

TEMATY EGZAMINACYJNE Z RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

I ELEMENTY LOGIKI

Działania na zdaniach: Negacja, alternatywa, alternatywa wykluczająca, koniunkcja, implikacja (np. różnica między implikacją a potocznie rozumianym wynikaniem), tożsamość. Pojęcie tautologii (ważne tautologie: prawo podwójnego przeczenia, prawa de Morgana, prawo transpozycji). Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory. Indukcja matematyczna. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

II CIĄGI

Ciąg. Rodzaje ciągów (rosnący, niemalejący, malejący, nierosnący, monotoniczny, ściśle monotoniczny, ograniczony). Granica ciągu. Ciąg zbieżny (tw. Cauchy'ego). Tw. o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów. Tw. o zachowaniu nierówności. Tw. o trzech ciągach. Tw. o zbieżności ciągu monotonicznego (bez dowodu). Liczba e (jako granica ciągu, jako suma szeregu i jako przykład liczby niewymiernej). Ciągi rozbieżne do $\pm\infty$.

III FUNKCJE CIĄGŁE

Przestrzeń metryczna. Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej. Otoczenie i sąsiedztwo. Klasyfikacja punktów zbioru (punkty wewnętrzne, skupienia i izolowane). Zbiory otwarte, domknięte i ograniczone. Definicje granicy funkcji (ciągowa i otoczeniowa). Dwie (równoważne) definicje ciągłości funkcji (Heinego i Cauchy'ego). Tw. o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o ciągłości superpozycji funkcji. Twierdzenia (1) o ciągłości funkcji odwrotnej i (2) Weierstrassa (oba bez dowodów). Tw. o własności Darboux funkcji ciągłych. Tw. o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

IV POCHODNA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Pochodna funkcji. Geometryczna interpretacja pochodnej. Tw. o ciągłości funkcji różniczkowalnej. Tw. o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o pochodnej superpozycji funkcji. Tw. o pochodnej funkcji odwrotnej. Styczne i normalne do krzywej płaskiej. Twierdzenia o wartości średniej: Rolle'a i Lagrange'a. Reguła de l'Hospitala.

V BADANIE PRZEBIEGU FUNKCJI

Ekstremum. Tw. o warunku dostatecznym istnienia ekstremum. Tw. o znikaniu df/dx w punkcie ekstremum. Punkt przegięcia. Tw. o ekstremach i punktach przegięcia funkcji dostatecznie wiele razy różniczkowalnej. Wypukłość i wklęsłość. Asymptoty. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

VI SZEREG TAYLORA

Szereg Taylora dla funkcji jednej zmiennej i dla funkcji wielu zmiennych. Postać reszty. Przykłady.

VII CAŁKOWANIE FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Całka nieoznaczona. Całkowanie przez części i przez podstawienie. Podział i jego średnica. Suma całkowita Riemanna. Całka oznaczona. Twierdzenie Riemanna o całkowalności funkcji. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego. Całki niewłaściwe. Długość łuku krzywej płaskiej, powierzchnia i objętość bryły obrotowej. Przykłady.

VIII SZEREGI LICZBOWE

Suma nieskończonego szeregu. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Twierdzenie o porównywaniu szeregów. Kryteria d'Alemberta, Cauchy'ego i Leibniza zbieżności szeregów.

IX SZEREGI FUNKCYJNE

Szeregi funkcyjne. Szeregi potęgowe i promień zbieżności. Niektóre funkcje definiowane przez szeregi, np. funkcja $\exp$.

X RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Równania różniczkowe zwyczajne. Zagadnienie Cauchy'ego. Równania o rozdzielonych zmiennych. Metoda uzmiennienia stałej. Równania różniczkowe liniowe jednorodne i niejednorodne. Metoda zgadywania. Układy równań różniczkowych liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach. Przykłady.

XI FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH. GRANICE, CIĄGŁOŚĆ

Przestrzeń euklidesowa. Norma, metryka indukowana. Funkcje wielu zmiennych. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych. Przykłady.

XII POCHODNE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Pochodne cząstkowe, pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Pochodna mocna (Frecheta). Pochodna kierunkowa. Gradient i jego własności.

XIII EKSTREMA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Ekstrema funkcji wielu zmiennych, warunek konieczny i dostateczny. Największa i najmniejsza wartość funkcji wielu zmiennych. Ekstremum związane. Metoda mnożników Lagrange'a.

XIV FUNKCJE UWIKŁANE

Określenie funkcji uwikłanej. Pochodna funkcji uwikłanej. Przykłady.

XV CAŁKI WIELOKROTNE

Podział obszaru i jego średnica. Suma całkowita Riemanna. Całka wielokrotna. Twierdzenie o całkowalności. Wyznaczenie całki wielokrotnej (szkieł postępowania na przykładzie całki podwójnej). Zamiana zmiennych.