

Kolokwium II z Mechaniki Kwantowej R

12 styczeń, 13:00 – 13 styczeń, 13:00

Należy wybrać jedno zadanie z trzech, szczegółowe rozwiązanie przesłać na adres krp@fuw.edu.pl lub dostarczyć do pokoju 336 na Hożej.

1. Wyznacz energię stanu podstawowego atomu helu korzystając z metody wariacyjnej. Jako funkcję próbną przyjąć

$$\phi = N (e^{-\alpha r_1 - \beta r_2 - \gamma r_{12}} + e^{-\alpha r_2 - \beta r_1 - \gamma r_{12}})$$

gdzie $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, oraz α, β i γ nieliniowe rzeczywiste parametry. W celu obliczenia elementów macierzowych można skorzystać ze wzoru:

$$\frac{1}{16\pi^2} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \frac{e^{-\alpha r_1 - \beta r_2 - \gamma r_{12}}}{r_1 r_2 r_{12}} = \frac{1}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma)}$$

W odpowiedzi, poza energią podać wartości nieliniowych parametrów. Wskazówka: warto użyć programu do obliczeń symbolicznych, np. *Mathematica*.

2. Rozważmy cząsteczkę H_2^+ , elektron w polu dwóch protonów w odległości R od siebie. Stan symetryczny $\phi_S(r_1, r_2) = \phi_S(r_2, r_1)$ ma energię E_S i stan antysymetryczny $\phi_A(r_1, r_2) = -\phi_A(r_2, r_1)$ ma energię E_A . Znaleźć asymptotykę $\delta E(R) = E_A(R) - E_S(R)$ dla dużych odległości R .
3. Znaleźć metodą algebraiczną energie własne trójwymiarowego oscylatora harmonicznego w jednorodnym polu magnetycznym,

$$H = \frac{\vec{\pi}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \vec{r}^2}{2},$$

gdzie $\vec{\pi} = \vec{p} - e \vec{A}$

Wskazówki:

- (a) Przyjąć $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$ i $\vec{B} = (0, 0, B)$
- (b) Pokazać że $[\pi^i, \pi^j] = i e \hbar \epsilon^{ijk} B^k$
- (c) Pokazać że poniżej zdefiniowane operatory

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(z + \frac{i\pi_z}{m\omega} \right) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\Omega}} (\pi_x + i\pi_y) \\ d &= \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} \left(x - iy + \frac{i}{m\Omega} (\pi_x - i\pi_y) \right) \end{aligned}$$

gdzie $\Omega = eB/m$, spełniają reguły komutacyjne $1 = [a, a^+] = [b, b^+] = [d, d^+]$ i pozostałe komutatory znikają.

- (d) Wyrazić Hamiltonian H przy pomocy tych operatorów
- (e) Znaleźć transformację liniową A

$$\begin{pmatrix} b \\ d^+ \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f \\ g^+ \end{pmatrix},$$

taką że nowe operatory f i g spełniają relacje komutacyjne $1 = [f, f^+] = [g, g^+]$, $0 = [f, g] = [f, g^+]$ i w Hamiltonianie znikają wyrażenia mieszane.