

Zadania domowe nr 3 (13. marca 2019)

Pomiary, studnia potencjału

1. Zakładając, że całkowita energia cząstki $E > 0$, pokaż, że poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe cząstki poruszającej się w nieskończenie głębokiej studni potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < -a \\ 0 & , \quad -a \leq x \leq a \\ \infty & , \quad a < x \end{cases} \quad (1)$$

dane są wzorami:

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

$$\phi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{2k\pi x}{2a}\right), \quad \text{gdy } n = 2k, \quad (3)$$

$$\phi_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right), \quad \text{gdy } n = 2k+1. \quad (4)$$

2. Dla cząstki znajdującej się w stanie

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\phi_0\rangle + \alpha|\phi_1\rangle, \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad (5)$$

gdzie $|\phi_0\rangle$ jest stanem o energii E_0 , a $|\phi_1\rangle$ jest stanem o energii E_1 , znajdź:

- wartości α zapewniające poprawne unormowanie stanu $|\psi\rangle$ (tzn. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$; proszę nie liczyć całek w tym poleceniu);
- prawdopodobieństwo, że pomiar energii układu da wartość E_1 (proszę nie liczyć całek w tym poleceniu);
- średnią energię cząstki w stanie $|\psi\rangle$ (tzn. $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$; proszę nie liczyć całek w tym poleceniu);
- średnie położenie cząstki w stanie $|\psi\rangle$ (tzn. $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$).

Załącz, że zależności położeniowe funkcji falowych dane są funkcjami:

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad (6)$$

$$\phi_1(x) = 2 \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} x, \quad (7)$$

gdzie m, ω to stałe rzeczywiste. Dodatkowo: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$. Powyższe stany są ortonormalne.