

Reguła l'Hospitala:

Zadanie 1.

Wyznacz granice funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^4 - 1}{3 \ln(2x)} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^5)}{x^4} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - e^{-2x}}{\operatorname{tg} 2x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \left(\frac{c}{x} \right) \cdot \ln(a + be^x) \right) \quad (6)$$

Zadanie 2.

Oblicz następujące granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + \sin x)^{\frac{1}{x^3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (16)$$

Badanie przebiegu funkcji:

Zadanie 3.

Wyznacz zbiór wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, której dziedziną jest zbiór $(0, 1) \cup (1, 3)$.

Zadanie 4.

Określ liczbę rozwiązań równania $2x^3 + 3x^2 + 6x - 2 = 0$.

Zadanie 5.

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2-\sin x}}$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Zadanie 6.

Dla jakich wartości parametru a funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$ ma dwa nieujemne rozwiązania?

Zadanie 7.

Wykres funkcji różniczkowalnej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma dokładnie dwie styczne o równaniach: $y = -2$, $y = 3$ równoległe do osi OX . Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, 3)$, $(5, +\infty)$ i malejąca w przedziale $(3, 5)$. Wyznacz ekstrema funkcji f i określ ich rodzaj.

Zadanie 8.

Zbadaj przebieg zmienności funkcji f i sporządź jej wykres:

$$f(x) = x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2} \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5x + 4} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} \quad (21)$$