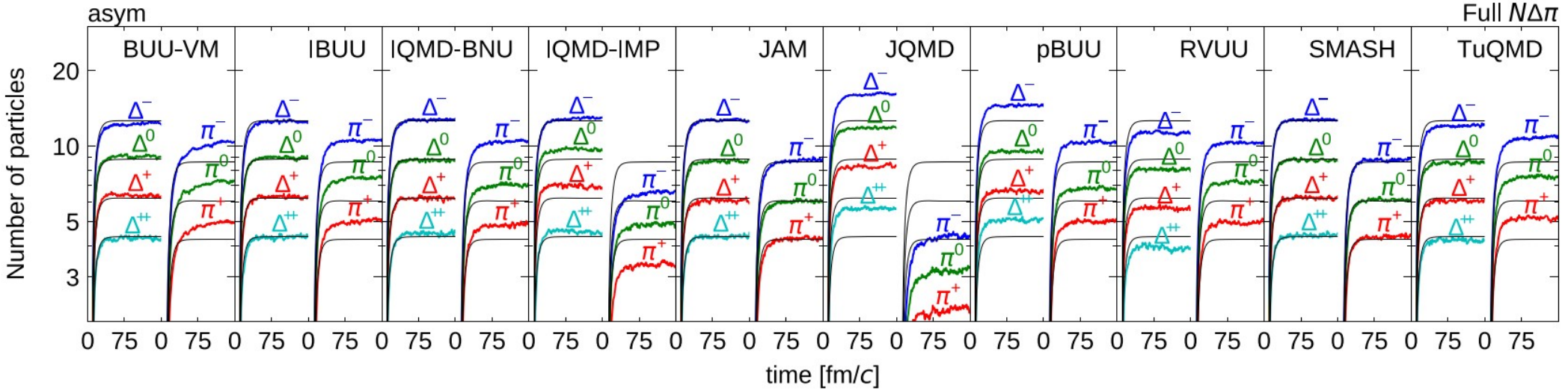


- **TMEP** (**T**ransport **M**odel **E**valuation **P**roject) : systematyczne porównania od 2014 r.

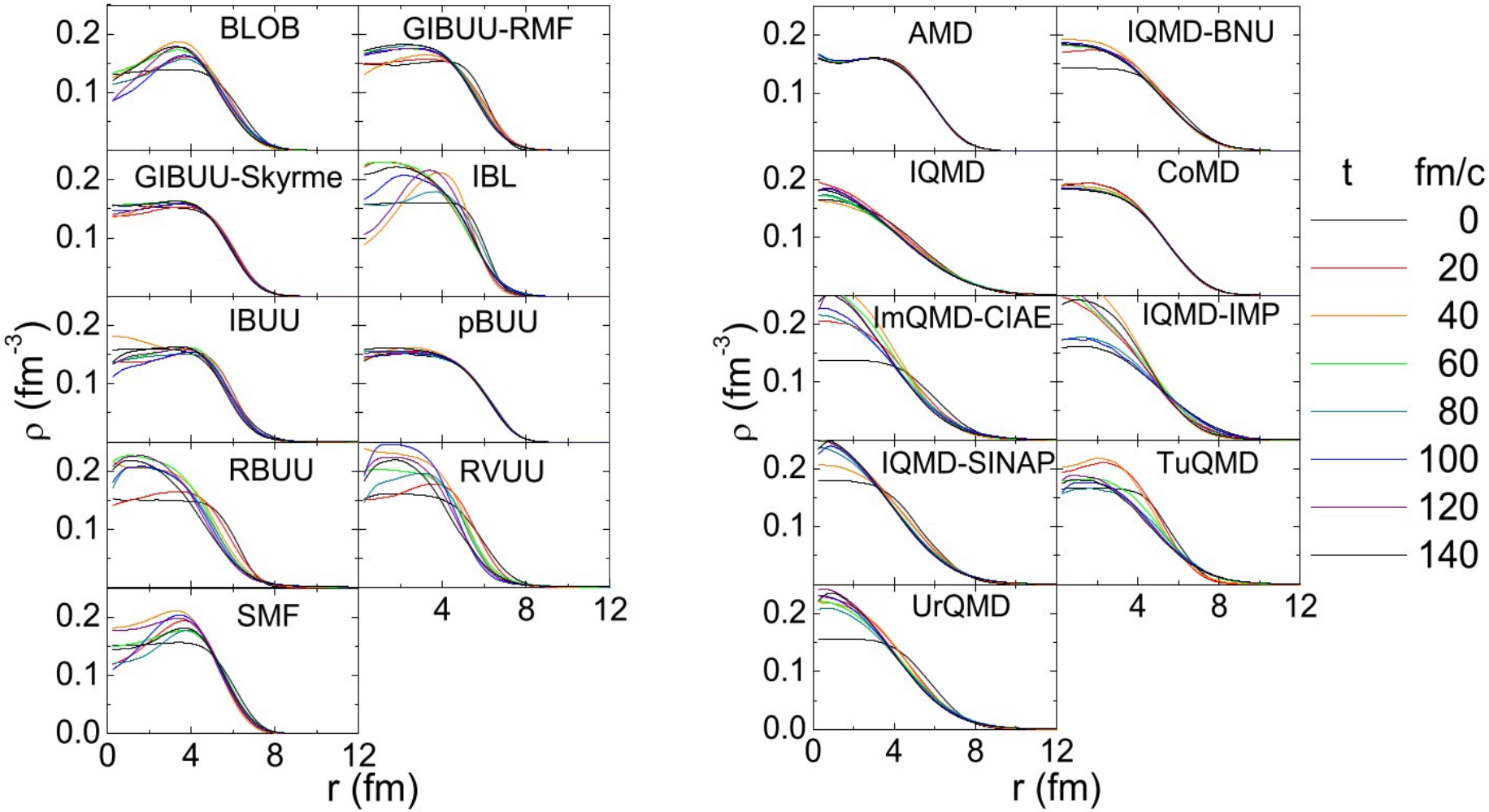
  Np. J. Xu et al., Phys. Rev. C 93, 044609 (2016)

- Przykład. Materia jądrowa asymetryczna (δ = 0.2) zamknięta w pudełku, temperatura 60 MeV.
  A. Ono et al., Phys. Rev. C 100, 044617 (2019).

Krotności łączy współzależność: Δ rozpada się do π, natomiast z kolizji nukleonów może powstać Δ.
W pewnej chwili krotności $\Delta(1232)$ i π się nasycają – dochodzi do równowagi.
Nb. linia ciągła: układ równań krotności, zakładający równowagę kinetyczną, ale nie chemiczną.

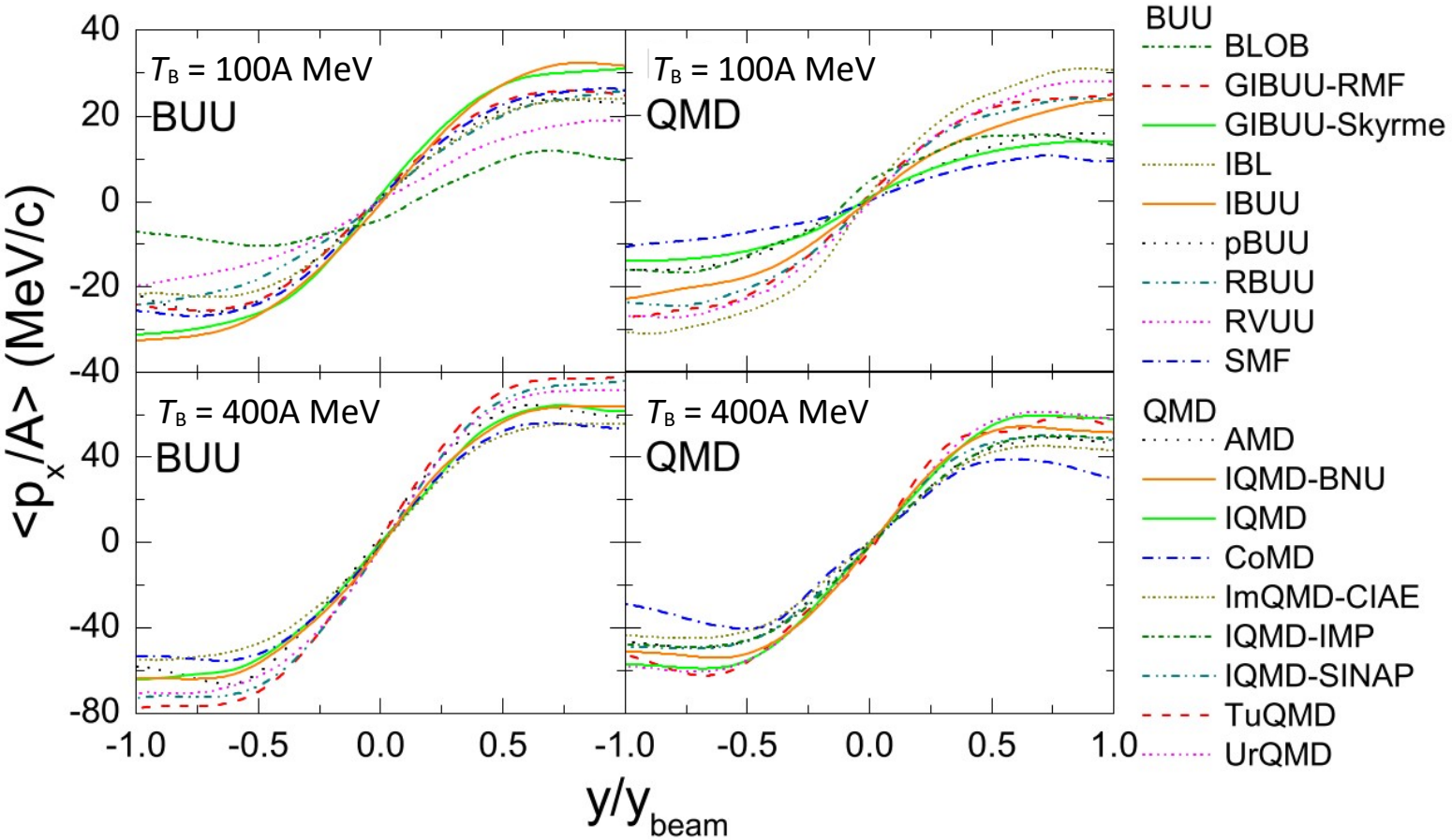


- Przykład: rozkład gęstości jądra Au „puszczonego swobodnie” w różnych modelach: czy i jak bardzo jego profil zmienia się z czasem?



J. Xu et al., Phys. Rev. C 93, 044609 (2016)

- Przykład: Au+Au @ T_{Beam} = 100, 400A GeV, b = 7 fm.
  Jaki „pływ poprzeczny” na 1 nukleon przewidują różne modele?



J. Xu et al., Phys. Rev. C 93, 044609 (2016)

Wniosek: na dziś **nie ma konsensusu**. Większej pewności można nabrać, ustalając model i sprawdzając, **czy w wielu charakterystykach na raz zachodzi spójność**. Modele są jednak uzupełniane z czasem.

Dynamika relatywistyczna

- Kowariantny zapis potencjałów na przykładzie elektrodynamiki
  - Klasyczny hamiltonian relatywistyczny cząstki w polu EM
- Kwantowa dynamika relatywistyczna
  - Równanie Kleina-Gordona
  - Równanie Diraca
- Kwantowo-relatywistyczne modelowanie sił materii jądrowej
  - Model QHD: relatywistyczny nukleon w materii jądrowej
  - Rodzina modeli RMF (Relativistic Mean Field)
- Wpływ próżni QCD
  - Próżnia QCD. Kondensat kwarkowy. Relacja GOR.
  - Eksperymentalne poszukiwanie modyfikacji masy hadronu

- **Analogia do oddziaływań elektromagnetycznych**

Oddziaływania EM opisują potencjały: elektryczny ϕ (skalar) i magnetyczny $\bar{A}$ (wektor).

Możemy to przepisać jako natężenie pola elektrycznego $\bar{E}$: $\bar{E} = -\nabla\phi - \partial\bar{A}/\partial t$

oraz indukcję pola magnetycznego $\bar{B}$ $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$

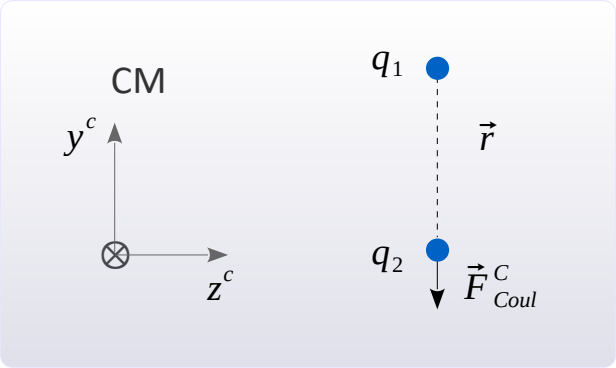
- **STW** sprawia, że ϕ i $\bar{A}$ są ze sobą **współzwiązane** (tj. są objawem tych samych oddziaływań). Zobaczmy to.

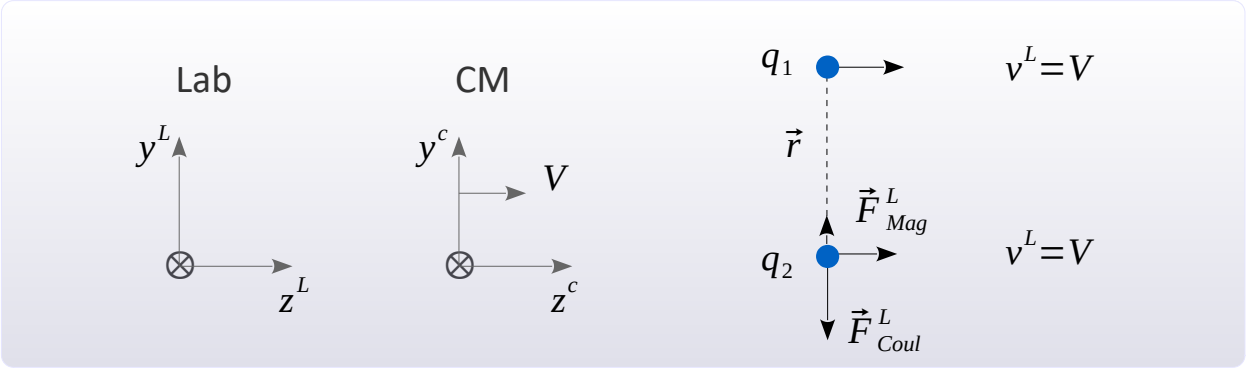
Przykład:
Rozważmy dwa ładunki (q_1 i q_2), które w chwili $t = 0$ są nieruchome względem siebie.

W układzie własnym ładunków – są statyczne (⇒ działa tylko siła Coulomba) .
Ale te same ładunki w układzie poruszającym się, poruszają się (⇒ działają siły Coulomba + Magnetyczna)

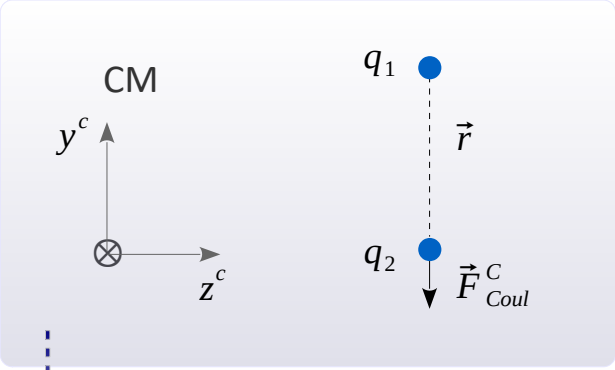
Zobaczmy to:

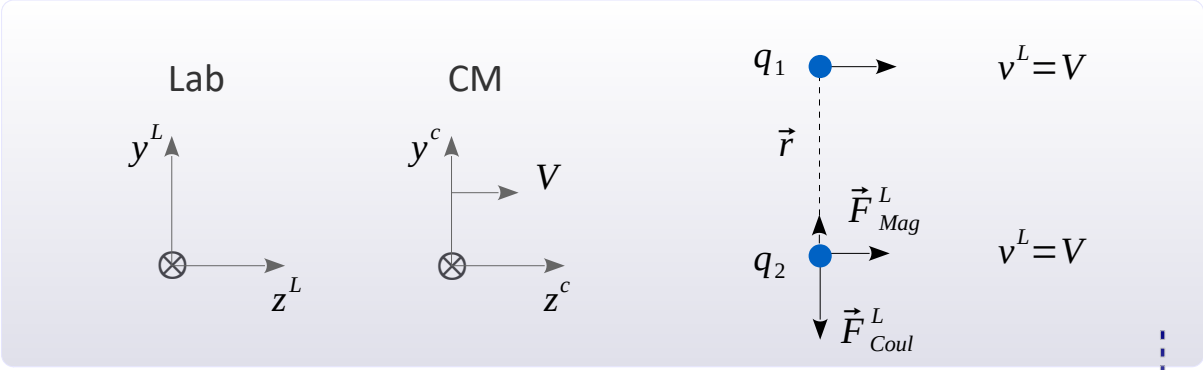
Prawo Ampere'a: ruch q_1 generuje $\bar{B}$ m.in. w położeniu q_2.
Siła Lorentza: ruch q_2 w polu $\bar{B}$ generuje $\bar{F}^L$





Dynamika relatywistyczna: elektryczność i magnetyzm to jedno





- Sprawdźmy, czy to „wychodzi naturalnie” z transformacji Lorentza?

$$\begin{cases} \vec{E}^{CM} = k\dfrac{q_1}{r^2}\,(-\hat{y}) \\ \vec{B}^{CM} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}^{CM}_{Coul} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,(-\hat{y}) \\ \vec{F}^{CM}_{Mag.} = \vec{0} \end{cases}$$

Transformacje Lorentza pól EM:

$$\begin{cases} E^{Lab}_{\parallel} = E^{CM}_{\parallel} \\ B^{Lab}_{\parallel} = B^{CM}_{\parallel} \\ \vec{E}^{Lab}_{\perp} = \gamma \cdot \left(\vec{E}^{CM}_{\perp} + \vec{V} \times \vec{B}^{CM}\right) \\ \vec{B}^{Lab}_{\perp} = \gamma \cdot \left(\vec{B}^{CM}_{\perp} - \dfrac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E}^{CM}\right) \end{cases}$$

... oraz składowej ⊥ dowolnej siły:

$$\vec{F}^{Lab}_{\perp} = \frac{\vec{F}^{CM}_{\perp}}{\gamma\left(1 - \dfrac{V v^{CM}_z}{c^2}\right)}$$

$$\begin{cases} \vec{E}^{Lab} = \gamma \cdot k\dfrac{q_1}{r^2}\,(-\hat{y}) \\ \vec{B}^{Lab} = \gamma \cdot \left(\dfrac{V}{c^2}\right) \cdot \left(k\dfrac{q_1}{r^2}\right) \cdot \hat{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}^{Lab}_{Coul} = \gamma \cdot k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,(-\hat{y}) \\ \vec{F}^{Lab}_{Mag.} = q_2 \vec{V} \times \vec{B}^{L} = q_2 \cdot \gamma \left(\dfrac{v^2}{c^2}\right) k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{y} \end{cases}$$

$$\vec{F}^{Lab}_{Lorentz} = \frac{k q_1 q_2}{r^2}\,\gamma\left(-1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\hat{y} = \frac{\vec{F}^{C}_{Lorentza}}{\gamma}$$

✓

Wniosek: w relatywistycznym opisie EM, **potencjały: skalarny ϕ i wektorowy $\bar{A}$ są współzwiązane**.

Klasyczny hamiltonian relatywistyczny cząstki w polu EM

- Hamiltonian dla cząstki relatywistycznej w polu EM:

$$H = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + c^2\left(\vec{P} - q\vec{A}\right)^2} + q\phi$$, gdzie $\vec{P} = \vec{p} + q\vec{A}$ to pęd kanoniczny, tj. $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$ $\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$

(nb. równania Hamiltona prowadzą do siły Lorentza: $\dot{\vec{p}} = q\left[-\nabla\phi + \vec{v}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]$

Można też przekształcić: $H = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(c\vec{p}\right)^2} + q\phi = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(c\cdot m\gamma\vec{\beta}c\right)^2} + q\phi = \ldots = \gamma mc^2 + q\phi$)

- Ten hamiltonian można przepisać:

$$\left(H - q\phi\right)^2 - c^2\left(\vec{P} - q\vec{A}\right)^2 = \left(mc^2\right)^2$$ $\Rightarrow$ To wyrażenie jest ***niezmiennikiem*** transformacji Lorentza

Jest więc sens, aby sformułować opis relatywistycznie niezmienniczy, czyli przez 4-wektory.

$$X_\mu X^\mu = X_0^2 - \vec{X}^2 = \mathrm{Inv}$$

- **czteropołożenie**

$$x = \left(ct, \vec{r}\right)$$

czteroprędkość

$$u = \gamma\left(c, \vec{v}\right)$$

czteropęd

$$p = mu = \gamma m\left(c, \vec{v}\right)$$

czteropotencjał

$$A = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right)$$

czteropęd kanoniczny

$$P = p + qA = \left(\gamma mc + \frac{q}{c}\phi, \gamma m\vec{v} + q\vec{A}\right)$$

Klasyczny hamiltonian relatywistyczny cząstki w polu EM

- **czteropołożenie**

$$x = (ct, \vec{r})$$

czteroprędkość

$$u = \gamma(c, \vec{v})$$

czteropęd

$$p = mu = \gamma m (c, \vec{v})$$

czteropotencjał

$$A = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right)$$

czteropęd kanoniczny

$$P = p + qA = \left(\gamma mc + \frac{q}{c}\phi, \gamma m\vec{v} + q\vec{A}\right)$$

Hamiltonian wychodzi bardzo prosty: $H = P^0 c$ (całka ruchu)

(Nb. dodając do cząstki swobodnej pole EM,
zastosowaliśmy tzw. „**minimalne sprzężenie**”, tj. podstawiliśmy $H \to H - q\phi$, $\vec{p} \to \vec{P} - q\vec{A}$)

- Zauważmy: w czteropotencjale składowa 0 dotyczy statyki, a wektorowe – dynamiki.

Per analogiam, **potencjałowy opis oddziaływań silnych:**

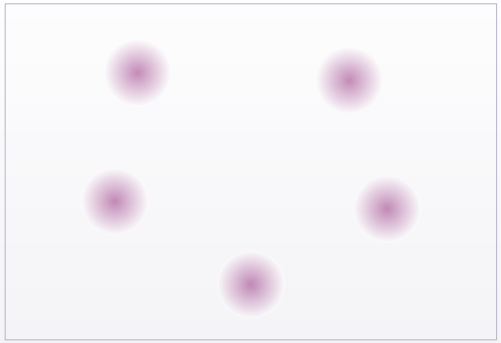
– relatywistyczna niezmienniczość ⇒ musi być skalar przy energii i wektor przy pędzie.

Składowa *0*	:	statyczna	(zależna od gęstości materii)
Składowe wektorowe	:	dynamiczne	(zależna od strumienia materii)

– Osobna możliwość: skalar stojący przy masie, który ją modyfikuje (wyrażenie typu $m \pm X$)
(wyrażenie wciąż będzie niezmiennicze; tego w EM nie ma) .

Co buduje masę obiektu złożonego (np. jądra) ?

W ∞

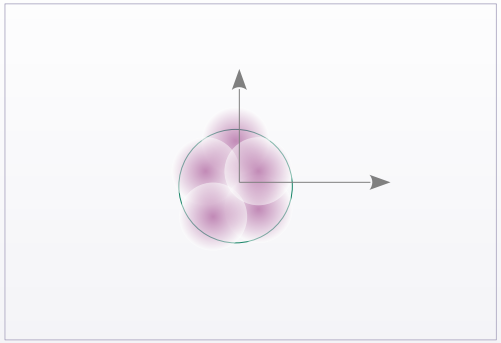


Nukleony swobodne, $\bar{p}_i = \bar{0}$.

$$E_{Układu} = \sum_i m_{N,i} c^2$$

$$\frac{E_{Układu}}{A} = m_N c^2$$

Jądro jako całość:



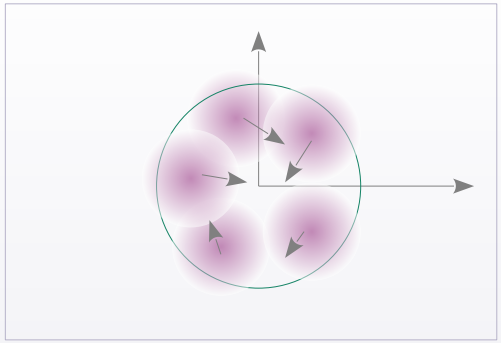
W układzie własnym, $\bar{p}_{jądra} = \bar{0}$.

$$E_J = M_J c^2 \underbrace{=}_{liczbowo} \sum_i m_{N,i} c^2 - B_J$$

$$\frac{E_J}{A} = m_N c^2 - \frac{B_{jądra}}{A}$$

≈ 8 MeV

Jądro jako suma nukleonów:



Zakaz Pauliego → nukleony muszą się poruszać, $\bar{p}_i \neq \bar{0}$.

$$E_J = \sum_i e_i$$

$$e_i = \sqrt{\left(m_N c^2\right)^2 + c^2\left(\vec{P}_i - q_i \vec{A}_i\right)^2} + q_i \phi_i$$

(↑ gdyby działało tylko oddz. EM)

- W rzeczywistości w formule na energię nukleonu mocno dominują oddziaływanie silne.

$$e_i = \sqrt{\left(m_{N,i} c^2 - V_S\right)^2 + \left(\vec{p}_i c - \vec{V}_W\right)^2} + V_{W,0}$$

- Inny wniosek ogólny:
  Energia wiązania B_J zbudowana jest i z E_{kin}, i E_{pot} nukleonów.

Kwantowa dynamika relatywistyczna: równanie Kleina-Gordona

- **Problem:** równanie Schrödingera *nie* jest relatywistyczne. Uprośćmy je do $\phi = 0$, $\overline{A} = \overline{0}$.

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\right]\psi(\vec{r}) = i\hbar\partial_t\psi(\vec{r})$$

i przy operatorach:

$$\hat{p}_i = -i\hbar\partial_i \qquad \hat{E} = i\hbar\partial_t$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2\vec{\nabla}^2$$

otrzymujemy:

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

Ale to przy prędkościach relatywistycznych jest niezgodne z: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

Ponadto, współrzędne: czasowa i przestrzenne - nie są traktowane równoważnie.

- **Idea Oskara Kleina i Waltera Gordona (1926)**

Wzór relatywistyczny zapiszmy jako operatory na f. falową:

$$\left[\hat{E}^2 - c^2\hat{p}\cdot\hat{p} - (mc^2)^2\right]\psi(x) = 0$$

Podstawmy i podzielmy przez $-(\hbar c)^2$. Dostaniemy:

$$\left[\left(\frac{1}{c}\partial_t\right)^2 - \vec{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(x) = 0$$

Równanie Kleina-Gordona w ujęciu czterowektorów:

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(x) = 0$$

Kwantowa dynamika relatywistyczna: równanie Kleina-Gordona

- Co oznacza $\partial_\mu \partial^\mu$ w równaniu KG?

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right] \psi(x) = 0$$

- Wprowadza się czterogradient:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\right) \qquad \text{(pochodna kowariantna)}$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \; -\vec{\nabla}\right) \qquad \text{(pochodna kontrawariantna)}$$

i wtedy iloczyn skalarny:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \vec{\nabla}^2$$

- W takim ujęciu, czteropęd (jako operator) :

$$p^\mu \equiv \left(\frac{\hat{E}}{c}, \; \hat{\vec{p}}\right) = \left(\frac{i\hbar\partial_t}{c}, \; -i\hbar\vec{\nabla}\right) = i\hbar\partial^\mu$$

Równanie Kleina-Gordona w ujęciu pędów:

$$\left[p_\mu p^\mu - (mc)^2 \right] \psi(x) = 0$$

- *Uwaga*: w równaniu KG nie pojawia się spin.
  (ψ jest skalarem, a nie wektorem, a w $\hat{H}$ nie ma macierzy Pauliego).
  Jest to opis ruchu cząstki **bezspinowej** (np. pion, kaon), obecnie – swobodnej.

Równanie Kleina-Gordona cząstki w polu EM

- Aby **do równania Kleina-Gordona wprowadzić potencjały EM**, trzeba zastosować „minimalne sprzężenie”:

$$i\hbar\partial_t \rightarrow i\hbar\partial_t - e\phi \quad , \quad -i\hbar\vec{\nabla} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A} \qquad \text{lub:} \qquad p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$$

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\phi,\ \vec{A}\right) \qquad A_\mu = \left(\frac{1}{c}\phi, -\vec{A}\right)$$

Podmieniamy:

$$\left[\ p_\mu p^\mu - (mc)^2\ \right]\psi(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[\ (p_\mu - eA_\mu)(p^\mu - eA^\mu) - (mc)^2\ \right]\psi(x) = 0$$

Rozpiszmy to:

$$\left[\left(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\phi\right)^2 + \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} + e\vec{A}_i\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - e\vec{A}_i\right) - (mc)^2\right]\psi(x) = 0 \qquad \| : (-\hbar^2)$$

$$\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e}{\hbar c}\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{e}{\hbar}\vec{A}_i\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{e}{\hbar}\vec{A}_i\right) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(x) = 0$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \qquad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

$\longrightarrow$ Wynik ma postać:

$$\left[\ \partial_\mu\partial^\mu + \text{oddziaływania} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\ \right]\psi(x) = 0$$

- Czytając prace opisujące bezspinową cząstkę kwantową (π, K, ...) pod wpływem **oddziaływań silnych** opisywanych **potencjałami**, spodziewajmy się **podobnych równań**.

- Nb. jeśli zdefiniować „**pochodną kowariantną**”:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t - i\frac{e}{\hbar c}\phi\ ,\ \vec{\nabla} + i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\right)$$

to postać równania upodobni się do formy dla cząstki swobodnej:

$$\left[\ D_\mu D^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\ \right]\psi(x) = 0$$

- **Paul Dirac (1928)**: poszukajmy równania zgodnego z $E = c\sqrt{\vec{p}^2 + (mc)^2}$, które byłoby równaniem 1. stopnia w *p* i *m*.

Idea: skoro $E = c\sqrt{\vec{p}^2 + (mc)^2}$, to hipoteza: wyrażenie pod $\sqrt{}$ jest tzw. „liczbą kwadratową”, (kwadratem pewnej liczby).

$$\vec{p}^2 + (mc)^2 = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\cdot mc)^2$$

Chcemy więc otrzymać równanie:

$$E = c\,\vec{\alpha}\vec{p} + \beta\cdot mc^2$$

Czym są stałe $\overline{\alpha}$ i β? Przyrównując LHS do RHS, dostajemy warunki:

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \\ \forall_{i\neq j}\ \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \end{cases}$$

W zbiorze *liczb zespolonych* nie ma takiego rozwiązania.
Ale jest **rozwiązanie** w przestrzeni **macierzy 4 × 4** !

Przytoczmy **macierze Pauliego**:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierze 4 × 4 spełniające zadane warunki to:

$$\beta = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{0}_2 \\ \mathbb{0}_2 & -\mathbb{1}_2 \end{bmatrix} \qquad \forall_{k\in\{1,2,3\}}\ \alpha_k = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_2 & \sigma_k \\ \sigma_k & \mathbb{0}_2 \end{bmatrix}$$

Dziś używa się innej reprezentacji (γ) :

$$\gamma^0 = \beta \qquad \forall_{k\in\{1,2,3\}}\ \gamma^k \equiv \beta\alpha_k = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_2 & \sigma_k \\ -\sigma_k & \mathbb{0}_2 \end{bmatrix}$$

- Rozważamy równanie 4 x 4: $E = c\,\vec{\alpha}\vec{p} + \beta \cdot mc^2$ ➡ Funkcja falowa ψ musi być wektorem 4-wymiarowym.

Mnożymy lewostronnie przez β i podstawiamy operatory kwantowe. Pamiętając, że $\gamma^0 = \beta$, $\forall_{k \in \{1,2,3\}}\ \gamma^k \equiv \beta\alpha_k$

dostajemy:

$$\gamma^0\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \left[\gamma^i c\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \mathbb{1}_4 \cdot mc^2\right]\psi \qquad \| : c$$

➡ $$\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right]\psi = 0$$ **Równanie Diraca** dla cząstki swobodnej

Równanie to opisuje cząstkę swobodną ze spinem ½, np. e, p, n, Λ, Σ. Górna/dolna para wierszy: cząstka/antycząstka.

- Aby **do równania Diraca wprowadzić potencjały EM**, znów stosujemy minimalne sprzężenie:

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\phi,\ \vec{A}\right)$$

$$A_\mu = \left(\frac{1}{c}\phi,\ -\vec{A}\right)$$

$$i\hbar\partial_t \rightarrow i\hbar\partial_t - e\phi \qquad -i\hbar\vec{\nabla} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A} \qquad p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$$

I uogólniamy równanie:

$$\gamma^0\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \left[\gamma^i c\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \mathbb{1}_4 \cdot mc^2\right]\psi \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\left(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - e\frac{\phi}{c}\right)\psi = \left[\gamma^i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - eA_i\right) + \mathbb{1}_4 \cdot mc\right]\psi$$

- (c.d.) aby **do równania Diraca wprowadzić potencjały EM**, uogólniamy:

$$\gamma^0\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \left[\gamma^i c\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \mathbb{1}_4\cdot mc^2\right]\psi \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\left(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - e\frac{\phi}{c}\right)\psi = \left[\gamma^i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} - eA_i\right) + \mathbb{1}_4\cdot mc\right]\psi$$

Wynik ma postać:

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + \text{oddziaływania} - mc\right]\psi = 0$$

Gdy wprowadzimy **pochodną kowariantną**:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t - i\frac{e}{\hbar c}\phi\,,\ \vec{\nabla} + i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

to równanie Diraca nabierze postaci:

$$\left[i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc\right]\psi = 0$$

Równanie Diraca dla cząstki w 4-potencjale EM

- Ciekawostka: notacja Feynmanna ze slash'em. Dla dowolnego 4-wektora A, wprowadza się: $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$

$$\left[i\hbar\not{D}_\mu - mc\right]\psi = 0$$

Rodzina modeli RMF: relatywistyczny nukleon w materii jądrowej

- Rodzina modeli **„relatywistycznego średniego pola" (RMF, relativistic mean field)**

  Odziaływania NN - to część resztkowa oddziaływań silnych (długozasięgowa w porównaniu do qqq) .
  Nukleon wymienia z sąsiadem mezon(y). Ogromna liczba wymian uśrednia się do „pola".
  Pole - w dużym uproszczeniu: rozkład w (czaso)przestrzeni, opisujący np. nukleon, mezony, bariony itd.

  W RMF, pole nukleonu: $\psi = \begin{pmatrix} \psi_N \ (2\,\mathrm{dim}) \\ \psi_{\bar{N}} \ (2\,\mathrm{dim}) \end{pmatrix}$ pola mezonów: skalarne ϕ_0 , 4-wektorowe V^μ

  ▷ Polem nukleonu steruje równanie typu Diraca.
  Polami mezonów wymiany – zestawy równań typu Kleina-Gordona.

  ▷ Pola mezonów oddziałują na nasz nukleon przez potencjały.
  Dany potencjał jest $\sim$ do wielkości pola w danym miejscu. (stałe proporcjonalności g_i : **„stałe sprzężenia"**) .
  Argument STW $\rightarrow$ potencjał skalarny + wektorowy (por. EM)

- Poniżej omówimy dwa modele RMF, których celem jest opis materii jadrowej:

  ① **Model QHD I (Quantum Hadrodynamics)**
  Historycznie pierwszy, uwzględniający tylko oddziaływania silne, bez różnicowania na p/n

  ① **Model $\sigma - \omega - \varrho$ (QHD II)**
  gdzie do powyższego dodano: pole czułe na nadwyżkę n nad p oraz pole EM

Model QHD: materia jednolita w polu oddziaływań silnych

- **Model QHD I (Quantum Hadrodynamics)**, John D. Walecka (1974) Źródło: np. [*ref*] (również w *arXiv*) .
  - ▷ Oddziaływania są tylko silne (brak EM) i nie różnicują między protonami a neutronami
  - ▷ Działa potencjał skalarny ϕ_0 oraz czteropotencjał V^μ
  - ▷ Uproszczenie: w układzie CM jądra, materia jako całość jest statyczna $\rightarrow$ $V^\mu = \left(V_0\,,\ \vec{0}\right)$

Równanie Diraca cząstki w polu EM :

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu + eA_\mu - m\right]\psi(t,x) = 0$$

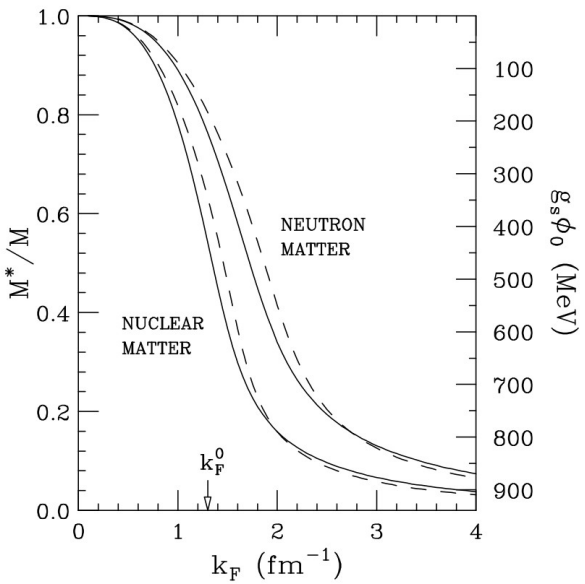
gdzie: $\partial_\mu = \left(\partial_t,\ \vec{\nabla}\right)$, $A_\mu = \left(\phi, -\vec{A}\right)$

Równanie QHD nukleonu z potencjałami jądrowymi :

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma_0\cdot g_V V_0 - \left(M - g_s\phi_0\right)\right]\psi(t,x) = 0$$

gdzie g_s, g_V (liczby) : stałe sprzężenia, ważące potencjały
M : masa nukleonu w próżni

B. Serot, J. Walecka, Int. Jour. Mod. Phys. E 6, 515 (1997)



- Potencjał skalarny efektywnie modyfikuje masę nukleonu.

Masa efektywna : $M^* \equiv M - g_s\phi_0$

- W danym miejscu, każdy z potencjałów narasta z ρ materii.

Wg. teorii $V_0 = \dfrac{g_V}{m_v^2}\cdot\rho$,

natomiast $\phi_0(\rho)$ okazuje się nieliniowe z ρ (por. wykres).

Nb. $\rho \sim k_F^3$, bo $\rho = \dfrac{\gamma}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_0^{k_F} d^3k = \dfrac{\gamma}{6\pi^2}k_F^3$

Równanie stanu (EoS) wg modelu QHD

- Z równania QHD wyznacza się wyrażenie na energię nukleonu.

Jest to zależność energii od gęstości,
czyli **równanie stanu materii jądrowej** (**EoS**) ,
tym razem zachowujące relatywistykę.

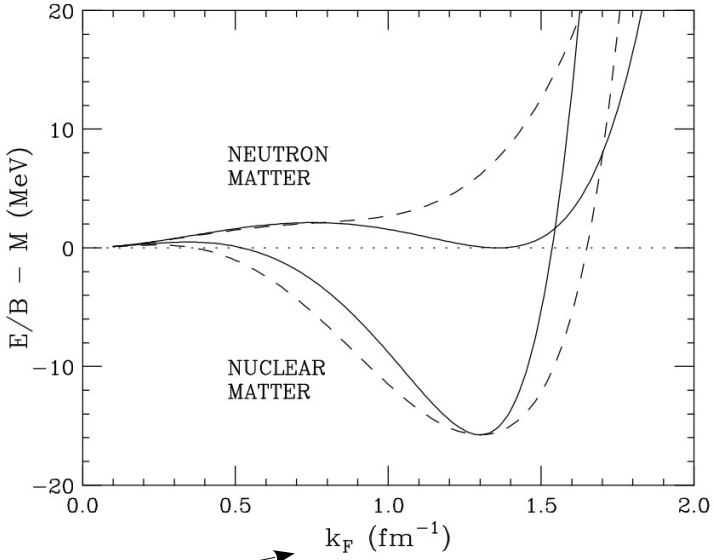
To wyrażenie dopasowuje się do „warunków pokojowych”,
czyli: $[\,\rho\,,\ E/A - m_N\,] = [\,0.16\ \mathrm{GeV/fm^3}\,,\ -16\ \mathrm{GeV}\,]$

- Nb. związek między k_F a koncentracją ρ :

$$\rho = \frac{\gamma}{(2\pi)^3}\int_0^{k_F} d^3k = \frac{\gamma}{6\pi^2}k_F^3$$

γ = { 4 dla materii o $N = Z$,
2 dla materii neutronowej}

QHD: równanie stanu materii jądrowej



B. Serot, J. Walecka, Int. Jour. Mod. Phys. E 6, 515 (1997)

$\left(\ \rho \sim k_F^3\ \right)$

➡ Złożenie potencjału skalarnego ϕ_0 i wektorowego V generuje **dla materii symetrycznej minimum w *E*/nukleon** ,
Utożsamiamy je z energią wiązania materii jądrowej w ρ_0 .

- Inaczej przebiegałby EoS **materii neutronowej**: wychodzi głównie odpychanie, a w pobliżu ρ_0 jest minimum = 0.

Model σ-ω-ϱ : polepszenie modelu QHD

Omawiane równanie QHD dla nukleonu w materii jądrowej (to poniżej) jest wyidealizowane.

$$\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \gamma_0 \cdot g_V V_0 - \left(M - g_s\phi_0\right)\right]\psi(t,x) = 0$$

- ▷ brak odpowiednika członu (a)symetrii energii wiązania jądra ($N \neq Z$)
- ▷ brak oddziaływania EM

- Pełniejsze RMF to tzw. **model σ-ω-ϱ** [sigma-omega-ro] (inaczej, **QHD II**) . Aktorzy / pola są następujący:

σ	(1D)	:	Pole skalarne (oddz. silne)
ω	(4D)	:	Pole wektorowe (oddz. silne)
ρ_3	(4D)	:	Pole wektorowe (oddz. silne; jest $\neq 0$ wtedy, gdy jest nierówność n i p)
A	(4D)	:	4-potencjał elektromagnetyczny

Wówczas równanie sterujące polem nukleonowym wygląda tak:

$$\left[\gamma_{\mu}\left(i\partial^{\mu} - g_{\omega}\omega^{\mu} - g_{\rho}\rho_3\tau_3 - e\frac{1+\tau_3}{2}A^{\mu}\right) - \left(m_N + g_S\sigma\right)\right]\psi(x) = 0 \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_N \ (2\,\mathrm{dim}) \\ \psi_{\bar{N}} \ (2\,\mathrm{dim}) \end{pmatrix}$$

gdzie: g_S , g_ω , g_ρ : stałe sprzężenia (wagi)

τ_3 : $\tau_{3,p} = 1 \qquad \tau_{3,n} = -1$

Można to skompresować do **potencjałów**:

$$\begin{cases} S = g_S \cdot \sigma < 0 \\ V^{\mu} = g_{\omega} \cdot \omega^{\mu} + g_{\rho}\cdot\tau_3\cdot\rho_3 + \frac{e}{2}\left(1+\tau_3\right)\cdot A^{\mu} \end{cases}$$

co nam daje:

$$\left[\gamma_{\mu}\left(i\partial^{\mu} - V_{\mu}\right) - \left(m_N + S_{\mu}\right)\right]\psi_N(x) = 0$$

Rodzina modeli RMF (Relativistic Mean Field)

- Równanie w modelu **σ-ω-ϱ** , zapisane potencjałami:

$$\left[\gamma_\mu\left(i\partial^\mu - V_\mu\right) - \left(m_N + S_\mu\right)\right]\psi_N(x) = 0$$

gdzie:

$$\begin{cases} S = g_S \cdot \sigma < 0 \\ V^\mu = g_\omega \cdot \omega^\mu + g_\rho \cdot \tau_3 \cdot \rho_3 + \frac{e}{2}\left(1+\tau_3\right)\cdot A^\mu \end{cases}$$

człon barionowy | *człon izospinowy* | *człon EM*

- Równanie to odpowiada wyrażeniu na **energię nukleonu w materii**:

$$E = \sqrt{\left(\vec{p} - \vec{V}\right)^2 + \left(M_N^*\right)^2} + V_0$$

gdzie **masa efektywna nukleonu**:

$$M_N^* \equiv M_N + S$$

- (Uwaga: włączane są jeszcze potencjały zależne od pędu)

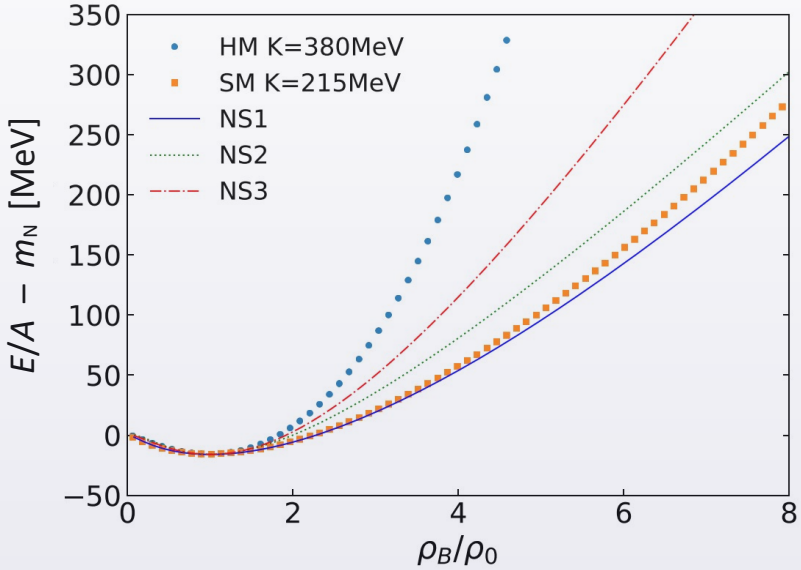
- **Użycie**: modele transportu, symulujące przebieg zderzenia jądrowego (jako ruchu zbioru nukleonów) **w ujęciu relatywistycznym**. Np. GiBUU, JAM/RQMD.

- Ref. np. L. Savushkin, H. Toki, "The Atomic Nucleus as a Relativistic System" (Springer 2004) równ. 4.5
  O. Buss et al. "Transport-theoretical description of nuclear reactions" Phys. Rep. 512, 1 (2012) równ. 123
  Y. Gambhir et al. "Relativistic Mean Field Theory for Finite Nuclei" Ann. Phys. 198, 132 (1990) równ. 2.4a

Przykład zastosowania modelu RMF

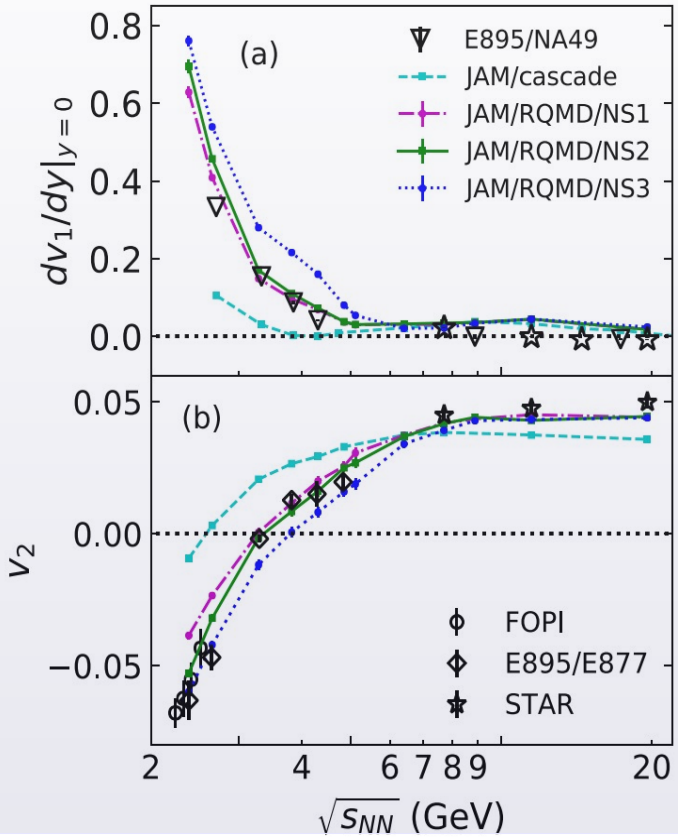
- W modelu RQMD.RMF ruchem cząstek steruje równanie RMF o elastycznych parametrach. W pracy Y.Nara, H.Stöcker, Phys. Rev. C 100, 054902 (2019) rozważane były 3 warianty, oznaczone jako NS1,2,3 (b/pola ρ).

Type	K (MeV)	m^*/m	g_s	g_v	g_2 (1/fm)	g_3
NS1	230	0.800	8.182	7.721	31.623	−3.7977
NS2	380	0.800	7.211	7.721	−17.889	197.64
NS3	380	0.722	8.562	9.601	0.4429	44.704



➡ Manipulacja stałymi sprzężenia potrafi wygenerować równania stanu o różnych κ (w „typowym” zakresie), jednocześnie zapewniając $B(\rho_0) = -16$ MeV.

- Wpływ EoS NS1,2,3 na zachowanie w funkcji √s :
  - pochodnej v_1 w midrapidity
  - sumarycznego v_2



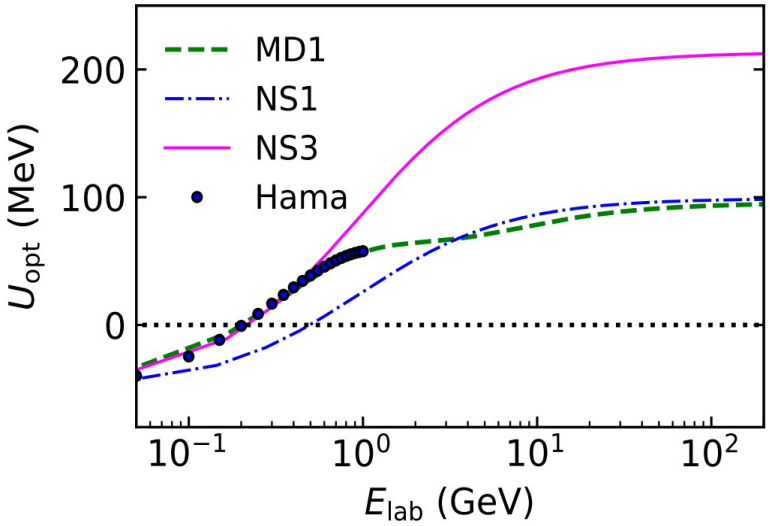
- Fine-tuning: **potencjał zależny od pędu**.

Rozpraszanie elastyczne p+A ⇨ $U = U(p)$.
Pomiędzy danymi a modelami porównuje się:

$$U(p) \equiv E(p) - \sqrt{m^2 + p^2}$$

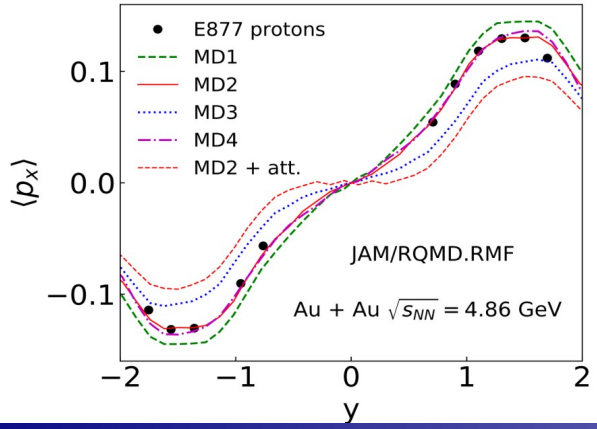
(Ekstrakcja z danych doświadczalnych: punkty •)

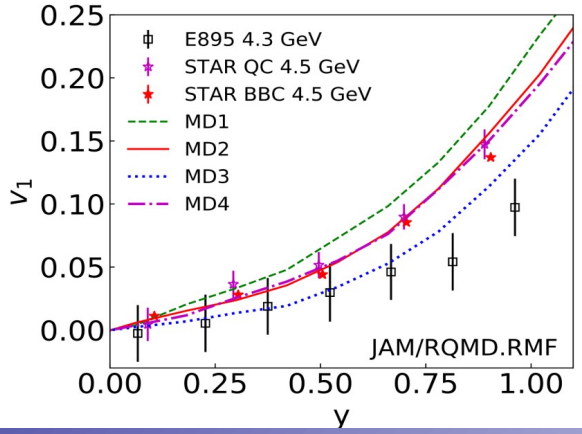
W RMF potencjały S i V wchodzą do U w sposób uwikłany.
Wykres pokazuje, że EoS bez jawnego członu $\Delta U(p)$ opisuje dane źle (NS1) lub umiarkowanie (NS3).



Idea: $S = \ldots - V_S^{MD}$ $\quad V_s^{\mathrm{MD}} = \frac{\bar{g}_s^2}{m_s^2} \int d^3p \frac{m^*}{p_0^*} \frac{f(x,p)}{1 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^2/\Lambda_s^2}$

$V_\mu = \ldots + V_\mu^{MD}$ $\quad V_\mu^{\mathrm{MD}} = \frac{\bar{g}_v^2}{m_v^2} \int d^3p \frac{p_\mu^*}{p_0^*} \frac{f(x,p)}{1 + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^2/\Lambda_v^2}$





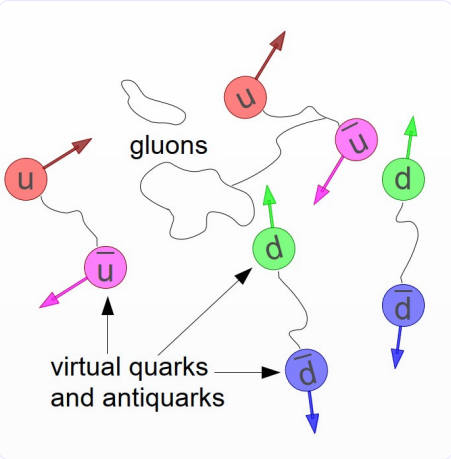
Opis ewolucji materii jądrowej bardzo dobrze zgodny z danymi doświadczalnymi

[publikacja] ⇨

aż do $\sqrt{s_{NN}} \lesssim 8$ GeV ($T_{Beam} \lesssim 32A$ GeV).

Y. Nara, et al., Phys. Rev. C 102, 024913 (2020)

Próżnia QCD. Kondensat kwarkowy.

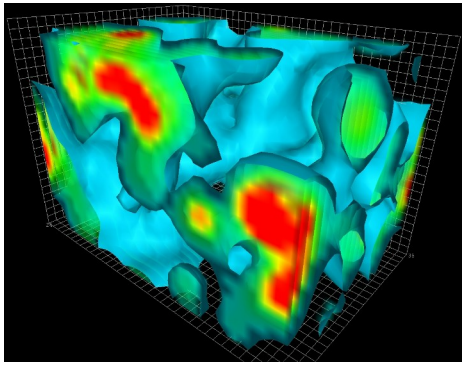


- QCD jest rodzajem kwantowej teorii pola.
  Ma ona stan podstawowy – próżnię,
  a stany wzbudzone – to cząstki
  (zarówno te podstawowe, jak i rezonanse).

  Stan próżni QCD ($|0\rangle$) nie jest pusty.
  Zawiera wirtualne pary kwark-antykwark + gluony.
  Formalnie, wartość oczekiwana operatora $q\bar{q}$ (gęstości par) $\neq 0$

$$\langle\, 0 \,|\, q\bar{q} \,|\, 0 \,\rangle \neq 0$$

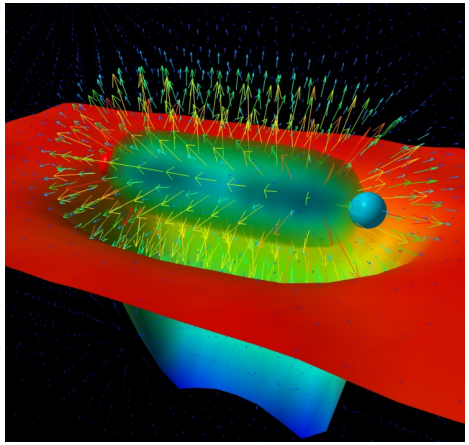
  Ta niezerowość nazywana jest „**kondensatem kwarkowym**”.



D. W. Leinweber, por. www

- Fluktuacje próżni QCD
  [www] [animacja]

- Wg przewidywań QCD, umieszczenie w przestrzeni hadronu (osadzenie go w próżni QCD), generuje lokalny zanik kondensatu kwarkowego.



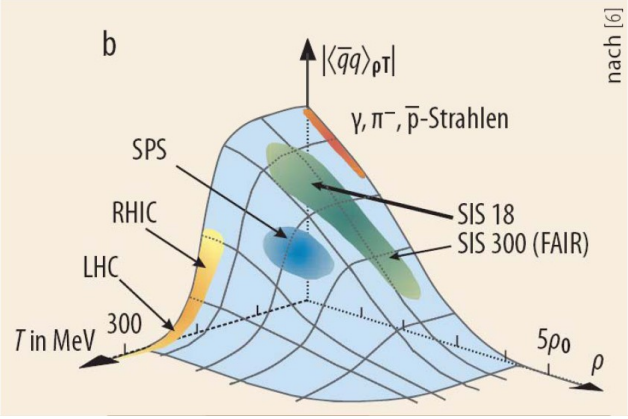
D. W. Leinweber, por. www

[www] [animacja]

- Wg obliczeń, im większa gęstość materii, tym bardziej zanika kondensat kwarkowy (również, im wyższa temperatura w materii). Spadek może → 0. Tak mogło być w Big Bangu.

  W stacjonarnym jądrze atomowym ($\varrho = \varrho_0$) osadzonym w próżni QCD, jest mniej kondensatu, niż w „pustej” próżni.

  Zderzając jądra, podgrzewamy i zgęszczamy materię ⇒ próbkujemy spadek kondensatu $q\bar{q}$.



M. Kotulla et al., Physik Journal 8, 3 (2009)

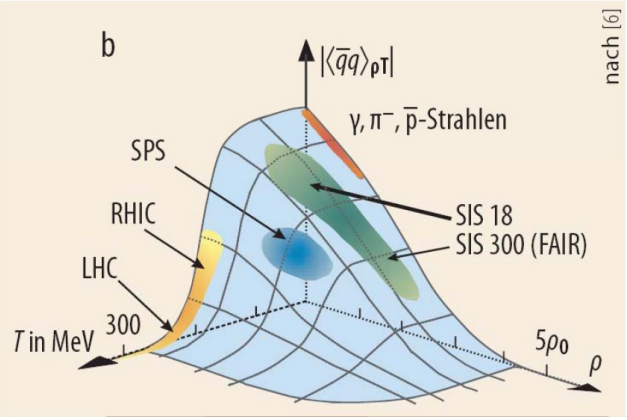
Relacja GOR: wpływ kondensatu na masę hadronu

- Wirtualna para $q\bar{q}$ (kondensatu kwarkowego) istnieje krótko.
  Ale gdy istnieje, to oddziałuje z kwarkami nukleonów jądra (i innych hadronów, gdyby się produkowały).
  Wiemy, że masę obiektu złożonego buduje nie tylko masa jego składników, ale i energie oddziaływań.

- W QCD funkcjonuje relacja **Gell-Manna – Oakes'a – Rennera (GOR relation)** .
  Łączy ona ilość kondensatu kwarkowego - z masą i czasem życia hadronu.
  Zapiszmy ją - dla prostoty - dla pionu.
  (Ta relacja nie uwzględnia oddziaływań od realnych sąsiednich hadronów)

$$m_\pi^{*2} f_\pi^{*2} = -\frac{m_u + m_d}{2} \cdot \langle 0 | u\bar{u} + d\bar{d} | 0 \rangle + \theta\left(m_q^2\right)$$

gdzie: m^* : masa hadronu osadzonego w kondensacie (*masa efektywna*)
f^* : „stała rozpadu" (wg teorii, ilość rozpadów/s $\Gamma \sim f^2$)
$m_{u,d}$: masa bieżąca kwarków (1.5 - 4 MeV)
$\langle 0 | q\bar{q} | 0 \rangle$: **(<0)** wartość oczekiwana operatora par $q\bar{q}$ w kondensacie
$\vartheta(m_q^2)$: mała rzędu m_q^2



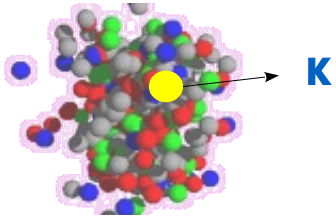
M. Kotulla et al., Physik Journal 8, 3 (2009)

- Rozważmy nukleon. Jego masa w próżni ≈ 939 MeV/c². Masa nukleonu w jądrze ≈ 931 MeV/c² ($B_{\text{Jądra}}$ / A ≈ 8 MeV)
  Mechanizm GOR mówi, że oddziaływanie nukleonu z próżnią QCD jest przyczynkiem do tego spadku.

- Masa i czas życia - to podstawowe własności cząstki. Ale… dotąd znaliśmy je w próżni.
  Q: jak doświadczalnie wykryć efekt ich zmian ?

Eksperymentalne poszukiwanie zmian masy hadronów

- ***Q*: jak doświadczalnie wykryć, że masa hadronu się zmienia?**
  Można wytworzyć go w zderzeniu jąder: gdy przechodzi przez materię jądrową, powinien mieć inną masę.
  Ale zderzenie trwa $\sim 10^{-22}$ s. Gdy hadron wychodzi z materii, jego masa wraca do wartości próżniowej.
  Tylko, że dodatkowo hadron, przechodząc przez materię, oddziałuje z nukleonami.



- Rozważmy wytworzenie w zderzeniu 1 kaonu (1 = ciało próbne) .
  Równanie ruchu Kaonu w materii. Kaon ma spin 0 ⇨ równanie typu Klein-Gordon.
  Kaon oddziałuje z kondensatem kwarkowym, ale i z otaczającymi nukleonami.
  Wg przewidywań QCD (wariant tzw. chiral effective field theory, χEFT) , w uproszczeniu:

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu \pm \frac{3i}{4 f_K^2} \rho_N \partial_t + \left(m_K^2 - \frac{\Sigma_{KN}}{f_K^2} \rho_N \right) \right] \phi_{K^\pm}(x) = 0$$

m_K : masa K w próżni
ρ_N : gęstość materii
f_K : stała rozpadu kaonu
Σ_{KN} : ”K-N sigma term”

oddz. K z nukleonami. +/- dla K^+K^0 / $K^-\bar{K}^0$ oddz. K z kondensatem próżni. Daje ***spadek masy***.

- Uwaga, dla oddziaływań silnych liczy się nie tyle ładunek, co skład kwarkowy: w K^+ i K^0 jest kwark $\bar{s}$, a w K^- i $\bar{K}^0$: kwark s .
  Mezony **K^+ i K^0** nazywa się „**kaonami**” , a mezony **K^- i $\bar{K}^0$** „**antykaonami**” .

- Z tego równania wynika (przewidywany w tej teorii) wzór na **energię kaonu w materii jądrowej**:

$$E_K(\boldsymbol{p}, \rho_N) = \sqrt{m_K^2 + \boldsymbol{p}^2 - \frac{\Sigma_{KN}}{f_K^2}\rho_N + \left(\frac{3}{8}\frac{\rho_N}{f_K^2}\right)^2} \pm \frac{3}{8}\frac{\rho_N}{f_K^2}$$

+/- dla K^+K^0 / $K^-\bar{K}^0$

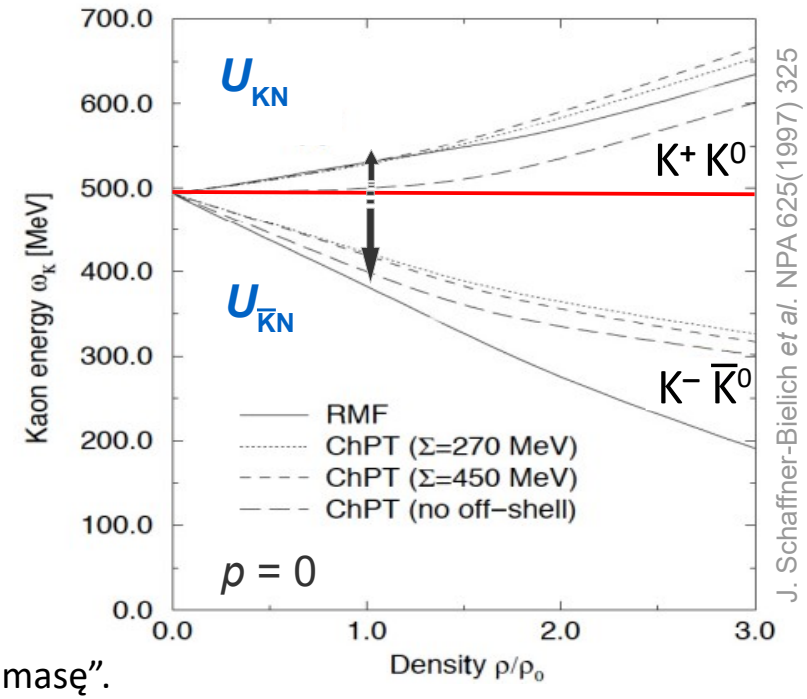
- Uprośćmy sytuację do $p = 0$. Energia kaonu w materii:

$$E_K\left(\boldsymbol{p}=0,\rho_N\right) = \sqrt{m_K^2 - \frac{\Sigma_{KN}}{f_K^2}\rho_N + \left(\frac{3}{8}\frac{\rho_N}{f_K^2}\right)^2} \pm \frac{3}{8}\frac{\rho_N}{f_K^2}$$

Wzór, który w próżni wyglądałby tak: $E_K = m_K$ - teraz ma dodatki od oddziaływań z nukleonami i z kondensatem kwarkowym.
Rezultat (dla $\bar{p} = 0$) pokazuje wykres. Zdefiniujmy **potencjał U_{KN}** ($U_{\bar{K}N}$):

$$U_{KN} = E_K\left(p,\rho\right) - \sqrt{m_{K,\ vac}^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

➡ U_{KN} (ϱ , $p = 0$) > 0 (dla kaonów, K^+ i K^0)
$U_{\bar{K}N}$ (ϱ , $p = 0$) < 0 (dla antykaonów, K^- i $\bar{K}^0$)



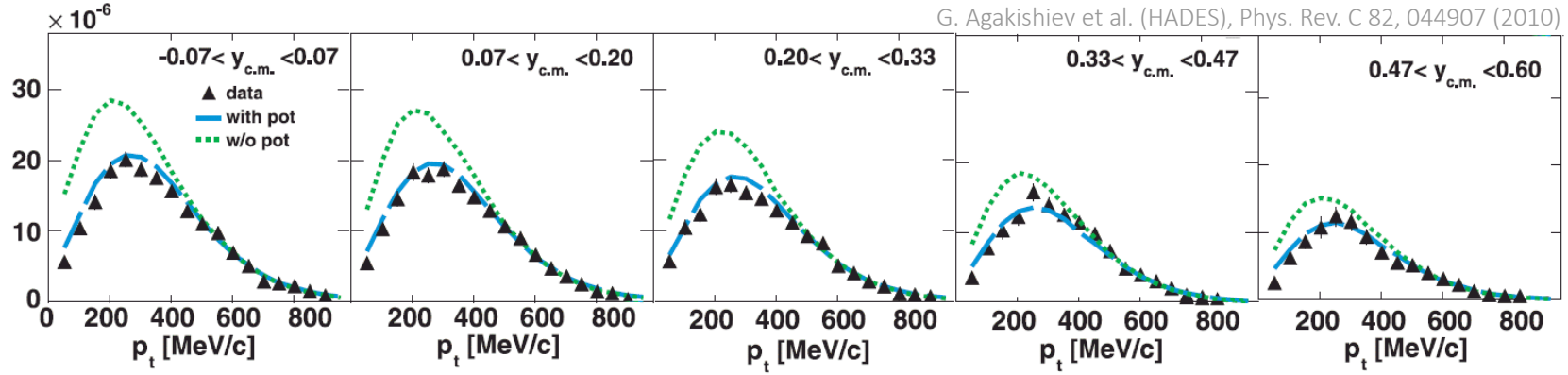
- Wróćmy do zderzeń. Kaon ($K^{+/0}$) powstały w materii będzie miał większą „masę”.
Po zderzeniu, przechodząc do próżni, musi tę nadwyżkę energii oddać.
Najłatwiej - przekazując ją energii kinetycznej ⇨ zatem przyspieszy.
I odwrotnie, powstały antykaon (K^-, $\bar{K}^0$), przechodząc do próżni,
potrzebuje energii do nabrania masy. Pobierze ją z E_{Kin} ⇨ zatem spowolni.

- W eksperymencie mierzymy rozkłady kinematyczne kaonów (E_{kin} / p / p_T - y / m_T - y) .
Chęć udowodnienia „przyspieszenia / spowolnienia” sugeruje, że mamy rozkład referencyjny. A go nie mamy.
Za to, można widma doświadczalne zestawić z modelami transportu.
W symulacji można włączyć i wyłączyć efekty materii.

Eksperymentalne poszukiwanie zmian masy hadronów

- Rozkład $p_T - y$ dla K^0_S emitowanych z Ar+KCl @ T_{Beam} = 1.76 *A* GeV

G. Agakishiev et al. (HADES), Phys. Rev. C 82, 044907 (2010)



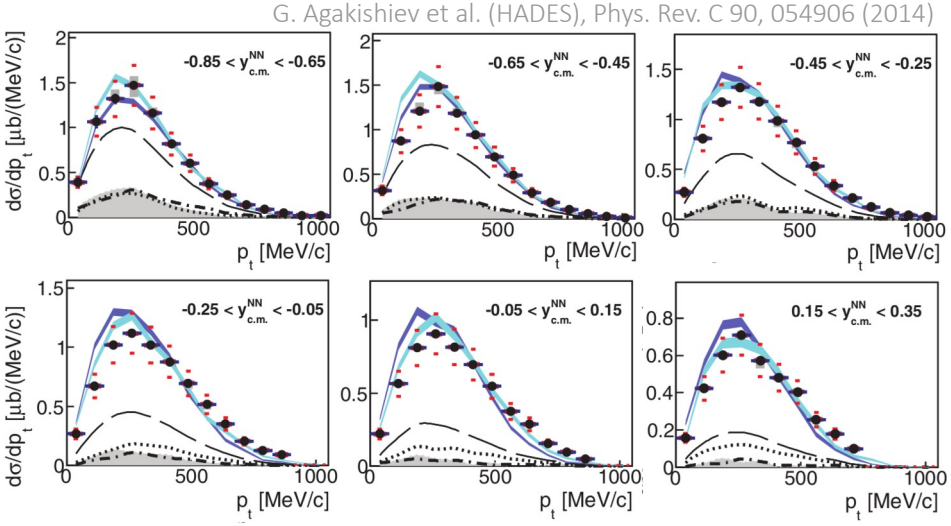
Porównanie z modelem transportu **IQMD**:

$U_{KON}(\varrho_0)$ = 0 MeV

$U_{KON}(\varrho_0)$ = 46 MeV

- Rozkład $p_T - y$ dla K^0_S emitowanych z p+Nb @ T_{Beam} = 3.5 GeV

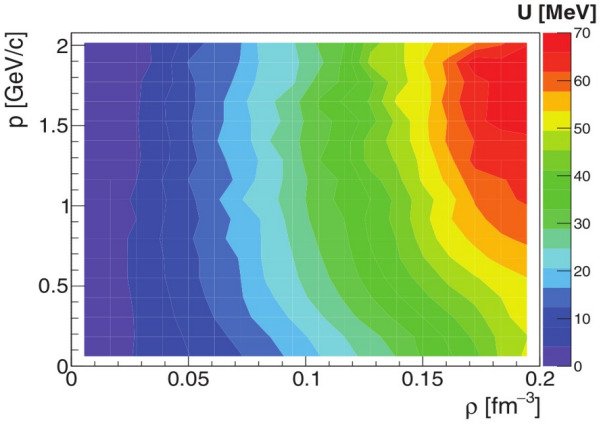
G. Agakishiev et al. (HADES), Phys. Rev. C 90, 054906 (2014)



Porównanie z modelem transportu **GiBUU**:

U_{KN} = 0 , $\chi^2/\nu \approx 9$

U (ChPT) , $\chi^2/\nu \approx 4$



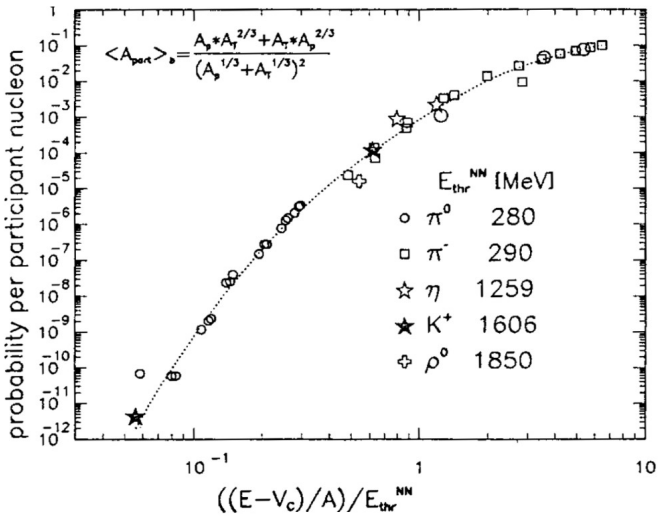
Porównania z powyższymi modelami transportu: **na korzyść** scenariusza ze zmianami masy.

Eksperymentalne poszukiwanie zmian masy hadronów

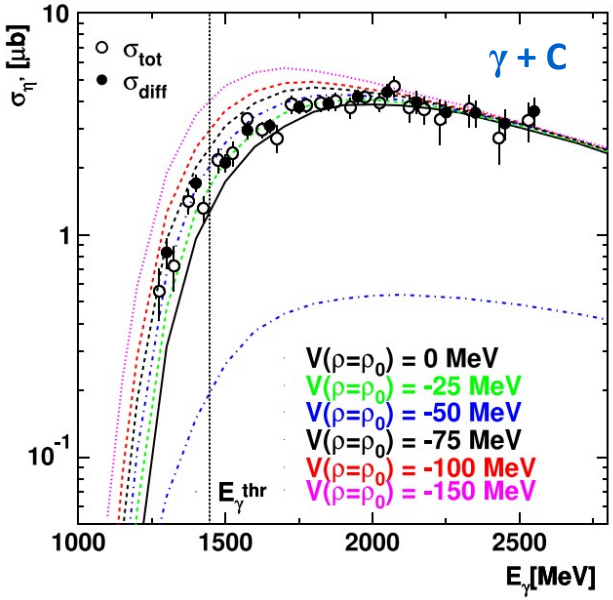
- Przytoczmy „**systematykę Metaga**” : produkcja cząstki w zderzeniu jądrowym możliwa jest przy energiach poniżej en. progowej w kanale NN.
  Wcześniej jako przyczyny: ① ruch Fermiego, ② kanały typu NN → NΔ → NNX .
  Tu pojawia się ③ : efektywna zmiana masy cząstki w ośrodku w por. do próżni.
  Jeśli cząstka jest „cięższa”, to produkcja - trudniejsza. Lżejsza → jest łatwiej.

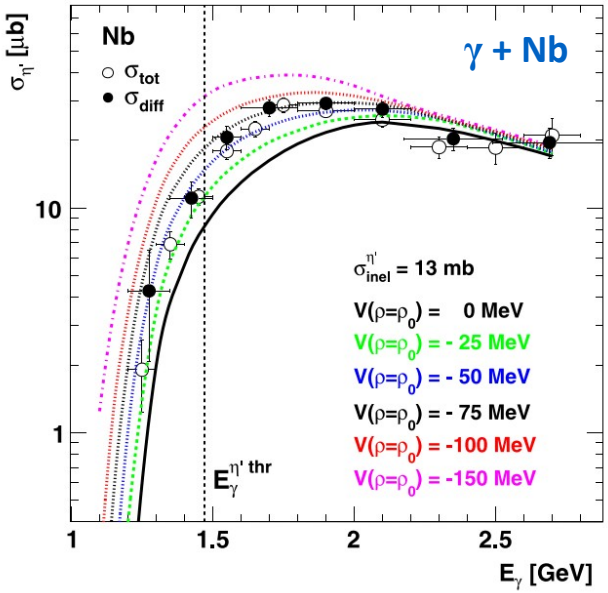
- **Przekrój czynny na produkcję** mezonu η' w zderzeniach $\gamma + {}^{12}C$ oraz $\gamma + {}^{93}Nb$.
  Na poziomie elementarnym, jest to reakcja $\gamma + N \rightarrow N + \eta'$.
  Wejście fotonu do jądra - nie niszczy go. Reakcja próbkuje więc $\varrho \lesssim \varrho_0$.

V.Metag, Prog. Part. Nucl. Phys. 30, 75 (1993)



V. Metag et al., Prog. Part. Nucl. Phys. 97, 199 (2017)





① Widać produkcję podprogową.

② Porównanie z obliczeniami modelowymi: $\sigma_{\gamma A}$ składa się z $\sigma_{\gamma N}$ + ZZE „w materii -vs- w próżni” gdzie do LHS wchodzi $U_{\eta' N}$

③ do kompletu, analiza rozkładów pędu + porównanie z modelem

Średnia wyników obu analiz:

$U_{\eta' N}(\varrho = \varrho_0) = -39 \pm 7$ (stat) ± 15 (syst) MeV