

Zadania domowe nr 4: wysłane 22. marca 2019

Ewolucja czasowa, oscylator harmoniczny

1. W chwili początkowej (tj. $t = 0$) cząstka poruszająca się w nieskończenie głębokiej studni potencjału,

$$V_{\infty}(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x \leq a \\ \infty & , \quad a < x \end{cases} \quad (1)$$

znajdowała się w stanie opisanym funkcją falową

$$\Psi(x, t = 0) \equiv \Psi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ Ax(a - x) & , \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \quad x > a \end{cases} \quad (2)$$

Wyznacz stałą normalizacyjną A oraz ewolucję funkcji falowej cząstki $\Psi(x, t)$.

2. Używając wiadomości uzyskanych na wykładzie pokaż, że wstawienie rozwiązania o postaci wielomianowej

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n, \quad (3)$$

do równania różniczkowego otrzymanego podczas rozwiązywania problemu oscylatora harmonicznego w reprezentacji położeniowej

$$H''(y) - 2yH'(y) + (\lambda - 1)H(y) = 0, \quad (4)$$

prowadzi do następującej relacji rekurencyjnej dla współczynników a_n :

$$a_{n+2} = \frac{2n + 1 - \lambda}{(n + 2)(n + 1)} a_n, \quad \text{gd}y \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

(przy czym a_0 oraz a_1 są dowolne).

Wskazówka: Podczas obliczeń pomocne jest odpowiednie przesunięcie wskaźników sumowania.

3. Cząstka w chwili $t = 0$ jest opisana funkcją falową

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{1}{3}} \phi_3(x) + \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_4(x), \quad (6)$$

gdzie stany $\phi_n(x)$ to stany własne Hamiltonianu oscylatora harmonicznego o energii E_n .

(A) Pokaż, że stan Ψ jest unormowany.

(B) Oblicz dyspersję operatora położenia w chwili $t = 0$.

(C) Oblicz dyspersję operatora pędu $t = 0$.

(D) Czy spełniona jest zasada nieoznaczoności dla dyspersji operatorów pędu i położenia obliczonych w stanie Ψ ? Odpowiedź uzasadnij.