

Zadania domowe nr 2 (8. marca 2019)

Operatory w reprezentacji macierzowej, operatory w przestrzeni Hilberta, notacja Diraca

1. Niech wektory $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$ stanowią bazę ortonormalną w dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej. Zdefiniujmy operator $\hat{A}$ taki, że

$$\begin{aligned}\hat{A}|e_1\rangle &= 2|e_1\rangle - i\sqrt{2}|e_2\rangle, \\ \hat{A}|e_2\rangle &= i\sqrt{2}|e_1\rangle + 3|e_2\rangle.\end{aligned}\tag{1}$$

- Znaleźć macierz operatora $\hat{A}$ w bazie składającej się z wektorów $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$.
 - Czy macierz ta jest hermitowska?
 - Korzystając z zapisanej macierzowo postaci operatora $\hat{A}$, znaleźć jego wartości i wektory własne.
 - Znaleźć unormowane wektory własne.
 - Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, czy powyższe wektory własne są ortogonalne.
2. Obliczyć położeniowe reprezentacje następujących komutatorów: $[\hat{H}_0, \hat{p}]$, $[\hat{H}_0, \hat{x}]$, $[\hat{V}, \hat{p}]$, $[\hat{V}, \hat{x}]$.

W powyższym zadaniu: $\hat{x}$ to operator położenia, $\hat{p}$ to operator pędu, $\hat{H}_0$ to operator energii kinetycznej, a $\hat{V}$ to operator energii potencjalnej.

3. Wiedząc, że reprezentacja położeniowa operatora położenia to $\langle x|\hat{x}|x'\rangle = x\delta(x-x')$ oraz, że przejście między bazą położeniową a pędową jest dane wzorem $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$, podać jak wygląda reprezentacja operatora położenia w bazie pędowej, tzn. wyliczyć $\langle p|\hat{x}|p'\rangle$.