

# RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

## I ELEMENTY LOGIKI

Działania na zdaniach: Negacja, alternatywa, alternatywa wykluczająca, koniunkcja, implikacja (np. różnica między implikacją a potocznie rozumianym wynikaniem), tożsamość. Pojęcie tautologii (ważne tautologie: prawo podwójnego przeczenia, prawa de Morgana, prawo transpozycji). Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory. Indukcja matematyczna. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

## II CIĄGI

Ciąg. Rodzaje ciągów (rosnący, niemalejący, malejący, nierosnący, monotoniczny, ściśle monotoniczny, ograniczony). Granica ciągu. Ciąg zbieżny (tw. Cauchy'ego). Tw. o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów. Tw. o zachowaniu nierówności. Tw. o trzech ciągach. Tw. o zbieżności ciągu monotonicznego (bez dowodu). Liczba  $e$  (jako granica ciągu, jako suma szeregu i jako przykład liczby niewymiernej). Ciągi rozbieżne do  $\pm\infty$ .

## III FUNKCJE CIĄGŁE

Przestrzeń metryczna. Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej. Otoczenie i sąsiedztwo. Klasyfikacja punktów zbioru (punkty wewnętrzne, skupienia i izolowane). Zbiory otwarte, domknięte i ograniczone. Definicje granicy funkcji (ciągowa i otoczeniowa). Dwie (równoważne) definicje ciągłości funkcji (Heinego i Cauchy'ego). Tw. o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o ciągłości superpozycji funkcji. Twierdzenia (1) o ciągłości funkcji odwrotnej i (2) Weierstrassa (oba bez dowodów). Tw. o własności Darboux funkcji ciągłych. Tw. o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

## IV POCHODNA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Pochodna funkcji. Geometryczna interpretacja pochodnej. Tw. o ciągłości funkcji różniczkowalnej. Tw. o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o pochodnej superpozycji funkcji. Tw. o pochodnej funkcji odwrotnej. Styczne i normalne do krzywej płaskiej. Twierdzenia o wartości średniej: Rolle'a i Lagrange'a. Reguła de l'Hospitala.

## V BADANIE PRZEBIEGU FUNKCJI

Ekstremum. Tw. o warunku dostatecznym istnienia ekstremum. Tw. o znikaniu  $df/dx$  w punkcie ekstremum. Punkt przegięcia. Tw. o ekstremach i punktach przegięcia funkcji dostatecznie wiele razy różniczkowalnej. Wypukłość i wklęsłość. Asymptoty. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

## VI SZEREG TAYLORA

Szereg Taylora dla funkcji jednej zmiennej i dla funkcji wielu zmiennych. Postać reszty. Przykłady.

## **VII CAŁKOWANIE FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ**

Całka nieoznaczona. Całkowanie przez części i przez podstawienie. Podział i jego średnica. Suma całkowita Riemanna. Całka oznaczona. Twierdzenie Riemanna o całkowalności funkcji. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego. Całki niewłaściwe. Długość łuku krzywej płaskiej, powierzchnia i objętość bryły obrotowej. Przykłady.

## **VIII SZEREGI LICZBOWE**

Suma nieskończonego szeregu. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Twierdzenie o porównywaniu szeregów. Kryteria d'Alemberta, Cauchy'ego i Leibniza zbieżności szeregów.

## **IX SZEREGI FUNKCYJNE**

Szeregi funkcyjne. Szeregi potęgowe i promień zbieżności. Niektóre funkcje definiowane przez szeregi, np. funkcja  $\exp$ .

## **X RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE**

Równania różniczkowe zwyczajne. Zagadnienie Cauchy'ego. Równania o rozdzielonych zmiennych. Metoda uzmiennienia stałej. Równania różniczkowe liniowe jednorodne i niejednorodne. Metoda zgadywania. Układy równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach. Przykłady.

## **XI FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH. GRANICE, CIĄGŁOŚĆ**

Przestrzeń euklidesowa. Norma, metryka indukowana. Funkcje wielu zmiennych. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych. Przykłady.

## **XII POCHODNE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH**

Pochodne cząstkowe, pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Pochodna mocna (Frecheta). Pochodna kierunkowa. Gradient i jego własności.

## **XIII EKSTREMA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH**

Ekstrema funkcji wielu zmiennych, warunek konieczny i dostateczny. Największa i najmniejsza wartość funkcji wielu zmiennych. Ekstremum związane. Metoda mnożników Lagrange'a.

## **XIV FUNKCJE UWIKŁANE**

Określenie funkcji uwikłanej. Pochodna funkcji uwikłanej. Przykłady.

## **XV CAŁKI WIELOKROTNE**

Podział obszaru i jego średnica. Suma całkowita Riemanna. Całka wielokrotna. Twierdzenie o całkowalności. Wyznaczenie całki wielokrotnej (szkie postępowania na przykładzie całki podwójnej). Zamiana zmiennych.