

Rachunek różniczkowy i całkowy

Przykładowy materiał do pracy własnej

ZADANIE 0.1

Wykazać, że

1.

$$\frac{\cos x}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \sin(2x)$$

2.

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}}$$

3.

$$\sqrt{2 \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin^2 x}} = -1 - \operatorname{ctg} x$$

i określić zbiór wartości x , dla których ta równość zachodzi.

ZADANIE 0.2

Wykazać, że

1.

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

2.

$$\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2x^2$$

3.

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

4.

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

5.

$$2 \arccos \sqrt{\frac{1 + x}{2}} = \arccos x$$

i określić zbiór wartości x , dla których ta równość zachodzi.

ZADANIE 0.3

Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji

1. $y = 5^{\ln x}$
2. $y = 2^{x(x-1)}$
3. $y = (1-x)/(1+x)$

ZADANIE 0.4

Korzystając z definicji granicy ciągu wykazać, że

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ dla $x_n = (2n-1)/(2n+1)$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/3$ dla $x_n = (3n-5)/(9n+4)$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3/5$ dla $x_n = (3n^2+1)/(5n^2-1)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ dla $x_n = (3^n+1)/(3^n+4)$

ZADANIE 0.5

Wyznaczyć granice ciągów:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$ | b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$ |
| c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+n}{4n^2+7} \right)^3$ |
| e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$ | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2-n^3} + n)$ |

ZADANIE 0.6

Wyznaczyć granice funkcji:

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^{7x}$ |

ZADANIE 0.7

Funkcje

$$f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad f(x) = x \operatorname{ctg} x, \quad f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

są nieokreślone dla $x = 0$. Określić $f(0)$ tak, aby funkcje te były ciągłe dla $x = 0$.

ZADANIE 0.8

Określić asymptoty następujących funkcji:

$$y = \frac{5x}{x-3}, \quad y = \frac{3x}{x-1} + 3x, \quad y = \frac{x}{x^2+1}, \quad y = \sqrt{1+x^2} + 2x$$

