Zadania z rachunku różniczkowego i całkowego. Seria VI

- **Zadanie 1.** Krzywa $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{4}t^4$ tworzy pętlę. Obliczyć pole wewnątrz tej pętli.
- **Zadanie 2.** Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót dookoła osi x hiperboli $y = \frac{1}{x}$ i ograniczonej płaszczyzną $x = 1$.
- **Zadanie 3.** Obliczyć pole powierzchni bryły obrotowej powstałej przez obrót dookoła osi x krzywej $y = 2x^3$, gdzie $0 \leq x < \infty$.

VII Seria zadań domowych
z Rachunku Różniczkowego i Całkowego

Zad. 1 Obliczyć promień zbieżności szeregów

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(3n)!n^n} x^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + n^2}{5^n + n^3} x^n$.

Zad. 2 Obliczyć sumy szeregów

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(n+1)4^n}$ za pomocą całkowania szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n x^n$ oraz

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)}$ za pomocą całkowania szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n x^{2n}$.

Zad. 3 Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje

a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+2x)}$,

b) $g(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$.

Obliczyć promień zbieżności otrzymanych szeregów.

Wsk. a) skorzystać z rozkładu na ułamki proste,

wsk. b) skorzystać z całkowania rozwinięcia w szereg funkcji $\frac{1}{1+x}$.

DODATKOWE, NIEOBOWIĄZKOWE ZADANIA Z RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

Zad. 1. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$(1 + x)y'' = y'.$$

Odp. $y = \frac{1}{2}C\, x^2 + Cx + C_1$.

Zad. 2. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x\, y' - 2y = x^3 \cos x.$$

Odp. $y = x^2 \sin x + C\, x^2$.

Zad. 3. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y'' - 4y' + 4y = 8\, x^3 - 36x.$$

Odp. $y = 2\, x^3 + 6\, x^2 - 3 + [Ax + B \exp(2x)]$.

Zad. 4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = 3\, x^2 y - x^3 - y^4.$$

Odp. Maksimum lokalne w punkcie (6,3).

Zad. 5. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

w obszarze domkniętym ograniczonym liniami $y = x^2$ i $y = 4$.

Odp. $f(-2,4) = f(2,4) = 32$ i $f(0,0) = 0$.

Zad. 6. Znaleźć najkrótszą odległość między parabolą $y = x^2$ i prostą $x - y - 2 = 0$. Wykorzystać metodę mnożników Lagrange’a.

Odp. $7/(4\sqrt{2})$.