II.1 Rachunek zaburzeń zależny od czasu w Nierelatywistycznej Mechanice Kwantowej

Mech. kwantowa (nierel.)

$$[p_i, x_j] = -i\,\delta_{ij} \qquad \hat{\vec{p}} = -i\nabla$$

$$H\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad H = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} + \hat{V} \;\cancel{\Longrightarrow}\; \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = \frac{i\partial\psi}{\partial t}$$

w obecności pola e-m

$$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$$

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + i\frac{q}{m}\vec{A}\cdot\nabla\psi + \frac{q^2}{2m}A^2\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

1-ego rach. zaburzeń:

$$\begin{cases} H = H_0 + V(\bar{x}, t) \\ H_0 u_n = E_n u_n \end{cases} \qquad \psi(\bar{x}, t) = \sum a_n(t) u_n(\bar{x}) e^{-iE_n t}$$

$$w_{fi} = \frac{1}{i}\int\int d_3x\, dt\; u_f^*(\bar{x}) e^{+iE_f t}\, V(\bar{x}, t) u_i(\bar{x}) e^{-iE_i t}$$

Przykłady: ① $V = V(\bar{x})$

$$w_{fi} = \frac{1}{i} V_{fi}\, 2\pi\,\delta(E_f - E_i)$$

② $V \sim e^{-i\omega t}\, V(\bar{x}) \to E_f > E_i$ abrorbcja energii z pola

$$I_t = \int dt\, e^{+iE_f t} e^{-i\omega t} e^{-iE_i t} = 2\pi\,\delta(E_f - \omega - E_i)$$

③ $V \sim e^{+i\omega t}$ $\qquad E_f < E_i$

$$I_t = (2\pi)\,\delta(E_f + \omega - E_i)$$ emisja energii pola.

Równanie Pauliego: $\psi(\bar{x}, t) = \chi\,\phi(\bar{x}, t) \qquad \chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + \frac{ge}{2m}\vec{S}\cdot\vec{B}\right)\psi = E\psi \qquad g = 2 \quad s = \tfrac{1}{2}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad g = 1 \quad l = 0, 1, \ldots$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad \text{oraz} \quad [S_i, S_j] = i\,\varepsilon_{ijk} S_k$$

NQM

LIPS= Lorentz Invariant Phase Space

$$d\sigma = \frac{1}{4E\omega|\vec{v}|}\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|M_{s,s'}|\,dLIPS =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(k\cdot p)^2 - m_a{}^2 m_b{}^2}}\frac{1}{2}\sum_{s,s'}|M_{s,s'}|\,dLIPS$$

$$dLIPS = (2\pi)^4\,\delta^4(k' + p' - k - p)\frac{d_3p'}{(2\pi)^3\,2E'}\frac{d_3k'}{(2\pi)^3\,2\omega'}$$

Złota reguła Fermiego

$$[H_0 + V(\vec{x},t)]\psi = +i\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

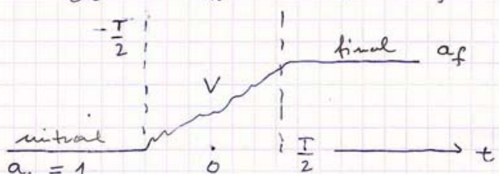
$$\psi = \sum a_n(t)\phi_n(\vec{x})e^{-iE_n t}$$

$$+i\frac{\partial\psi}{\partial t} = +i\sum\frac{da_n}{dt}\phi_n e^{-iE_n t} + \cancel{i\sum a_n\phi_n e^{-iE_n t}(-iE_n)}$$

$$= \hat{H}_0\sum a_n\phi_n(\vec{x})e^{-iEt} + V(\vec{x},t)\sum a_n\phi_n e^{-iE_n t}$$

$$\phi_f^* \Big| \; i\sum\frac{da_n}{dt}\phi_e e^{-iE_n t} = \sum_n V(\vec{x},t)a_n\phi_n e^{-iE_n t}$$

$$\frac{da_f}{dt} = -i\sum_n a_n(t)\int d_3x\,\phi_f^* V(\vec{x},t)\phi_n e^{-i(E_f-E_n)t}$$



Stany i i f są s.wł. $\hat{H}_0$!

Przybliżenie słuszne gdy $V \ll H_0$ i $\frac{T}{2}$ małe

$a_i = 1$

$a_n = 0 \quad n \neq i$

$$\frac{da_f}{dt} = -i\int d_3x\,\phi_f^* V\phi_i e^{i(E_f-E_i)t}$$

możemy zcałkować po czasie

$$a_f(t) = -i\int_{-T/2}^{t} dt'\int d_3x\,\phi_f^* V\phi_i e^{i(E_f-E_i)t}$$

$$T_{fi} = a_f\left(\frac{T}{2}\right) = -i\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt'\underbrace{\int d_3x\,[\phi_f^* V\phi_i]}_{V_{fi}} e^{i(E_f-E_i)t}$$

jeżeli $V(\vec{x})$: $-iV_{fi}\int_{-\infty}^{T/2} e^{i(E_f-E_i)t'}dt'$

lub (w przybliżeniu gdy $a_f \ll 1$)

$$T_{fi} = -i\int d_4x\,\phi_f^*(x)V(x)\phi_i(x)$$

$$W_{fi} = \lim_{T\to\infty}\frac{|T_{fi}|^2}{T} = 2\pi|V_{fi}|^2\delta(E_f - E_i)$$

$V = V(\vec{x})$

$\rho(E_f)$ gęstość stanów końcowych

Złota Reguła Fermiego I rząd r. zaburzeń

$$T_{fi} = -i\int d_4x\,\phi^*(x)V(x)\phi(x) = a_f\left(\frac{T}{2}\right)$$

$$W_{fi} = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{|T_{fi}|}{T}\right) = 2\pi\delta(E_f - E_i)|V_{fi}|^2\rho(E_f)$$

II rząd rachunku zaburzeń

$$\frac{da_f}{dt} = \ldots (-i)^2 \left[\sum_{n \neq i} V_{ni} \int_{-T/2}^{t} dt' \, e^{i(E_n - E_i)t'} \right] V_{fn} \, e^{i(E_f - E_i)t}$$

$$T_{fi} = \ldots - \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \cancel{\int_{-T/2}^{t} dt'}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{i(E_f - E_i)t} \underbrace{\int_{-\frac{T}{2} \to -\infty}^{t} e^{i(E_n - E_i)t'} dt'}_{}$$ uzbieżnienie całki

$$\frac{+i\, e^{i(E_n - E_i - i\varepsilon)t}}{(E_n - E_i - i\varepsilon)}$$

$$T_{fi} = \ldots - 2\pi i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\varepsilon} \delta(E_f - E_i)$$

$$V_{fi} \Rightarrow V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\varepsilon} V_{ni} + \ldots$$

II rząd rach. zaburzeń

Strumień/Prąd cząstek (nierelatywistyczne)

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \text{cząstka swobodna}$$

$$\rho = |\psi|^2 \qquad \rho\, d_3x = \text{gęstość p-stwa}$$

Wypływ cząstek z pewnego obszaru V: równanie ciągłości

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, d_3x = -\int_S \vec{j}\cdot\hat{n}\, dA = -\int_V \nabla\cdot j\, d_3x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\vec{j} = 0 \qquad\qquad \frac{1}{2m}\nabla^2\psi^* = -i\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$$

Wyznaczenie $\vec{j}$:

$$\rho = \psi^*\psi$$

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t} = i\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + i\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= -\left(\frac{\nabla^2\psi^*}{2m}\right)\psi + \psi^*\frac{\nabla^2}{2m}\psi = \frac{1}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

Czyli

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{i}{2m}\left(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi\right) = 0 \qquad \text{czyli} \qquad \vec{j} = -\frac{i}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla^*\psi^*\right)$$

Swobodna cząstka o $(E, \vec{p})$

$$\psi = N e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$$

$$\rho = |N|^2 \qquad \vec{j} = -\frac{i}{2m}\left[|N|^2 e^{i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}\, i\vec{p}\, e^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})} - |N|^2 e^{-ip\cdot x}(-i\vec{p})e^{ip\cdot x}\right]$$

$$= \frac{\vec{p}}{m}|N|^2$$

Normalizacja: nierelatywistyczny strumień prawdopodobieństwa