Zadania dodatkowe: wysłane 16. kwietnia 2019

Atom wodoru

1. Elektron znajduje się we wzbudzonym stanie $|\psi\rangle$ atomu wodoru takim, że częsc radialna jego funkcji falowej wyraża się wzorem

$$R_{2,1}(r) = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\frac{r}{2a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}, \tag{1}$$

a część zależna od kątów harmoniką sferyczną

$$Y_{1,1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta. \tag{2}$$

(A) Zapisz pełną funkcję falową elektronu znajdującego się w stanie $|\psi\rangle$ w reprezentacji położeniowej. Jak nazywa się orbital, w którym znajduje się elektron?

(B) Ile wynosi średnia wartość kwadratu momentu pędu w stanie $|\psi\rangle$? Ile wynosi średnia wartość rzutu momentu pędu na oś $\hat{z}$ w stanie $|\psi\rangle$? Odpowiedź uzasadnij bez zbędnych obliczeń.

(C) Jeśli energia stanu podstawowego wynosi E_0 to ile będzie wynosić energia elektronu w stanie $|\psi\rangle$? Odpowiedź uzasadnij bez zbędnych obliczeń.

(D) Znajdź średnią odległość cząstki znajdującej się w stanie $|\psi\rangle$ od źródła potencjału sferycznie symetrycznego w atomie wodoru.

2. Stan elektronu w atomie wodoru jest opisany przez funkcję falową

$$\psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\cos\phi, \tag{3}$$

gdzie a_0 jest promieniem Bohra.

(A) Znajdź rozkład funkcji falowej na stany własne hamiltonianu atomu wodoru.

(B) Wyznacz średni rzut momentu pędu na oś z i średni kwadrat momentu pędu.

(C) Oblicz średnią odległość elektronu od źródła potencjału.

Części radialne i sferyczne rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru dane są przez:

$$R_{10} = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-r/a_0},\ R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0},\ R_{20} = 2\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/2a_0}$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}},\quad Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{-i\phi},\quad Y_1^1 = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\phi},\quad Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

Wskazówka: pamiętaj o ortonormalności powyższych funkcji własnych. Jeśli zapomnisz przydatne mogą być całki:

$$\int x^2e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)+C$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x + C,\quad \int \sin x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$$