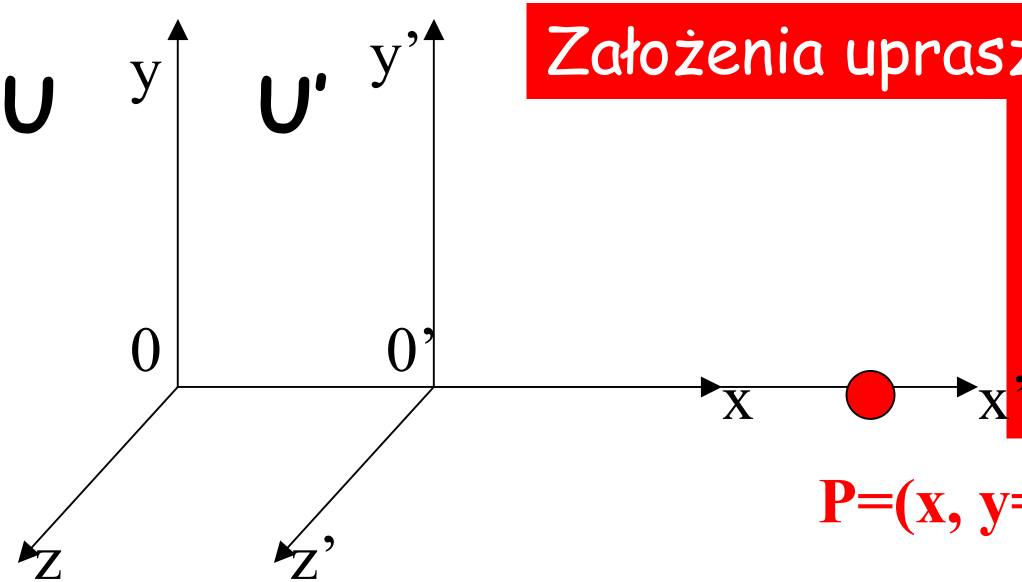
III.2 Transformacja Lorentza położenia i czasu.

- **Transformacja Lorentza**
- **Geometria czasoprzestrzeni- interwał.**
- **Konsekwencje transformacji Lorentza: dylatacja czasu i skrócenie długości.**

Transformacja Lorentza położenia i czasu



Założenia upraszczające

- P leży na osi OX i O′X′
- Prędkość względna V w U skierowana jest wzdłuż OX.

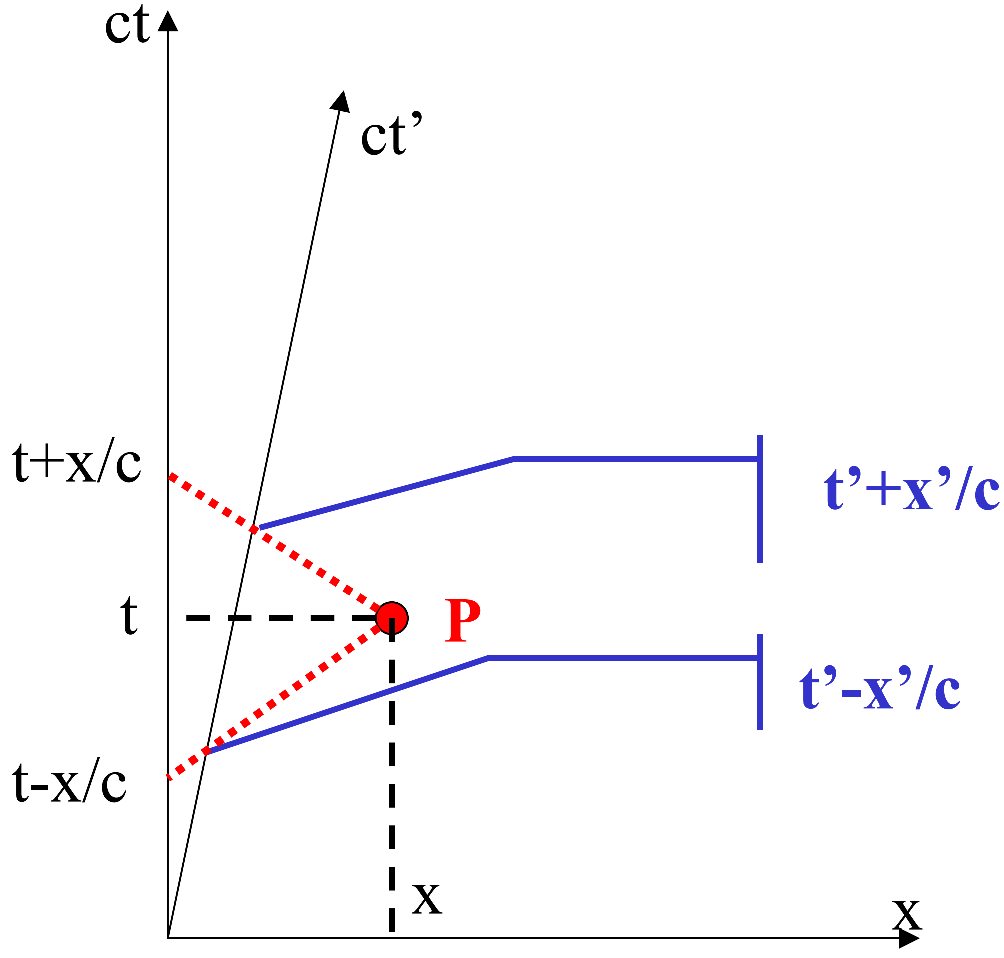
P=(x, y=0,z=0)

Transformacja Lorentza opisuje sytuację, w której dwóch obserwatorów w dwóch układach odniesienia U i U′ poruszających się względem siebie jednostajnie i prostoliniowo z prędkością V mierzy położenie i czas pewnego zdarzenia P.

Transformacja Lorentza to wzory pozwalające przeliczyć położenie i czas tego zdarzenia mierzonego w U′ na położenie i czas w U i na odwrót.

O i O' posługują się metodą radarową,

żeby zmierzyć położenie punktu P (leżącego na OX) i czas dojścia do niego sygnału świetlnego



O i O′ posługują się metodą radarową...

O wysyła w t_1= t-x/c sygnał, który mija O′ w czasie t'_1=t′-x/c , odbija się od P w czasie t, mija O′ w czasie t'_2=t′+x′/c i dociera do O w czasie t_2=t+x/c.

O stwierdza, że zdarzenie dojścia sygnału do P zaszło w $x=c(t_2-t_1)/2$ i $t=(t_1+t_2)/2$,

zaś O′, że w $x' = c(t'_2-t'_1)/2$ i $t'=(t'_1+t'_2)/2$

Stosując wzory metody radarowej:

$$t'_1 = t'-x/c = \gamma(1+\beta)\, t_1 = \gamma(1+\beta)\,(t - x/c)$$

$$t_2 = t + x/c = \gamma(1+\beta)\, t'_2 = \gamma(1+\beta)(t'+x'/c)$$

Rozwiązując ten układ równań…

Dostajemy wyrażenie na transformację Lorentza dla zdarzenia P leżącego na osiach OX i O′X′:

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \text{ gdzie } \beta = V\!\Big/\!c \text{ i } \gamma = \left(\sqrt{1\text{-}\beta^2}\right)^{-1}$$

Transformacja odwrotna- P(O) w funkcji P(O'): należy zamienić znak prędkości V

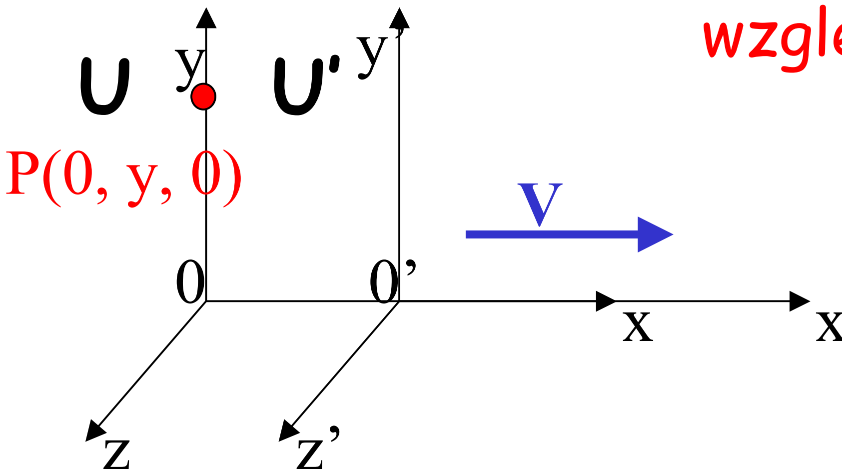
Dla małych prędkości $\beta \to 0; \gamma \to 1$

I transformacja Lorentza przechodzi w nierelatywistyczną <u>transformację Galileusza</u>:

$$x' = x - Vt$$

$$t' = t$$

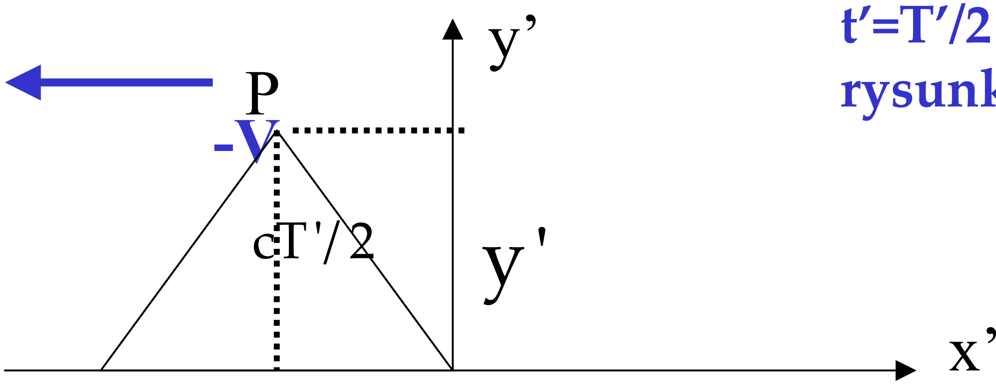
Co będzie gdy zdarzenie P zachodzi w punkcie na płaszczyźnie prostopadłej do wektora prędkości względnej **V**?



Niech punkt P spoczywa w U. Obserwator O stosuje metodę radarową, żeby wyznaczyć (y,t): mierząc czas T przelotu światła tam i z powrotem do P: y=cT/2, t=T/2

W U′ ta sama metoda daje y′=cT′/2 , t′=T′/2 ale t′=γ t co widać z dolnego rysunku i ostatecznie:

$$y' = \frac{cT'}{2}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{cT'}{2\gamma} = \frac{cT\gamma}{2\gamma} = y$$



$$x' = -VT'/2$$

Współrzędne zdarzeń prostopadłe do **V** nie ulegają zmianie w wyniku tr. Lorentza

Ostatecznie dostajemy:

$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \text{ gdzie } \beta = V\big/c \text{ i } \gamma = \left(\sqrt{1\text{-}\beta^2}\right)^{-1}$$

Geometria czasoprzestrzeni- interwał.

Ponieważ prędkość światła wynosi c w U i U′ właściwie nie musimy dowodzić, że wyrażenie zwane interwałem:

$$s^2 = (ct)^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

przedstawiające równanie frontu fali świetlnej wychodzącej z O w chwili t=0 jest <u>niezmiennikiem transformacji Lorentza:</u>

$$s^2 = (ct)^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = s'^2 = (ct')^2 - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)$$

Można to sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, stosując wzory na ct′ i x′ wyprowadzone powyżej.

Interwał dwóch zdarzeń

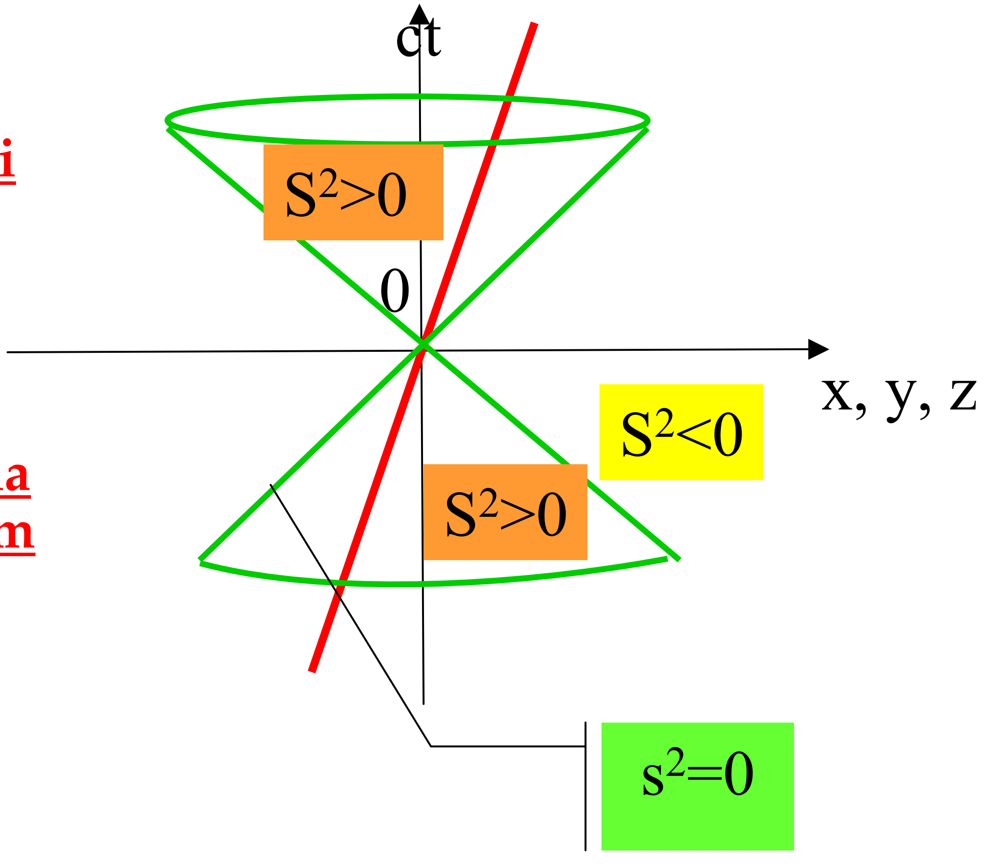
Interwał dwóch zdarzeń, P_1 i P_2 , $-\Delta s^2 = s_{12}{}^2$ tworzymy w następujący sposób:

$$\Delta s^2 = s_{12}{}^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{r})^2$$

Δs^2 jest niezmiennikiem Transformacji Lorentza, a więc m.in.. żadna transformacja Lorentza nie może zmienić znaku Δs^2 czyli zmienić związku przyczynowo- skutkowego dwóch zdarzeń.

Podział przestrzeni Minkowskiego na obszary o ustalonym znaku interwału s^2

- $s^2>0$ – interwał czasopodobny, <u>obszary przeszłości i przyszłości</u>
- $s^2<0$ – interwał przestrzennopodobny, <u>obszar teraźniejszości</u>
- $s^2=0$ interwał zerowy, stożek świetlny, <u>zdarzenia, które można połączyć z 0 sygnałem świetlnym</u>



Znak interwału i przyczynowośc

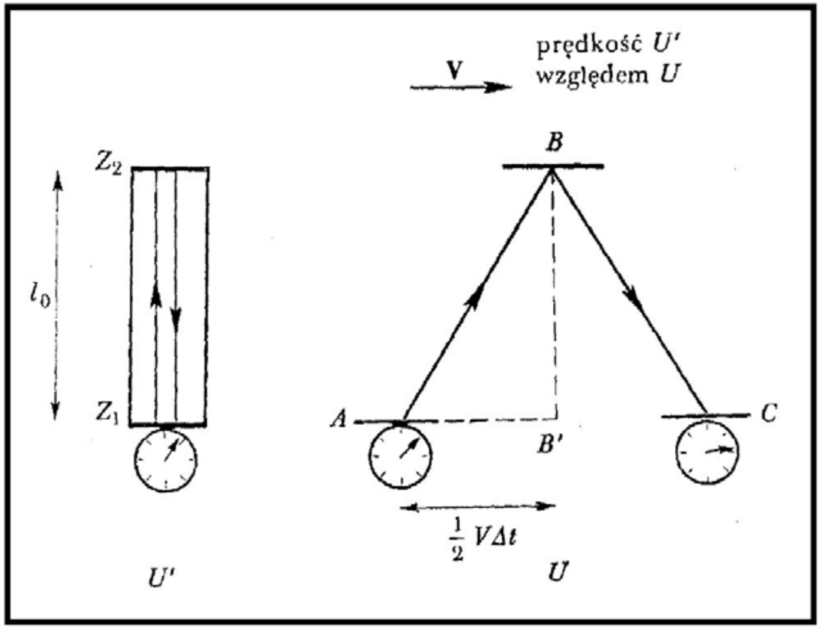
Pary zdarzeń możemy więc podzielić na:

– czasopodobne $\Delta s^2 > 0$, mogące pozostawać w związku przyczynowo- skutkowym. Możemy znaleźć taki UO, że oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu ale w różnych czasach. Nie możemy odwrócić kolejności zdarzeń w żadnym UO.

–przestrzennopodobne $\Delta s^2 < 0$, nie mogące pozostawać w takim związku. Możemy znaleźć taki UO, że oba zdarzenia zachodzą w tym samym czasie ale w różnych miejscach.

–Zerowe, na stożku świetlnym $\Delta s^2 = 0$

Dylatacja czasu



W U′ znajduje się zegar „radarowy”: światło biega między zwierciadłami Z_1 i Z_2, licznik zlicza przyjścia impulsu świetlnego do Z_1.Stąd $\Delta t' = 2l_0/c$.

W układzie U, w którym zegar porusza się z prędkością V, światło pokonuje dłuższą drogę i dostaje on $\Delta t = 2l_0/\sqrt{c^2 - V^2}$

Dla obserwatora O zegar O′ chodzi wolniej:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \Delta t'$$

Pozorny brak symetrii

Dlaczego w układzie poruszającym czas miałby płynąć wolniej? Czy wszystkie układy nie są równoważne? Żaden nie powinien być wyróżniony.

W rozważanym zagadnieniu sytuacja nie jest symetryczna:

- **W układzie spoczynkowym zegara U′ pomiar następuje w 1 miejscu, O′ używa więc jednego zegara.**
- **W układzie U obserwator musi użyć dwóch zsynchronizowanych zegarów w dwóch miejscach.**
- **Zegary O nie są poprawnie zsynchronizowane dla O′.**
- **O′ także stwierdzi, że względem jego zsynchronizowanych zegarów czas O płynie wolniej.**

Dylatacja czasu odgrywa ważną rolę w świecie nietrwałych cząstek elementarnych

Miony- nietrwałe leptony o średnim czasie życia $\tau = 2.2\,\mu s$

rozpadają się wg. schematu:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \overline{\nu}_\mu$$

$$\mu^- \rightarrow e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu$$

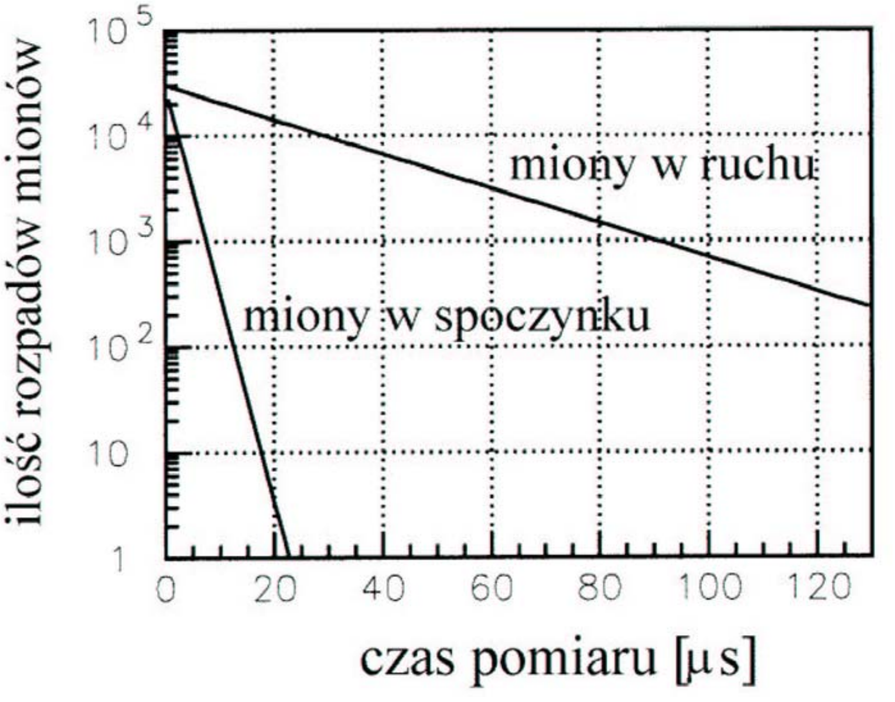
Liczba mionów pozostałych po czasie t- N(t) opisywana jest prawem zaniku promieniotwórczego:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

Energetyczne miony wytwarzane są na dużych wysokościach w atmosferze w rozpadów mezonów π, które powstały w oddziaływaniach wysokoenergetycznego promieniowania kosmicznego z atmosferą.

Gdyby nie było dylatacji czasu średni zasięg mionów byłby mniejszy od $c\tau = 658\,\mathrm{m}$ **.**

W wyniku dylatacji czasu miony żyją w układzie Ziemi γ>1 razy dłużej. Dla mionów o znacznych pędach czynnik γ może wynosić kilka tysięcy; takie miony z łatwością docierają do powierzchni Ziemi.



Dylatacja czasu...

w czasie lotów samolotem dookoła Ziemi została bezpośrednio zmierzona za pomocą dokładnych zegarów atomowych w 1972 w eksperymencie Hafele i Keatinga. Wyniki potwierdziły wzór na dylatację czasu.

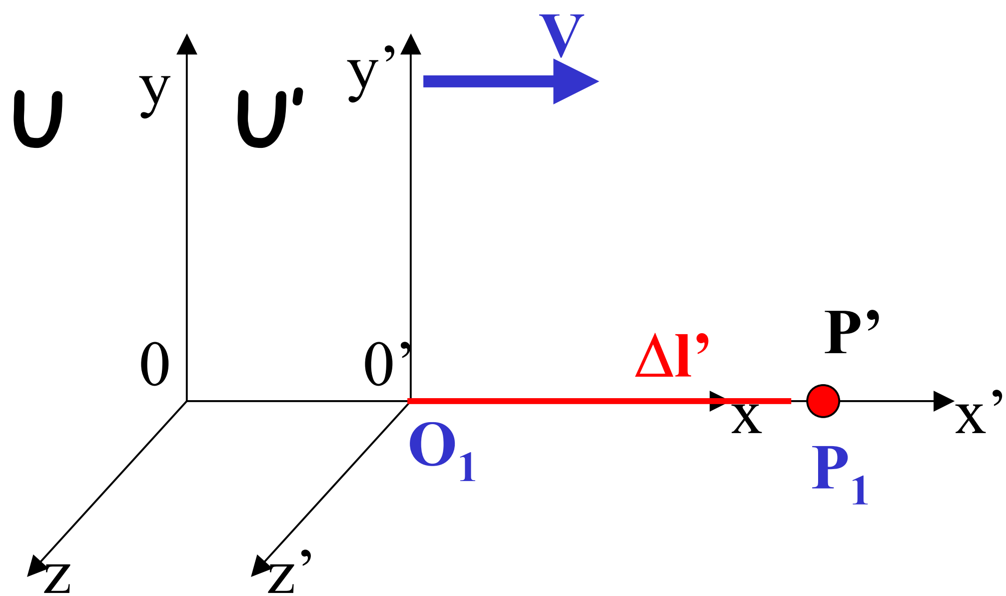
Obserwator O w U chce zmierzyć odcinek O'P' o długości Δl' spoczywający w U'.

Obserwator O musi <u>jednocześnie</u> wyznaczyć położenia końców poruszającego się odcinka w swoim układzie.

Może posłużyć się siecią zsynchronizowanych zegarów w pobliżu punktów O_1 i P_1 oraz sygnałami radarowymi.

Skrócenie Lorentza

W U w czasie t_O:
O' przelatuje w pobliżu O_1
P' przelatuje w pobliżu P_1



cd...

Współrzędne w U	Współrzędne w U′
$x_{O'}=x_O$, $t_{O'}=t_O$	$x'_{O'}=0$, $t'_{O'}=t'_1$
$x_{P'}=x_P$, $t_{P'}=t_{O'}$	$x'_{P'}=x'=$ $\Delta l'$, $t'_{P'}=t'$

Stosując tr. Lorentza z U do U′ otrzymujemy:

$$x'_{O'} = 0 = \gamma\left(x_{O'} - Vt_{O'}\right)$$

$$\Delta l' = x'_{P'} = \gamma\left(x_{p'} - Vt_{O'}\right)$$

$$\Delta l' = x'_{P'} - x'_{O'} = \gamma\left(x_{p'} - x_{O'}\right) = \gamma\Delta l$$

Obserwator O zmierzy krótszą długość niż Obserwator O’, w którego układzie obiekt spoczywa.

Pomiar długości i fotografia (widzenie)...

Obrazy poruszających się przedmiotów powstają gdy fotony z ich punktów docierają niemal jednocześnie do migawki aparatu.

Drogi, które przebywają fotony są, na ogół, różne.

Do migawki docierają więc fotony, które <u>niejednocześnie</u> opuściły Końce fotografowanego obiektu.

Nastąpi więc deformacja kształtu obiektu.

<u>Istnieje więc zasadnicza różnica miedzy pomiarem długości i widzeniem czy fotografią.</u>