

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki
Instytut Fizyki Teoretycznej

Wstęp do supersymetrii

Notatki do wykładu

Zygmunt Lalak

DRAFT 1

Warszawa 2005

Wprowadzenie

Supersymetria jest maksymalnym (jeśli pominąć przekształcenia skalowania) rozszerzeniem algebry Poincare w czterech wymiarach czasoprzestrzennych. Reprezentacje supersymetrii zawierają zarówno bozony jak i fermiony, ponieważ generatory supersymetrii transformują się jak fermiony względem algebry Lorentza. Zjawisko to nasuwa natychmiast myśl o użyciu supersymetrii jako symetrii unifikującej bozony i fermiony. Współczesna teoria oddziaływań elementarnych rzeczywiście korzysta z tej możliwości. Jednakże supersymetryczna unifikacja cząstek o różnych spinach jest tylko częściowa. Supersymetria nie może być bowiem dokładną, nienaruszoną, symetrią przyrody, gdyż przewiduje dla każdej cząstki istnienie partnera o innym spinie, ale dokładnie takiej samej masie. Na przykład, powinniśmy widzieć w doświadczeniach akceleratorowych skalarnie elektrony o takiej samej masie jak zwykle elektrony – jest to przewidywanie niezgodne z doświadczeniem. Supersymetria traktuje równorzędnie bozony i fermiony, nie sugerując, który rodzaj cząstek może być bardziej podstawowym składnikiem materii. W szczególności, właśnie supersymetria w równie fundamentalny sposób traktuje chiralne fermiony jak i cząstki o spinie zero - skalary. Jest to ciekawe o tyle, że z jednej strony nie odkryto jak dotąd ani w laboratoriach ani w kosmosie żadnych elementarnych skalarów, a z drugiej strony współczesna fizyka potrzebuje skalarów do wyjaśnienia struktury fizycznej próżni (efekt Higgsa i cząstki Higgsa). W teoriach rozszerzających Model Standardowy, zwłaszcza w teoriach używających większej niż cztery liczby wymiarów czasoprzestrzennych, oprócz pól Higgsa występują licznie dodatkowe fundamentalne skalary, które determinują strukturę fizycznej próżni - tak zwane pola modułów. Wyjaśnienie sposobu w jaki jest ustalana wartość oczekiwana pól modułów (dylatonu, radionu i temu podobnych pól) jest obecnie kluczowym, a ciągle nierozwiązanym, problemem supersymetrycznych teorii pola unifikujących oddziaływania fundamentalne.

Potęga supersymetrii widoczna jest w całej pełni na poziomie supersymetrycznych kwantowych teorii pola. Supersymetria dostarcza naturalnego technicznie i obfitującego w fizyczne implikacje sposobu kontrolowania hierarchii skal ma-

sowych w czterowymiarowych teoriach pola, skutecznego we wszystkich rzędach rachunku zaburzeń. Jednakże, supersymetria musi zostać naruszona przy niskich energiach, aby odtworzyć obserwowalną fenomenologię. Najbardziej ekonomicznym sposobem naruszenia supersymetrii jest sprzęgnięcie, w sposób lokalnie supersymetryczny, Lagrangianu zawierającego pola cechowania i materię do grawitacji i naruszenie lokalnej supersymetrii spontanicznie. Po pierwsze, w ten sposób unika się wprowadzenia do spektrum dodatkowego bezmasowego fermionu – Goldstino staje się składową o skrętności $1/2$ masywnego grawitina – cząstki o spinie $3/2$. Po drugie, słabe sprzężenia grawitacyjne zapewniają naturalne stłumienie efektów komunikowania naruszenia supersymetrii do sektora obserwowalnego. W granicy płaskiej czasoprzestrzeni ta procedura prowadzi do globalnie supersymetrycznego Lagranżjanu z jawnie ale miękko naruszoną supersymetrią.

Z drugiej strony, w teoriach zdefiniowanych w czasoprzestrzeniach o wyższym niż cztery wymiarze, np w teoriach superstrun lub w teoriach supergrawitacji, istnieje wiele pól, zarówno bozonowych jak i fermionowych, które nie są naładowane względem grupy symetrii cechowania i tworzą płaskie bądź ‘uciekające’ kierunki w przestrzeni pól. Te pola zwane polami modułów są naogół związane z wyżej-wymiarowymi składowymi metryki, polami tensorów antysymetrycznych i wyżej-wymirowymi składowymi grawitin. Po kompaktyfikacji takie pola mogą dawać wkład (i naogół dają) do efektywnej stałej kosmologicznej w czterech wymiarach, poprzez swoje potencjały i gradienty wzdłuż skompaktyfikowanych wymiarów. Zatem naprawdę przekonujący i pomyślny może być tylko taki scenariusz naruszenia supersymetrii, który nie tylko przewiduje rozszczepienie mas rzędu 1TeV w obserwowalnych multipletach supersymetrycznych, ale także przewiduje równoczesną stabilizację modułów i bliską zeru stałą kosmologiczną.

Pośród licznych propozycji zmierzających do realizacji takiego scenariusza szczególną prostotą odznacza się pomysł użycia dwu lub więcej kondensatów fermionowych partnerów nieabelowych bozonów cechowania (*kondensatów gaugin*), tzn. modeli typu race-track. Z technicznego punktu widzenia dynamiczne formowanie się takich kondensatów prowadzi do powstania superpotencjału, który zależy eksponencjalnie od modułów występujących w funkcjach kinetycznych kondensujących grup cechowania. Jak pokazano w ciągu ostatnich lat, takie eksponencjalne wkłady do superpotencjału powstawać mogą nie tylko z powodu silnie oddziałujących sektorów grup cechowania, ale także z powodu nietrywialnych czynników skrzywienia (*czynników warpowania*) wzdłuż dodatkowych wymiarów lub z powodu tła w postaci rozwiązań branowych w wyżej-wymiarowych supergrawitacjach i teoriach strun.

1.0.1 Dlaczego supersymetria?

Podsumujmy najważniejsze argumenty przemawiające za supersymetrią.

- Rozważmy energię próżni dla zespołu pól swobodnych o masach m_j i spinach

j :

$$\begin{aligned} E_j &\propto (-1)^{2j}(2j+1) \int d^3 p \sqrt{p^2 + m_j^2} = \\ &= (-1)^{2j}(2j+1) \int d^3 p |p| \left(1 + \frac{m_j^2}{2p^2} + O(p^{-4})\right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Znikanie kwartycznych i kwadratowych rozbieżności w tym wyrażeniu można zapewnić jeśli w zespole będzie tyle samo stopni swobody o spinie całkowitym co stopni swobody o spinie połówkowym i masy tych pól będą (parami bozon – fermion) jednakowe.

- Supersymetria wyjaśnia (w sensie technicznym) dlaczego masy skalarów (np cząstki Higgsa) mogą pozostawać o wiele rzędów wielkości mniejsze niż skala Plancka w obecności poprawek kwantowych. Co prawda masy skalarów nie są chronione przez jakąkolwiek symetrię wewnętrzną (wyjątkiem są bozony Goldstona), ale masy fermionów i bozonów wektorach tak: te pierwsze przez symetrie chiralne zaś te drugie przez symetrie cechowania. Ponieważ supersymetria kojarzy w jednym multiplecie skalary i fermiony (a także skalary i bozony wektorowe w rozszerzonych teoriach supersymetrycznych), to tym samym ‘rozszerza’ na sektor skalarny efekty symetrii chiralnych i symetrii cechowania.
- Inna ważna motywacja, która w praktyce doprowadziła do skonstruowania i rozwoju teorii supersymetrycznych jest natury teoretycznej. Chodzi o próby zunifikowania symetrii wewnętrznych układów fizycznych z symetrią Poincare. W latach 60-tych XXgo wieku wiele wysiłku włożono na przykład w próby zbudowania jednolitego opisu oddziaływań silnych, w których uczestniczą zarówno cząstki fermionowe – hadrony, jak i bozonowe – mezony, oparte o umieszczenie w tej samej reprezentacji pewnej grupy zawierającej $SU(3)$ zapachu – na przykład $SU(6)$, zarówno hadronów jak i mezonów. Oczywiście, przekształcenia grupy $SU(6)$ mieszały ze sobą fermionowe i bozonowe stopnie swobody. Próby te podsumowane zostały pod koniec lat 60tych kilkoma twierdzeniami ‘no-go’, w szczególności twierdzeniem Coleman-Manduli, które orzekło, że każda nietrywialna ciągła symetria macierzy rozpraszania musi być co najwyżej iloczynem prostym symetrii wewnętrznej i symetrii Poincare. Dowód twierdzenia CW oparty był na założeniu, że generatory rozpatrywanej symetrii macierzy rozpraszania spełniają pewną algebrę komutatorów.
- Ostatnio supersymetria stała się ważnym narzędziem teoretycznym analizowania silnie sprzężonych nieabelowych teorii Yanga-Millsa. W szczególności, dzięki supersymetrii udało się zrealizować przykład dualności elektromagnetycznej.
- Supersymetria czasoprzestrzenna zdaje się być przewidywaniem konsystentnych teorii strun, które unifikują na poziomie kwantowym wszystkie znane oddziaływania, łącznie z grawitacją.

Wprowadzenie

- Niskoenergetyczna supersymetria, nawet złamana, poprawia znacząco zbieganie się stałych sprzężenia w ekstrapolacjach Modelu Standardowego powyżej energii 1 TeV.
- Niskoenergetyczna supersymetria dostarcza kandydatów do roli zimnej ciemnej materii we Wszechświecie, która umożliwia tworzenie się struktur wielkoskalowych.

Supersymetria, globalna i lokalna, była przedmiotem intensywnych badań teoretycznych przez ostatnie 30 lat i jest w tej chwili unikalną teorią pozwalającą uporządkować próby rozszerzania Modelu Standardowego do wyższych energii i unifikowania go z grawitacją. Co więcej, nowe eksperymenty w dziedzinie fizyki wielkich energii przygotowywane są w taki sposób, żeby pośrednio lub bezpośrednio zaobserwować lekkich partnerów supersymetrycznych znanych cząstek. Testowanie hipotezy o istnieniu niskoenergetycznej supersymetrii będzie z pewnością jednym z głównych motywów fizyki oddziaływań fundamentalnych w najbliższym dziesięcioleciu.

Zebrane tutaj notatki są próbą zwięzłego podsumowania technicznych podstaw teorii supersymetrycznych. Nie pretendują do oryginalności i kompletności, będą w miarę regularnie poprawiane i uzupełniane. Pierwsza wersja tych notatek powstała przy współpracy doktora Rafała Ciesielskiego.

Rozdział 2

Supersymetria

Szczegółowy opis konstrukcji algebry supersymetrii zawiera podręcznik Wessa i Baggera [1], przedstawimy tylko zarys tej konstrukcji. Zaczniemy od wprowadzenia algebry supersymetrii:

$$\begin{aligned}
 \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 2\sigma_{\alpha\beta}^m P_m & (2.1) \\
 \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 0 \\
 [P_m, Q_\alpha] &= [P_m, \bar{Q}_\alpha] = 0 \\
 [P_m, P_n] &= 0 \\
 [Q_\alpha, M_{\mu,\nu}] &= \frac{1}{2}i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta
 \end{aligned}$$

gdzie $\{, \}$ oznacza antykomutator, Q_α oraz \bar{Q}_β są ładunkami supersymetrycznymi, P_m jest operatorem czteropędu, zaś $M_{\mu,\nu}$ są generatorami bustów i obrotów (bliźsze informacje na temat formalizmu spinorów Weyla zawiera 3.1). Ostatni komutator generatorów supersymetrii z generatorami obrotów pokazuje, że generatory Q_α transformują się jak lewe spinory dwuskładnikowe, a operatory do nich sprzężone jak spinory prawe.

Aby sformułować supersymetryczną teorię pola, musimy znaleźć reprezentację algebry SUSY, wzór (2.1), w przestrzeni pól nieograniczonych żadnymi warunkami, (poza powłoką masy). Aby tego dokonać definiujemy antykomutujące spinorowe parametry $\xi^\alpha, \bar{\xi}_\alpha$, spełniające warunki:

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \{\bar{\xi}_\alpha, \bar{\xi}_\beta\} = \dots = [P_m, \xi^\alpha] = 0 \quad (2.2)$$

Używając tych zmiennych możemy zapisać algebrę supersymetrii w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 [\xi Q, \bar{\xi} \bar{Q}] &= 2\xi \sigma^m \bar{\xi} P_m & (2.3) \\
 [\xi Q, \xi Q] &= [\bar{\xi} \bar{Q}, \bar{\xi} \bar{Q}] = 0 \\
 [P^m, \xi Q] &= [P^m, \bar{\xi} \bar{Q}] = 0
 \end{aligned}$$

Supersymetria

gdzie stosuje konwencję sumacyjną:

$$\xi Q = \xi^\alpha Q_\alpha \quad \bar{\xi} \bar{Q} = \bar{\xi}_\alpha \bar{Q}^\alpha \quad (2.4)$$

Zauważmy, że:

$$\dim[\xi] = -\frac{1}{2}$$

oraz, że:

$$\dim[Q] = \frac{1}{2} \quad Q_\alpha \text{ posiada spin } \frac{1}{2}$$

Ponieważ Q transformuje się jak spinor zatem mamy

$$Q|bozon\rangle = |fermion\rangle \quad (2.5)$$

Supersymetria transformuje więc bozony (spin całkowity) \mapsto fermiony (spin półowkowy) i odwrotnie. Ogólnie mówiąc pola o spinie $l \mapsto l \pm \frac{1}{2}$.

Skonstruujemy teraz najprostszy supersymetryczny multiplet złożony z pól bozonowych i fermionowych. Zaczniemy konstrukcję od skalarnego pola bozonowego A :

Definiujemy spinor ψ poprzez transformację pola bozonowego A

$$\delta_\xi A := \sqrt{2}\xi\psi \quad (2.6)$$

Pole fermionowe ψ transformuje się w pole bozonowe F o wyższym wymiarze oraz w pochodną pola A .

$$\delta_\xi \psi =: i\sqrt{2}\sigma_m \bar{\xi} \partial_m A + \sqrt{2}\xi F \quad (2.7)$$

Wzór (2.7) jest jednocześnie definicją pola F . Używając wyrażen (2.6) i (2.7) otrzymujemy

$$\delta_\eta \delta_\xi A = 2i\xi\sigma_m \bar{\eta} \partial_m A + 2\xi\eta F \quad (2.8)$$

co pokazuje, że antykomutator dwu kolejnych transformacji daje pochodną pola A . To samo powinno mieć miejsce dla pozostałych pól multipletu. W szczególności dla pola fermionowego ψ mamy:

$$\begin{aligned} [\delta_\eta \delta_\xi] \psi &= (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \psi \\ &= -2i(\eta\sigma_n \bar{\xi} - \xi\sigma_n \bar{\eta}) \partial_n \psi \\ &= -i\sigma_n \bar{\sigma}_m \psi [\eta\sigma_n \bar{\xi} - \xi\sigma_n \bar{\eta}] - \sqrt{2}(\xi\delta_\eta F - \eta\delta_\xi F) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Widać, że ten komutator redukuje się do pełnej pochodnej, gdy:

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}_m\partial_m\psi \quad (2.10)$$

Tak więc pola A , ψ , F wraz z (2.6), (2.7), (2.10) stanowią reprezentację algebry supersymetrii (2.1).

2.1 Superprzestrzeń

Wygodnym narzędziem do opisu supersymetrycznych teorii pola jest superprzestrzeń. Powstaje one przez dodanie do zwykłych czterech bozonowych współrzędnych czasoprzestrzennych x^m dodatkowych antykomutujących współrzędnych θ^α $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ transformujących się jak generatory supersymetrii. W superprzestrzeni transformacje supersymetrii reprezentowane są przez ruchy ‘geometryczne’, które z kolei indukują transformacje funkcji tego rozszerzonego układu zmiennych – superpól.

Ruch w superprzestrzeni jest generowany przez operatory różniczkowe Q , \bar{Q} :

$$\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} = \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m \varepsilon^{\dot{\beta}\alpha} \partial_m \right) \quad (2.11)$$

zastosowano tutaj zapis Q oraz \bar{Q} dla operatorów różniczkowych, utożsamiający je z generatorami grupy, ponieważ operatory te rzeczywiście reprezentują infityzmalne działanie grupowe w przestrzeni parametrów:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \partial_m \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Powyższa obserwacja nasuwa pomysł rozszerzenia zwykłej przestrzeni konfiguracyjnej do superprzestrzeni gdzie supersymetria jest translacją współrzędnych:

$$x^m \longmapsto z = (x^m, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.13)$$

W szczegółach wygląda to następująco: Pomnóżmy dwa elementy grupowe

$$\begin{array}{ccc} G(0, \xi, \bar{\xi}) & G(x, \theta, \bar{\theta}) = & e^{i[P_m(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta})]} \\ & & e^{i[(\theta + \xi)Q + (\bar{\theta} + \bar{\xi})\bar{Q}]} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{SUSY} & \text{SUSY +} & \text{SUSY z inną} \\ & \text{translacja} & \text{z translacją} \end{array}$$

Supersymetria

gdzie bazą (elementami parametryzującymi) są: zwykła przestrzeń konfiguracyjna + 2 elementy antykomutujące. i stąd mamy naturalną drogę do superprzestrzeni: $(x^m, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$

$$SUSY \Rightarrow \begin{cases} x^m \rightarrow x^m + i(\theta\sigma^m\bar{\xi} - \xi\sigma^m\bar{\theta}) \\ \theta \rightarrow \theta + \xi \\ \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \bar{\xi} \end{cases} \quad (2.14)$$

Szukamy generatorów translacji – jawnej reprezentacji operatorów Q , \bar{Q} oraz P_m :

$$\begin{aligned} e^{\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}} x^m &= x^m + i(\theta\sigma^m\bar{\xi} - \xi\sigma^m\bar{\theta}) \\ e^{\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}} \theta_\alpha &= Q_\alpha + \xi_\alpha \\ e^{\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} &= \bar{Q}_{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Lewe mnożenie

$$\begin{cases} Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \epsilon^{\dot{\alpha}\beta} \partial_m \\ P_m = i\partial_m \end{cases} \quad (2.16)$$

Należy zwrócić uwagę, że $P_m = i\partial_m$. Przy czym:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (i\partial_m) \quad (2.17)$$

Prawe mnożenie

Działając z prawej strony:

$$x^m e^{\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}} = \dots \quad (2.18)$$

jest realizowane poprzez generatory:

$$\begin{cases} D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \\ P_m = -i\partial_m \end{cases} \quad (2.19)$$

Przy takiej definicji D and \bar{D} spełniają antykomutacyjne relacje:

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdzie D oraz Q antykomutują

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.21)$$

Obiekty D_α , $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ nazywamy supersymetrycznymi pochodnymi kowariantnymi.

2.2 Własności superpól

Superpole skalarne (chiralne)

Skalarne superpole zdefiniowane jest warunkiem:

$$\bar{D}_\alpha \Phi = 0 \quad (2.22)$$

To równanie można w miarę prosto rozwiązać stosując zmienne $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ oraz θ

$$\bar{D}_\alpha (x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}) = 0 \quad , \quad \bar{D}_\alpha \theta = 0 \quad (2.23)$$

Ogólna funkcja tych zmiennych spełnia warunek (2.22) i przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \Phi &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\ &= A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pola (A, ψ, F) tworzą superpole chiralne. łatwo sprawdzić, że pola te transformują się w siebie nawzajem w następujący sposób:

$$\delta_\xi A =: \sqrt{2}\xi\phi \quad (2.25)$$

$$\delta_\xi \phi =: i\sqrt{2}\sigma_m\bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F \quad (2.26)$$

$$\delta_\xi F =: i\sqrt{2}\bar{\xi}\sigma^m\partial_m \phi \quad (2.27)$$

Superpole wektorowe (rzeczywiste)

Ogólne superpole transformuje się jak redukowalna reprezentacja supersymetrii. Aby otrzymać nieredukowalne reprezentacje nakłada się więzy na ogólny supermultiplet. Więzy muszą być zgodne z supersymetrią tzn. kowariantne. Przykładami

więzów są $D\Phi = 0, \bar{D}\Phi = 0$, ale także $V = V^\dagger$, przyczym drugi warunek definiuje superpole wektorowe zwane także superpolem rzeczywistym. Można je przedstawić w postaci szeregu potęgowego w θ i $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned}
 V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\
 & + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}[M(x) - iN(x)] \\
 & - \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right] \\
 & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right]
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

gdzie składowe pola C, D, M, N oraz v_m muszą być rzeczywiste aby spełniony był warunek $V = V^\dagger$. Zauważmy, że suma superpola chiralnego i pola doń sprzężonego jest superpolem rzeczywistym postaci:

$$\begin{aligned}
 \Phi + \Phi^\dagger = & A + A^* + \sqrt{2}(\theta\phi + \bar{\theta}\bar{\phi}) + \theta\theta F + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* \\
 & + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(A - A^*) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^m\partial_m\phi \\
 & + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta\sigma^m\partial_m\bar{\phi} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square(A + A^*)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

W szczególności, współczynnik przy $\theta\sigma^m\bar{\theta}$ ma postać abelowej transformacji cechowania.

Nasuwa to pomysł, aby abelowe transformacje cechowania rozszerzyć na pełne superpole wektorowe w następujący sposób:

$$V \longrightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger \tag{2.30}$$

Transformacje składowych mają wtedy postać:

$$\begin{aligned}
 C & \longrightarrow C + A + A^* \\
 \chi & \longrightarrow \chi - i\sqrt{2}\phi \\
 M + iN & \longrightarrow M + iN - 2iF \\
 v_m & \longrightarrow v_m - i\partial_m(A - A^*) \\
 \lambda & \longrightarrow \lambda \\
 D & \longrightarrow D
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Widzimy, że można dokonać takiej transformacji cechowania, która wyzeruje składowe C, χ, M, N . Ten wybór cechowania nazywamy cechowaniem Wessa – Zumino. Stosując powyższe cechowanie pozbyliśmy się swobodnych pól, pozostała

jeszcze swoboda wyboru części urojonej A , która odpowiada wykonaniu standardowej abelowej transformacji cechowania na polu wektorowym V (inaczej mówiąc jest to symetria cechowania), $v_m \longrightarrow v_m - i\partial_m(A - A^*)$. W cechowaniu tym składowe λ oraz D są niezmiennicze. Cechowanie Wessa–Zumino łamie niestety jawną supersymetrię, ale za to superpole wektorowe V dane wzorem (2.28) przybiera bardzo prostą postać :

$$V = -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \quad (2.32)$$

Warto jeszcze przedstawić jak wyglądają wyższe potęgi superpola wektorowego w cechowaniu Wessa–Zumino :

$$\begin{aligned} V^2 &= -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_mv^m \\ V^3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.2.1 Niezmienniczość względem cechowania

Omówmy teraz pewne własności superpola skalarnego (chiralnego) i wektorowego (rzeczywistego). Zobaczmy jak zachowują się superpola skalarne i wektorowe pod działaniem wewnętrznej symetrii $\mathcal{G} = U(1)$.

Superpole skalarne – globalna symetria $\mathcal{G} = U(1)$

Superpole skalarne pod działaniem grupy $\mathcal{G} = U(1)$ zachowuje się następująco:

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi \quad (2.34)$$

gdzie Λ jest parametrem przekształcenia.

Łatwo pokazać, że Φ' jest także superpolem chiralnym jeśli Λ jest superpolem chiralnym:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi' &= \bar{D}_{\dot{\alpha}}(\Phi - i\Lambda\Phi + \dots) \\ &= \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi - i[(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda)\Phi + \Lambda(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi)] + \dots = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

□

Jeśli Λ jest rzeczywiste i stałe ($\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = D_{\alpha}\Lambda = 0$) to korzystając z reguły Hausdorffa otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Phi'^{\dagger}\Phi' &= \Phi^{\dagger}e^{i\Lambda^{\dagger}}e^{-i\Lambda}\Phi \\ &= \Phi^{\dagger}e^{i(\Lambda^{\dagger}-\Lambda)}\Phi \\ &= \Phi^{\dagger}\Phi \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ta obserwacja pozwala skonstruować lagranżjan chiralny, niezmienniczy względem globalnej grupy symetrii $\mathcal{G} = U(1)$ transformującej pole skalarne zgodnie ze

Supersymetria

wzorem (2.34):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{K.E} + W & (2.37) \\ \mathcal{L}_{K.E} &= \Phi^\dagger_k \Phi_k |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ W &= \left[\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijl} \Phi_i \Phi_j \Phi_l \right] |_{\theta\theta} + h.c.\end{aligned}$$

gdzie przez $\mathcal{L}_{K.E}$ oznaczamy wyrazy kinetyczne, natomiast W jest superpotencjałem.

Superpole skalarne – lokalna symetria $\mathcal{G} = U(1)$

Niezmiennicze działanie z niejednorodnym, zależnym od x , parametrem Λ można skonstruować uogólniając działanie grupy $\mathcal{G} = U(1)$

$$\begin{aligned}\Phi &\longrightarrow e^{-i\Lambda} \Phi, & \bar{D}_\alpha \Lambda &= 0 \\ \Phi^\dagger &\longrightarrow e^{i\Lambda^\dagger} \Phi^\dagger, & D_\alpha \Lambda^\dagger &= 0\end{aligned} \quad (2.38)$$

Otóż przy takich warunkach cały lagranżjan \mathcal{L} , dany wzorem (2.37), przestaje być niezmienniczy, ponieważ:

$$\Phi'^\dagger \Phi' = \Phi^\dagger e^{i(\Lambda^\dagger - \Lambda)} \Phi \neq \Phi^\dagger \Phi \quad (2.39)$$

Wprowadzając wektorowe superpole V , transformujące się zgodnie z warunkiem:

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (2.40)$$

Możemy napisać pełny lagranżjan niezmienniczy względem lokalnej grupy symetrii $\mathcal{G} = U(1)$ w postaci :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4} \left(\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha |_{\theta\theta} + \bar{\mathcal{W}}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{W}}^{\dot{\alpha}} |_{\bar{\theta}\bar{\theta}} \right) + \Phi^\dagger_k e^V \Phi_k |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijl} \Phi_i \Phi_j \Phi_l \right) |_{\theta\theta} + h.c. \right]\end{aligned} \quad (2.41)$$

gdzie superpole \mathcal{W}_α , które jest uogólnieniem natężenia pola cechowania definiujemy następująco:

$$\mathcal{W}_\alpha := -\frac{1}{4} \bar{D}\bar{D}D_\alpha V \quad \bar{\mathcal{W}}_{\dot{\alpha}} := -\frac{1}{4} D D \bar{D}_{\dot{\alpha}} V \quad (2.42)$$

Superpole, \mathcal{W}_α ($\bar{\mathcal{W}}_{\dot{\alpha}}$) jest niezmiennicze ze względu na transformację cechowania, oraz spełnia warunek chiralności (antychiralności):

$$\bar{D}_\beta \mathcal{W}_\alpha = 0 \quad D_\beta \bar{\mathcal{W}}_{\dot{\alpha}} = 0 \quad (2.43)$$

Niezmienniczość tego superpola względem cechowania pokazujemy następująco:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}'_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(V+i(\Lambda-\Lambda^\dagger)) \\
 &= \mathcal{W}'_\alpha - \frac{i}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha\Lambda \\
 &= \mathcal{W}'_\alpha - \frac{i}{4}\bar{D}^{\dot{\alpha}}\{\bar{D}_{\dot{\alpha}},D_\alpha\}\Lambda \\
 &= \mathcal{W}'_\alpha
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Wzór (2.41) daje ogólną postać renormalizowalnego lagranżjanu niezmienniczego względem lokalnej transformacji cechowania grupy $\mathcal{G} = U(1)$. W cechowaniu Wessa-Zumino omówionym szerzej w rozdziale 2.2, gdzie jak pamiętamy $V^3 = 0$, zmodyfikowany wyraz kinetyczny dla pól skalarnych przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
 \Phi^\dagger_k e^V \Phi_k|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= FF^* + A\Box A^* + i\partial_n\bar{\Phi}\bar{\sigma}^n\Phi \\
 &v^n\left(\frac{1}{2}\bar{\Phi}\bar{\sigma}^n\Phi + \frac{i}{2}A^*\partial_n A - \frac{i}{2}\partial_n A^*A\right) \\
 &-\frac{i}{\sqrt{2}}(A\bar{\lambda}\bar{\Phi} - A^*\lambda\Phi) + \frac{i}{2}\left(D - \frac{i}{2}v_n v^n\right)A^*A
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Lagranżjan wyrażony w tym cechowaniu nie będzie zawierał członów o wymiarze wyższym niż cztery.

Na koniec zajmiemy się jeszcze konstrukcją lagranżjanu dla elektrodynamiki. Otóż najprostsze supersymetryczne rozszerzenia elektrodynamiki uzyskujemy zakładając, że mamy dwa superpola skalarne o przeciwnych ładunkach względem grupy $U(1)$, to znaczy transformujące się następująco:

$$\Phi'_+ \longrightarrow e^{-ie\Lambda}\Phi_+, \quad \Phi'_- \longrightarrow e^{+ie\Lambda}\Phi_- \tag{2.46}$$

Lagranżjan dla elektrodynamiki z masywnymi elektronami i ich partnerami przyjmuje zatem postać:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{ED} &= \frac{1}{4}\left(\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{\mathcal{W}}'_\alpha\bar{\mathcal{W}}'^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right) + \Phi^\dagger_+ e^V \Phi_+|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Phi^\dagger_- e^V \Phi_-|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\
 &+ m(\Phi_+\Phi_-|_{\theta\theta} + \Phi^\dagger_+\Phi^\dagger_-|_{\bar{\theta}\bar{\theta}})
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Rozszerzenie tej konstrukcji do lagranżjanu niezmienniczego względem nieabelowej grupy cechowania jest stosunkowo proste, zaś szczegóły można znaleźć w [1].

2.2.2 Energia kinetyczna superpola wektorowego

Chcąc znaleźć energię kinetyczną dla superpola wektorowego, należy znaleźć superpole \mathcal{W}^α ($\bar{\mathcal{W}}'_\alpha$) niezmiennicze względem transformacji $V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$. Część kinetyczna lagranżjanu dla pól wektorowych:

$$\mathcal{L}^V_{KE} := -\frac{1}{4}\mathcal{W}_\alpha\mathcal{W}^\alpha|_{\theta\theta} + h.c \tag{2.48}$$

Supersymetria

Korzystając z tożsamości $\mathcal{W}'_\alpha \mathcal{W}^\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}\bar{D} \mathcal{W}^\alpha D_\alpha V$ możemy bowiem napisać w cechowaniu Wessa–Zumino:

$$\mathcal{L}_{K.E}^V := -\frac{1}{4} v_{mn} v^{mn} + i\lambda \sigma^m \partial_m \bar{\lambda} + \frac{1}{2} D^2 \quad (2.49)$$

gdzie interpretacja poszczególnych członów jest następująca: $-\frac{1}{4} v_{mn} v^{mn}$ jest energią kinetyczną superpoła wektorowego, $-i\lambda \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}$ jest energią kinetyczną gaugin, zaś $\frac{1}{2} D^2$ jest wkładem do potencjału, oraz gdzie $v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$.

My chcemy dodać jeszcze człon masowy, postaci $m^2 V^2$, do lagranżjanu (2.48). Ten nowy człon nie jest już niezmienniczy ze względu na cechowanie. Musimy go zatem dopisać do uogólnionego superpotencjału wektorowego:

$$\begin{aligned} V^2|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = & -\frac{1}{2} v_m v^m - \chi\lambda - \bar{\chi}\bar{\lambda} + \frac{1}{2} (M^2 + N^2) \\ & -\frac{i}{2} \chi \sigma^m \partial_m \bar{\chi} - \frac{i}{2} \bar{\chi} \bar{\sigma}^m \partial_m \chi \\ & + \frac{1}{2} C \square C + CD \end{aligned} \quad (2.50)$$

Co jest interesujące, ten wyraz nie tylko nadaje masę owemu wektorowemu polu v_m , ale również pozostałym wyrazom supermultipletu, których teraz nie możemy już “wycechować”.

Lagranżjan (2.48) wraz z członem (2.50) opisuje :

- jedno pole wektorowe v_m
- dwa pola o spinie $\frac{1}{2}$: χ, λ
- jedno pole skalarne C

2.2.3 Naruszenie supersymetrii

Z oczywistych względów w realistycznych modelach supersymetria musi być złamana. Przekonują nas do tego przesłanki eksperymentalne na przykład nie obserwujemy supersymetrycznego partnera elektronu e (powinien on przy niezłamanej SUSY mieć masę równą masie elektronu), brak również obserwacyjnych przesłanek potwierdzających istnienie cząstek które miały by dokładnie takie same liczby kwantowe i masę jak cząstki Modelu Standardowego i różniły się od nich tylko spinem. Tak więc supersymetria nie może być dokładną symetrią efektywnego niskoenergetycznego lagranżjanu opisującego lekkie stany fizyczne.

Kryterium występowania spontanicznego łamania supersymetrii, jest niezmienniczość stanu fizycznej próżni, $|0\rangle$, względem ogólnej transformacji supersymetrii, co przekłada się na twierdzenie, że spontaniczne łamanie supersymetrii następuje wówczas gdy wartość oczekiwana operatora Hamiltona H jest większa

od zera: $\langle \psi | H | \psi \rangle > 0$. Przyjrzyjmy się bliżej temu stwierdzeniu. Skorzystajmy z algebry SUSY i rozpatrzmy antykomutator generatorów supersymetrii:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^m P_m. \quad (2.51)$$

Jeśli weźmiemy ślad obu stron i zauważymy, że tylko macierz σ^0 ma ślad różny od zera, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} P_0 = H &= \frac{1}{4}\{Q_1, \bar{Q}_1\} + \frac{1}{4}\{Q_2, \bar{Q}_2\} \\ &= \frac{1}{4}(Q_1\bar{Q}_1 + \bar{Q}_1Q_1 + Q_2\bar{Q}_2 + \bar{Q}_2Q_2) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Operator Hamiltona H jest dodatnio określony, tzn. dla dowolnego fizycznego stanu $|\psi\rangle$

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_n (|\langle \psi_n | Q_1 | \psi \rangle|^2 + |\langle \psi_n | Q_2 | \psi \rangle|^2) \geq 0 \quad (2.53)$$

Oznacza to, że wartość oczekiwana operatora H nie może być ujemna. Stąd wnioskujemy, iż stan o najniższej możliwej energii to stan o energią zerowej, przy czym $E = \langle \psi | H | \psi \rangle$. Wtedy

$$|Q_i \psi\rangle \stackrel{=}{=} 0 \Rightarrow \langle \psi | H | \psi \rangle = 0 \quad (2.54)$$

co oznacza, że stan o energii zerowej, o ile może być zrealizowany przez układ fizyczny, nie łamie spontanicznie supersymetrii. Ze wzoru (2.54) widzimy, że aby SUSY została złamana spontanicznie musi istnieć taki stan $|\psi\rangle$, że $\langle \psi | H | \psi \rangle > 0$. Tzn:

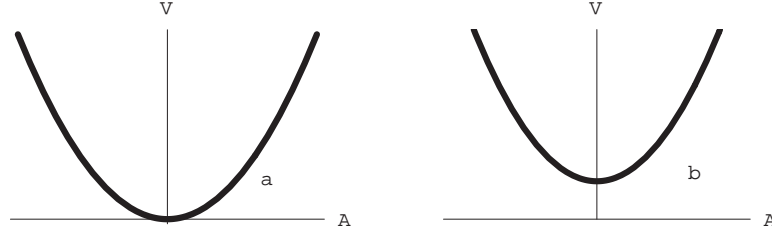
$$\langle \psi | H | \psi \rangle > 0 \iff \sim \left(\bigvee_i Q_i | \psi \rangle \neq 0 \right) \quad (2.55)$$

Przyjmijmy, że stan $|\psi\rangle$ jest kreowany z próżni przez pole Ψ , $|\psi\rangle = \Psi | 0 \rangle$. To oznacza, że musi istnieć takie pole Ψ , że $\langle 0 | (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \Psi | 0 \rangle \neq 0$, a ponieważ każde pole Ψ jest składową pewnego superpola X , więc warunek złamanej supersymetrii to po prostu

$$\langle 0 | (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) X | 0 \rangle = \langle 0 | \delta_\xi X | 0 \rangle \neq 0 \quad (2.56)$$

dla pewnego superpola X . Aby złamać supersymetrię bez naruszenia symetrii Lorentza kondensować mogą tylko wariacje fermionów, ponieważ tylko te wariacje zawierają składowe, których współczynniki są skalarami (nie zawierają pochodnych i składowych pól fermionowych): $\delta_\xi \psi = \sqrt{2} \xi F + \dots$, $\delta_\xi \lambda = i \xi D + \dots$

Na rysunku 2.1 zilustrowano sytuację w modelu, w którym stan podstawowy nie łamie supersymetrii (a), oraz kiedy stan podstawowy łamie supersymetrię (b). Przejdźmy do omówienia konkretnych modeli, w których łamanie supersymetrii dokonuje się w sektorze pól chiralnych (model O’Raifeartaigh’a), bądź w sektorze gauge (scenariusz Fayeta–Iliopoulosa).



Rysunek 2.1: Stan podstawowy nie łamie supersymetrii (a), oraz stan podstawowy łamie supersymetrię (b).

Model O’Raifeartaigh’a

Jako pierwszy omówimy model, który zbudowany jest wyłącznie z pól chiralnych. Kiedy zajmowaliśmy się supersymetrycznym lagranżjanem (Rozdział ??), wprowadziliśmy energię potencjalną,

$$\mathcal{V}(A_k, A_k^*) = F_k^* F_k \quad (2.57)$$

Z równań ruchu, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_k^*} = 0$ oraz $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_k} = 0$, otrzymaliśmy:

$$F_k = -(\lambda_k^* + m_{ik}^* A_i^* + g_{ijk}^* A_i^* A_j^*) \quad (2.58)$$

$$F_k^* = -(\lambda_k + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j) \quad (2.59)$$

Wystąpienie takiego rozwiązania równań Eulera-Lagrange’a, które odpowiada $F_k^* = 0$, sygnalizuje występowanie supersymetrycznego minimum dla potencjału $\mathcal{V}(A_k, A_k^*)$.

Chcąc zatem złamać SUSY musimy tak dobrać parametry: $\lambda_k, m_{ik}, g_{ijk}$ aby równania $F_k^* = 0$ dla $k = 1, \dots, n$ nie mogły być dla wszystkich k spełnione. Tzn.:

$$F_k^* \neq 0 \implies \lambda_k + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j \neq 0 \quad (2.60)$$

Konstrukcja takich modeli nie jest łatwa .

1. Dla $k=1$, mamy tylko jedno superpole skalarne ϕ . Wtedy $F^* = -\lambda \neq 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_k^*} = F_k^* + \lambda_k + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j = 0$ Ale w takim wypadku, co łatwo widać, złamanie SUSY nie oznacza nadania masy żadnej z cząstek, jest zatem nieskuteczne.
2. Dla dwóch superpól ($k=1,2$) zawsze można spełnić warunek $F_k^* = 0$ czyli na mocy wcześniej przedstawionych założeń, nie występuje tutaj spontaniczne łamanie SUSY.

3. Zachodzi więc potrzeba wprowadzenia co najmniej 3 superpól $k=1,2,3$. To właśnie zaproponował O’Raifeartaigh [4].

Model O’Raifeartaigh [4] jest jednocześnie najprostszym z wprowadzonych modeli spontanicznego łamania SUSY. Czysto chiralna część lagranżjanu, \mathcal{L} zwana superpotencjałem $\mathcal{L}_{P.E.}$, w tym wypadku ma postać:

$$W = \lambda_0 \Phi_0 + \frac{1}{2} m_{12} \Phi_1 \Phi_2 + \frac{1}{3} g_{012} \Phi_0 \Phi_1 \Phi_2 + h.c. \quad (2.61)$$

Model O’Raifeartaigh opisany został w wielu miejscach np. w monografii [1]. W tej pracy interesuje nas jednak przede wszystkim drugi sposób łamania supersymetrii, tzw. metoda Fayeta – Iliopoulosa. Przyjrzyjmy się jej nieco dokładniej.

Model Fayeta–Iliopoulosa

Drugim mechanizmem spontanicznego łamania SUSY, który jest głównym przedmiotem zainteresowania w tej pracy jest mechanizm Fayeta – Iliopoulosa [5]. Fayet i Iliopoulos zauważyli, że człon $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ w superpolu wektorowym jest supersymetryczny i niezmienniczy ze względu na cechowanie tylko dla grup abelowych.

Ów wyraz ma postać:

$$\mathcal{L}_{FI} = \kappa V|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \kappa D \quad (2.62)$$

gdzie κ jest parametrem Fayeta–Iliopoulosa.

Dodajmy do lagranżjanu dla QED danego wzorem (2.63) człon \mathcal{L}_{FI} podany wyżej, i znajdziemy spontaniczne łamanie supersymetrii.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} (W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi_+^\dagger e^V \Phi_+|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Phi_-^\dagger e^V \Phi_-|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad (2.63) \\ & m (\Phi_+ \Phi_-|_{\theta\theta} + \Phi_+^\dagger \Phi_-^\dagger|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + 2\kappa V|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \end{aligned}$$

W obecności pól cechowania potencjał pól skalarnych (2.57) modyfikuje się o tak zwany D -term, przybierając postać

$$\mathcal{V}(A_k, A_k^*) = F_k^* F_k + \frac{1}{2} D^2 \quad (2.64)$$

Pola $D = \mathcal{V}'|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$, F_1 , F_2 znajdujemy z równań Eulera–Lagrangéa:

$$\begin{aligned} D + \kappa + \frac{e}{2} (A_1^* A_1 - A_2^* A_2) &= 0 \quad (2.65) \\ F_1 + m A_2^* &= 0 \\ F_2 + m A_1^* &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązanie równań ruchu dla tego lagranżjanu pokazuje, że brak jest rozwiązań, dla których $D = 0$ i $F_i = 0$, (równania są sprzeczne), wystąpi więc spontaniczne

łamanie SUSY. Ponieważ jest to dość istotna część teorii, mająca duże znaczenie dla zrozumienia dalszej części pracy, dlatego postaramy się ją nieco rozwinąć. Szukamy rozwiązań równań (2.65), takich które dawały by $\mathcal{V} = 0$. Potencjał \mathcal{V} przybiera postać:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\kappa^2 + \left(m^2 + \frac{1}{2}e\kappa\right)A_1^*A_1 + \left(m^2 - \frac{1}{2}e\kappa\right)A_2^*A_2 + \frac{e^2}{8}(A_1^*A_1 - A_2^*A_2)^2 \quad (2.66)$$

powinniśmy przedyskutować dwa przypadki : $m^2 > \frac{1}{2}e\kappa$ oraz $m^2 < \frac{1}{2}e\kappa$. Omówmy je po kolei:

1. $m^2 > \frac{1}{2}e\kappa$ w tym pierwszym przypadku oba pola A_1 oraz A_2 mają rzeczywiste masy. Minimum jest dla $A_1 = 0 = A_2$. Model ten opisuje dwa zespolone pola skalarne, odpowiednio z masami: $m_1^2 = m^2 + \frac{1}{2}e\kappa$ oraz $m_2^2 = m^2 - \frac{1}{2}e\kappa$, przy czym pomiędzy tymi masami zachodzi związek $m_1^2 + m_2^2 = 2m^2$. Pole wektorowe v_m pozostaje bezmasowe.

Bezmasowy spinor λ odgrywa rolę fermionowej cząstki Goldstone'a, tak zwanego Goldstina, związanej ze spontanicznie złamaną supersymetrią. Widac to z prawa transformacji dla λ

$$\delta_\xi \lambda = i\xi D + \sigma^{mn} \xi v_{mn} \quad (2.67)$$

Dostrzegamy, że λ transformuje się niejednorodnie, jeśli tylko D osiąga niezerową wartość oczekiwaną próżni. Patrząc na równania Eulera–Lagrangé'a (2.65), $D = -\kappa - \frac{e}{2}(A_1^*A_1 - A_2^*A_2)$. Tak więc

$$\delta_\xi \lambda = -i\xi\kappa - i\xi\frac{e}{2}(A_1^*A_1 - A_2^*A_2) + \sigma^{mn} \xi v_{mn} \quad (2.68)$$

Sytuację tę przedstawia rysunek (2.2), (a).

2. Jeżeli $m^2 < \frac{1}{2}e\kappa$ to $A_1 = 0 = A_2$ nie jest już minimum potencjału (2.66). Aby znaleźć nowe minimum rozwiązujemy równania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial A_1^*} &= \left(m^2 + \frac{1}{2}e\kappa\right)A_1 + \frac{e^2}{4}(A_1^*A_1 - A_2^*A_2)A_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial A_2^*} &= \left(m^2 - \frac{1}{2}e\kappa\right)A_2 - \frac{e^2}{4}(A_1^*A_1 - A_2^*A_2)A_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Otrzymujemy minimum w punkcie $A_1 = 0, A_2 = v$, gdzie $\frac{1}{4}e^2v^2 + (m^2 - \frac{1}{2}e\kappa) = 0$. Możemy tak dobrać transformację cechowania ażeby v było rzeczywiste.

Rozwijając potencjał wokół minimum, spontanicznie łamiemy symetrię względem grupy $\mathcal{G} = U(1)$. Otrzymujemy :

$$\begin{cases} A = A_1 \\ \tilde{A} = A_2 - v \end{cases} \quad (2.70)$$

Potencjał(2.66) przybiera postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \frac{2m^2}{e^2} (e\kappa - m^2) + 2A^*A \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 v^2 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{A} + \tilde{A}^*] \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^2 v^2 \right) v_m v^m \end{aligned} \quad (2.71)$$

gdzie stała $\frac{2m^2}{e^2} (e\kappa - m^2)$ jest dodatnia. Zarówno supersymetria jak i symetria cechowania są złamane. Wektorowe superpole v_m nabiera masy “zjadając” bozon Goldstona $\frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{A} + \tilde{A}^*)$, lecz całkowita liczba stopni swobody pozostaje niezmienną.

Podczas łamania symetrii, modyfikacji ulegają również wkłady do mas spinorów:

$$\mathcal{L}_\phi = \dots - m (\phi_1 \phi_2 + \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2) + \frac{iev}{\sqrt{2}} (\bar{\phi}_2 \lambda - \bar{\phi}_2 \lambda) \quad (2.72)$$

Zdefiniujmy teraz liniowe kombinacje:

$$\begin{aligned} \Psi &= \psi_2 \\ \tilde{\Psi} &= \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2}} \left(m \psi_1 + \frac{iev}{\sqrt{2}} \lambda \right) \\ \tilde{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2}} \left(m \lambda + \frac{iev}{\sqrt{2}} \psi_1 \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

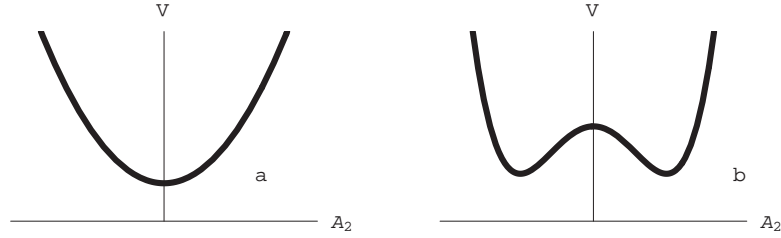
Zastosujemy powyższe podstawienia do lagranżjanu dla fermionów \mathcal{L}_ϕ , i jeszcze raz przyjrzymy się masom fermionów, ale teraz wyrażonych w nowych zmiennych :

$$\mathcal{L}_\phi = \dots - \left(\sqrt{m^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2} \right) (\psi \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi} \bar{\psi}) \quad (2.74)$$

Pole $\tilde{\lambda}$ pozostaje bezmasowe, i transformuje się niejednorodnie czego oczekujemy od pól Goldstonowskich:

$$\delta_\xi \tilde{\lambda} = -2i \frac{m}{e} \xi \sqrt{e\kappa - m^2} + \dots \quad (2.75)$$

Jest to zatem pole Goldstina. Policzmy stopnie swobody cząstek:



Rysunek 2.2: W przypadku kiedy $m^2 > \frac{1}{2}e\kappa$, złamana jest tylko supersymetria (a), natomiast gdy $m^2 < \frac{1}{2}e\kappa$ złamana jest supersymetria i symetria cechowania (b).

- 2 pola spinorowe z masami: $m_\psi = m_{\tilde{\psi}} = \sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2v^2}$
- 1 pole wektorowe v_m i jedno pole skalarno-rzeczywiste $\frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{A} + \tilde{A}^*]$ z masą

$$m_{v_m} = m \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{A} + \tilde{A}^*] = \sqrt{\frac{1}{2}e^2v^2}$$
- jeden zespolony skalar A z masą: $m_A = \sqrt{2m^2}$
- 1 bezmasowy spinor Goldstone'a $\tilde{\lambda}$ $m_{\tilde{\lambda}} = 0$

Widać więc, że liczba stopni swobody dla fermionów ($\psi, \tilde{\psi}$), pozostaje równa liczbie stopni swobody dla bozonów, tutaj reprezentowanych przez pola: $v_m, \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{A} + \tilde{A}^*], A$. Mamy także związek:

$$4 \left(m^2 + \frac{1}{2}e^2v^2 \right) = (3+1) \left(\frac{1}{2}e^2v^2 \right) + 2(2m^2) \quad (2.76)$$

Relacja ta jest przykładem ogólnej relacji:

$$\sum_{fermiony} (\#st.swobody) m_{fermiony}^2 = \sum_{bozony} (\#st.swobody) m_{bozony}^2 \quad (2.77)$$

zachodzącej w przypadku globalnie supersymetrycznych modeli z SUSY złamaną spontanicznie. Ten przypadek ilustruje rysunek (2.2) (b).

Przedstawimy teraz model, w którym jest złamana tylko symetria cechowania. Przy omawianiu modelu O’Raifeartaigh uzyskaliśmy warunki nienaruszonej supersymetrii:

$$F^*_k = 0 \implies \lambda_k + m_{ik}A_i + g_{ijk}A_iA_j = 0 \quad (2.78)$$

Wartość oczekiwana próżni dla A_n oznaczmy poprzez a_n . Poszukujemy rozwiązań powyższego równania, czyli chcemy znaleźć a_n , które nie są niezmiennicze względem wewnętrznej grupy symetrii.

Dla potrzeb tego przykładu skonstruujemy prosty model, z grupą $\tilde{G} = \tilde{U}(1)$ oraz trzema superpolami skalarnymi:

- jedno neutralne ϕ
- ϕ_+ pole o dodatnim ładunku względem grupy $\tilde{G} = \tilde{U}(1)$
- ϕ_- pole o ujemnym ładunku względem grupy $\tilde{G} = \tilde{U}(1)$

Lagranżjan, niezmienniczy względem grupy $\tilde{G} = \tilde{U}(1)$, będzie miał postać:

$$W = \frac{1}{2}m\Phi^2 + \mu\Phi_+\Phi_- + \lambda\Phi + g\Phi\Phi_+\Phi_- + h.c. \quad (2.79)$$

a równanie (2.78) przybierze postać:

$$\begin{aligned} \lambda + ma_i + ga_+a_- &= 0 \\ a_-(\mu + ga) &= 0 \\ a_+(\mu + ga) &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Mamy wtedy dwa rozwiązania:

1. $a_+ = a_- = 0$, $a = -\frac{\lambda}{m}$
2. $a_+a_- = -\frac{1}{g}\left(\lambda - \frac{m\mu}{g}\right)$, $a = -\frac{\mu}{g}$

Pierwsze rozwiązanie nie łamie symetrii $\tilde{G} = \tilde{U}(1)$, w drugim łamanie symetrii występuje. Skupimy więc swoją uwagę na drugim rozwiązaniu. Wyznaczany jest teraz tylko człon a_+a_- , a nie wartość próżniowa każdego z pól osobno. Superpotencjał W jest niezmienniczy nie tylko względem grupy $\tilde{G} = \tilde{U}(1)$, lecz również względem jej rozszerzenia zespolonego $\tilde{G} = \tilde{U}(1)^{\mathbb{C}}$. To oznacza, że dla każdego rozwiązania a_+ , a_- równania (2.80), istnieje cała klasa rozwiązań przy dowolnym λ zespolonym. Wobec tego istnieje nieskończona rodzina supersymetrycznych próżni:

$$a_+ \longrightarrow e^{\Lambda a_+}, \quad a_- \longrightarrow e^{-\Lambda a_-}, \quad \Lambda \in \mathbb{C} \quad (2.81)$$

Tak więc stan podstawowy ma większą degenerację niż ta, która wynika z wewnętrznej grupy symetrii. Jest to wynikiem faktu, że W jest holomorficzną funkcją superpól.

Jeżeli symetria $U(1)$ ma być lokalna to powinniśmy wprowadzić wektorowe superpole V , które będzie sprzężone do superpól skalarnych ϕ_- , ϕ_+ tak jak to było w przypadku grup abelowych (rozdział 2.2.3, wzór (2.63)), gdzie dodaliśmy człon postaci $2\kappa V$ do lagranżjanu. W rezultacie otrzymujemy trójliniowe sprzężenie pomiędzy superpolami skalarnymi A_{\pm} oraz wektorowym multipletem V :

$$eV (A_+^*A_+ - A_-^*A_-) \quad (2.82)$$

To znaczy :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}_{P.E.} + \phi_+^\dagger e^V \phi_+ |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \phi_-^\dagger e^V \phi_- |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \cdots + W + \dots \\ &= \dots + eV (A_+^*A_+ - A_-^*A_-) \dots \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ten wyraz wygląda jak wyraz F-I. Dodaje się do niego również zwykły drzewowy wyraz Fayeta-Iliopoulosa (F-I) (podobnie jak poprzednio a_+ jest wartością oczekiwaną próżni dla A_+ , a_- dla A_- , itd.):

$$\mathcal{L} \supset eV_D \left[a_+^* a_+ - a_-^* a_- + 2 \frac{\kappa}{e} \right] \quad (2.84)$$

Ten człon może zwyczajnie łamać SUSY. Ale ponieważ występuje degeneracja $a_{\pm} \rightarrow e^{\pm\Lambda} a_{\pm}$, możliwa jest transformacja, która zeruje $a_+^* a_+ - a_-^* a_- + 2 \frac{\kappa}{e}$ dla dowolnego κ .

$$\left[a_+^* a_+ - a_-^* a_- + 2 \frac{\kappa}{e} \right] \longrightarrow \left[e^{\Lambda^* + \Lambda} |a_{+0}|^2 - e^{-(\Lambda^* + \Lambda)} |a_{-0}|^2 + 2 \frac{\kappa}{e} \right] = 0 \quad (2.85)$$

Ponieważ zawsze istnieje rozwiązanie równania: $e^{2Re(\Lambda)} |x|^2 - e^{-2Re(\Lambda)} |y|^2 + 2 \frac{\kappa}{e} = 0$. Zatem tutaj D -term nie indukuje łamania SUSY. Rozwijając e^{eV} otrzymujemy natomiast supersymetryczny wyraz¹ masowy dla superpola wektorowego. Jest on związany z równaniem (2.2.3) i ma postać:

$$\mathcal{L}_{P.E.} \supset e^2 \left(a_+^* a_+ + a_-^* a_- + 2 \frac{\kappa}{e} \right) V^2 \quad (2.86)$$

Członu $(a_+^* a_+ + a_-^* a_- + 2 \frac{\kappa}{e}) V^2$ nie można “odtransformować”. Należy zauważyć, że człon ten nadaje masę dla całego superpola wektorowego v_m .

Jeżeli zestawimy powyższy wzór (2.86), z równaniem (2.50), to zobaczymy, że spontaniczne łamanie symetrii cechowania w tej teorii powoduje, że pojawi się pełny masowy wektorowy supermultiplet. Powyższy model można łatwo rozszerzyć na przypadek grup nieabelowych. Opierając się na materiale z (rozdziału 2.2.3) żądamy supersymetrycznego rozwiązania:

$$F^*_k = 0 \implies \lambda_k + m_{ik} a_i + g_{ijk} a_i a_j = 0 \quad (2.87)$$

Parametry λ , m , g są ograniczone przez wewnętrzną grupę symetrii. Ogólnie w teorii z cechowaniem, supersymetryczne minima muszą spełniać również warunek:

$$D^l = a_i^\dagger T_{ik}^l a_k = 0 \quad i \quad F = 0 \quad (2.88)$$

Nieabelowy D -term nie jest niezmienniczy ze względu na transformacje cechowania. Okazuje się, że równanie (2.87) tzn.: $F^*_k = \lambda_k + m_{ik} a_i + g_{ijk} a_i a_j = 0$ całkowicie determinuje łamanie SUSY, w przypadku nieabelowej teorii. Jeżeli równanie (2.87) posiada rozwiązanie a_i , to zawsze można znaleźć takie rozwiązanie, nazwijmy je umownie \hat{a}_i , które spełnia jednocześnie (2.88). Dowód tego faktu dla prostej grupy \tilde{G} znajduje się w książce J.Wessa i J.Baggera [1].

Powtórzmy raz jeszcze, że spontaniczne łamanie supersymetrii nieabelowych modeli jest kontrolowane poprzez F -terminy. Supersymetria jest spontanicznie złamana wtedy i tylko wtedy, gdy równanie $F^*_k = 0$ nie ma rozwiązań. Innymi słowy dla grup nieabelowych tylko część chiralna decyduje o łamaniu SUSY, tj.: jeśli $F^*_k = 0$ to można znaleźć takie rozwiązanie $F^*_k = 0$, że $D^l = a_i^\dagger T_{ik}^l a_k = 0$ dla wartości tego rozwiązania.

¹Korzystamy z rozwinięcia $e^{eV} = 1 + eV + \frac{e^2 V^2}{2} + \dots$

2.2.4 Macierz masy fermionów – goldstino

Ogólna macierz masy fermionów w teorii z niezmienniczością względem cechowania ma postać:

$$(\Psi_a \lambda_\alpha) \begin{pmatrix} \bar{F}_{ab} & D_{a\beta} \\ D_{\alpha,b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_b \\ \lambda_\beta \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

W tym wyrażeniu $\bar{F}_{ab} = -\partial^2 W / \partial \phi_a \partial \phi_b = \partial \bar{F}_b / \partial \phi_a$, oraz $D_{\alpha b} = \partial D_\alpha / \partial \phi_b$. Można pokazać, że stan opisany kombinacją liniową

$$g = \langle F_a \rangle \Psi_a + \langle D_\alpha \rangle \lambda_\alpha \quad (2.90)$$

jest wektorem własnym macierzy masy fermionów z wartością własną 0. Stan ten nazywany jest goldstinem. Aby pokazać, że masa goldstina znika, należy zauważyć, że zróżniczkowanie potencjału skalarnego, $V = |F_a|^2 + \frac{1}{2}(D^\alpha)^2$, po polu chiralnym ϕ_a prowadzi do równości $F_{ab} \langle F_b \rangle + D_{a\alpha} \langle D_\alpha \rangle = 0$, zaś niezmienniczość superpotencjału względem przekształceń cechowania prowadzi do $0 = \delta W = \partial W / \partial \phi_a \delta \phi_a = i \theta_a \partial W / \partial \phi_a T_{ab}^\alpha \phi_b = 0$, co po uwzględnieniu, że $D_\alpha = \bar{\phi}_a T_{ab}^\alpha \phi_b$ daje $\partial W / \partial \phi_a \bar{D}_a^\alpha = 0$.

Korzystając z podanej postaci macierzy masy fermionów i potencjału skalarnego, zauważywszy, że kwadrat macierzy masy bozonów cechowania ma postać $(m^{j=1})_{\alpha\beta}^2 = (D_{\alpha a} D_{a\beta} + D_{\alpha a} D_{\beta a})$, łatwo pokazać, że w zupełnie ogólnym przypadku zachodzi następująca reguła sum, jeśli tylko generatory wszystkich symetrii cechowania są bezśladowe:

$$\sum_{j=0,1/2,1} (2j+1)(-1)^{2j} \text{Tr}(m^j)^2 = 0. \quad (2.91)$$

2.2.5 Ogólne własności naruszenia supersymetrii w sektorze chiralnym

Jeżeli pominąć wyrazy Fayeta-Iliopoulosa, to konieczne warunki naruszenia globalnej supersymetrii wyrażają się przez pochodne uperpotencjału:

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i} = 0. \quad (2.92)$$

Jeżeli na superpotencjał nie narzucimy żadnych symetrii, to oczekujemy, że supersymetria pozostanie niezłamana: ponieważ superpotencjał jest holomorficzną funkcją superpól, to mamy N równań na N wartości oczekiwanych pól, które mają jakieś rozwiązanie. Podobnie jest w przypadku, gdy na oddziaływania narzucimy pewną symetrię, która nie jest R-symetrią. Jeżeli taka symetria ma L generatorów, to za pomocą L równań (więzów) możemy wyeliminować L zmiennych, i pozostanie układ (N-L) równań na (N-L) niewiadomych, który również ma rozwiązanie.

Jakościowo nowa sytuacja powstaje, gdy narzucimy na superpotencjał spontanicznie zlaną R-symetrię, powiedzmy $U(1)$. Powiedzmy, że superpole Φ_n ma

Supersymetria

r-ładunek $q_n: \Phi_n \rightarrow e^{iq_n\alpha}\Phi_n$. Przypuśćmy, że $\langle \Phi_n \rangle \neq 0$. Wtedy możemy zapisać superpotencjał w postaci

$$W = (\Phi_n)^{2/q_n} f(X_i), \quad i < n, \quad (2.93)$$

gdzie nowe superpola $X_i = \Phi_i/\Phi_n^{q_i/q_n}$ mają ładunek zero względem R-symetrii. Warunki na niezłamaną supersymetrię wyglądają teraz następująco:

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = 0, \quad f(X_i) = 0, \quad (2.94)$$

co daje N równań na (N-1) zmiennych X_i – układ, który może nie mieć rozwiązania.

Przykłady:

1. $W = \lambda SX^2$, R-symetria: $R(S) = 0, R(X) = 1$, Q-symetria: $Q(S) = 2, Q(X) = 1$. W minimum potencjału skalarnego Q złamana, R niezłamana, supersymetria niezłamana.
2. $W = SX^2 + SXY + X^2\bar{Y} + mY\bar{Y}$, $R(S) = R(\bar{Y}) = 2$. W tym przypadku istnieją próżnie ze złamaną spontanicznie R-symetrią i niezłamaną supersymetrią. Powód jest taki, że podany wyżej superpotencjał nie jest generyczny (naturalny), to znaczy nie jest maksymalnym superpotencjałem zgodnym z narzucenymi symetriami. Na przykład można dodać nowy wyraz $W \rightarrow W + S$, co spowoduje odtworzenie R-symetrii w supersymetrycznym minimum.
3. Model O’Raifeartaigh – generyczny, niezłamana R-symetria i złamana supersymetria. Weźmy $W = \mu^2 S + SQ^2 + mPQ$, $R(S) = R(P) = 2, P, Q \rightarrow -P, -Q$. Wszystkie próżnie łamią supersymetrię.
4. Na koniec przykład, w którym nie ma R-symetrii, superpotencjał jest niegeneryczny i supersymetria jest złamana (choć można dodać wyrazy, które przywrócą supersymetrię): $W = \lambda_1 XQ^2 + \lambda_2 Y(Q^2 - \mu^2) + \lambda Q^3 + m_1 Q^2 + m_2^2 Q$.

Twierdzenie Ovruta–Wessa

Jeśli superpotencjał jest niezmienniczy względem pewnej symetrii globalnej lub lokalnej U , to chiralny lagranżjan jest niezmienniczy względem większej grupy symetrii, która jest kompleksyfikacją grupy U , przykład tego zjawiska widzieliśmy w jednym z wcześniejszych przykładów. Powodem tego jest holomorficzność superpotencjału. Wynika stąd, że jeśli w modelu z symetrią występuje supersymetryczna próżnia, to jest ona zdegenerowana - należy ona do płaskiego kierunku potencjału skalarnego (udowodnij to twierdzenie).

2.2.6 Naruszenie supersymetrii w sektorze ukrytym

Wyobraźmy sobie, że w teorii supersymetrycznej pola można podzielić na dwa sektory: widzialny, zawierający lekkie obserwowalne cząstki (q,e,H,...) i ukryty,

składający się z cząstek ciężkich lub słabo oddziałujących z ektorem widzialnym, X . W tym przypadku operatorem sprzęgającym oba sektory może być operator

$$\frac{1}{M^2}(\Phi^\dagger\Phi X^\dagger X)_D = \frac{|F_X|^2}{M^2}\phi^*\phi + \dots, \quad (2.95)$$

który daje jawne masy dla lekkich skalarów, jeśli supersymetria łamie się przy odpowiedniej skali w sektorze ciężkim. Taki operator może być nierenormalizowalnym operatorem drzewowym, lub pojawić się w poprawkach radiacyjnych (to jest D-term, nie jest on chroniony twierdzeniem o nierenormalizacji). Jeśli charakterystyczną skalą sektora ciężkiego jest $M = 10^{19} GeV$, zaś masy lekkich skalarów nie przekraczają skali $10^3 GeV$, to skala naruszenia supersymetrii μ , zdefiniowana relacją $\mu^2 = |F_X|^2$, musi być niewiększą niż $10^{11} GeV$. Skalę tego rzędu określamy jako skalę pośrednią. Zadaniem porządnego modelu supersymetrycznego jest naturalne wytłumaczenie pojawiania się skali pośredniej. Nie jest to łatwe. Dotychczas naturalne wyjaśnienia dla takich skal oparte są o efekty nieperturbacyjne w nieabelowych teoriach z cechowaniem, co ma tę słabość, że teoria efektów nieperturbacyjnych w teorii pola wciąż jeszcze nie jest zadowalająca.

Ważnym problemem teoretycznym jest pojawianie się goldstina przy spontanicznym naruszeniu supersymetrii. Musiałoby się ono sprzęgać do pól widzialnych nawet wtedy, gdyby naruszenie supersymetrii odbywało się w sektorze ukrytym (ciężkim). Jedynym znanym w tej chwili sposobem pozbycia się z lekkiego spektrum bezmasowego fermionu – goldstina – jest sprzęgnięcie teorii globalnie supersymetrycznej do grawitacji. Wówczas skala Plancka pojawia się jako naturalna skala tłumiąca przenoszenie naruszenia supersymetrii między sektorem ukrytym a sektorem widzialnym. Supergrawitacji poświęcona jest końcowa część tych notatek.

Miękkie łamanie supersymetrii

Oprócz spontanicznego łamania supersymetrii opisywanego w poprzednich rozdziałach, pożyteczne okazuje się rozważenie jawnego łamania supersymetrii na poziomie lagranżjanu. Okazuje się, że istnieje zbiór operatorów wymiaru ≤ 3 , które łamią wprawdzie SUSY jawnie, ale nie powodują pojawiania się kwadratowych rozbieżności przy obliczaniu poprawek kwantowych. Innymi słowy, dodanie do supersymetrycznego lagranżjanu tych wyrazów zachowuje techniczne rozwiązanie problemu hierarchii dostarczane przez supersymetrię.

Operatory należące do tego zbioru nazywa się operatorami miękko łamiącymi supersymetrię. W tym rozdziale wypiszemy te wyrazy:

$$\begin{aligned} m^2\bar{\phi}\phi & , & m^2(\phi\phi + h.c.) \\ m\lambda\lambda & , & \alpha(\phi^3 + h.c.) \end{aligned} \quad (2.96)$$

gdzie m jest parametrem o wymiarze masy, zaś α jest nowym parametrem bezwymiarowym, ϕ reprezentuje dowolne pole chiralne, zaś λ oznacza fermiony w reprezentacji dołączonej grupy cechowania (gaugina).

Wyrazy miękko łamiące globalną supersymetrię pojawiają się w niskoenergetycznej granicy lagranżjanu supergrawitacji.

Inne wyrazy łamiące supersymetrię wprowadzają kwadratowo rozbieżne poprawki kwantowe. Do takich “twardych” wyrazów należą masy fermionów chiralnych, $m\psi\psi$, oraz np. wyrazy typu $m(\phi + \bar{\phi})^3$.

2.3 Supergrawitacja

Supergrawitacja

W lokalnej supersymetrii parametry transformacji nie są stałymi lecz zależą od współrzędnych czasoprzestrzennych. Z postaci algebry lokalnej supersymetrii

$$[\varepsilon(x)Q, \bar{Q}\bar{\varepsilon}(x)] = 2\varepsilon(x)\sigma_\mu\bar{\varepsilon}(x)P^\mu \quad (2.97)$$

gdzie z prawej strony mamy czasoprzestrzenną translację, która zmienia się od punktu do punktu, wnioskujemy, że lokalna supersymetria zawiera teorię lokalnych translacji, czyli zwykłą grawitację. Tak więc lokalną supersymetrię nazywamy supergrawitacją (SUGRA). Supersymetrycznym partnerem grawitonu (cząstki o spinie 2) jest tu grawitino, fermion o spinie 3/2.

Lagranżjan supergrawitacji

Zajmijmy się przedstawieniem lagranżjanu supergrawitacji \mathcal{L}_{SUGRA} , który zawierać będzie: chiralną materię, pola cechowania oraz parę pól o spinach $(2, \frac{3}{2})$ w supergrawitacyjnym multiplecie. Ograniczymy się tylko do analizy potencjału skalarnego, którego będziemy potrzebować w późniejszej dyskusji².

Ogólny Lagranżjan supergrawitacji sparametryzowany jest przez trzy niezależne funkcje:

Pierwsza z tych funkcji, to funkcja kinetyczna dla pól cechowania, może być dowolną holomorficzną funkcją superpól chiralnych:

$$\mathcal{L}_K = f_{\alpha\beta}(\phi)W^\alpha W^\beta \quad (2.98)$$

gdzie α oraz β są indeksami reprezentacji dołączonej grupy cechowania.

Druga to rzeczywista funkcja Kählera: $K = K(\bar{\phi}e^{gV}, \phi)$, nazywana rzeczywistym potencjałem Kählera, przez którą wyrażają się wyrazy kinetyczne dla pól chiralnych.

$$K_j^i D_\mu z_i D^{mu} z^{j*} \equiv \frac{\partial^2 K}{\partial z_i \partial z^{j*}} D_\mu z_i D^{mu} z^{j*} \quad (2.99)$$

gdzie z_i jest najniższą składową chiralnego superpola ϕ .

Wreszcie trzecia funkcja, to używany wcześniej superpotencjał $W(\phi)$, który wraz

²Ogólny lagranżjan supergrawitacji został podany w pracy [6]

z potencjałem Kählera tworzy funkcję G :

$$G = K + M_P^2 \log \frac{|W|^2}{M_P^6} \quad (2.100)$$

zwaną często również funkcją Kählera.

Potencjał skalarny V w supergravitacji zapisujemy w postaci:

$$V = M_P^4 \exp\left(\frac{G}{M_P^2}\right) \left(\frac{1}{M_P^2} G_k (G^{-1})^k_l G^l - 3\right) + \frac{1}{2} f^{-1}{}_{\alpha\beta} D^\alpha D^\beta \quad (2.101)$$

Rozpatrzmy minimalne wyrazy kinetyczne:

$$G^i_j = \delta^i_j \quad (2.102)$$

Potencjał Kählera przybierze wtedy postać:

$$G = z_i z^{i*} + M_P^2 \log \frac{|W|^2}{M_P^6} \quad (2.103)$$

Gdzie M_P jest masą Plancka.

Pierwsza pochodna potencjału Kählera jest dana wzorem :

$$G_i = z^{i*} + M_P^2 \frac{W^i(z_i)}{W(z)} \quad (2.104)$$

Zaś potencjał skalarny przyjmuje postać:

$$V = \exp\left(\frac{z_i z^{i*}}{M_P^2}\right) \left[\left| W^i + \frac{z^{i*}}{M_P^2} W \right|^2 - \frac{3}{M_P^2} |W|^2 \right] \quad (2.105)$$

W przeciwieństwie do globalnej SUSY, potencjał ten nie jest dodatnio określony.

2.3.1 Łamanie supersymetrii w supergravitacji

Teraz postaramy się przedstawić warunki konieczne i wystarczające dla spontanicznego naruszenia lokalnej supersymetrii. W porównaniu z globalną supersymetrią, w polu pomocniczym \tilde{F} , którego niezerowa wartość próżniowa mierzy łamanie supersymetrii, pojawia się dodatkowy wyraz:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^i &= e^{\frac{G}{M_P^2}} F^i \\ F^i &= \left(W^i + \frac{z^{i*}}{M_P^2} W \right) \end{aligned} \quad (2.106)$$

Przy czym w granicy $M_P \rightarrow \infty$ odtwarzamy wynik globalny. Skalę przy której następuje łamanie supergravitacji znajdujemy z:

$$M_S^2 = \langle F \rangle \exp\left(\frac{z_i z^{i*}}{M_P^2}\right) \quad (2.107)$$

Możemy rozważyć trzy przypadki:

Supersymetria

- $E_{vac} < 0$ — Anty de Sitter
- $E_{vac} = 0$ — Super-Poincaré
- $E_{vac} > 0$ — de Sitter zawsze implikuje złamaną $N = 1$ SUGRA.

gdzie $E_{vac} = \langle V \rangle$ Aby łamać SUGRA ze znikającą energią próżni (stałą kosmologiczną) potrzebujemy by:

$$\sum_i F^i F_i^* = \frac{3}{M_P^2} |W|^2 \quad (2.108)$$

Jeżeli $\sum_i F^i F_i^* = \frac{3}{M_P^2} |W|^2$ oraz $M_S \neq 0$, to grawitino staje się masywne w wyniku efektu super-Higgsa:

$$m_{3/2} \equiv M_P \left\langle \exp \left(-\frac{G}{2M_P^2} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{g}{M_P^2} \exp \left(\frac{z_i z_i^*}{M_P^2} \right) \right\rangle \quad (2.109)$$

wynika stąd ważna relacja:

$$m_{3/2} = \frac{M_S^2}{\sqrt{3} M_P} \quad (2.110)$$

w wypadku znikającej stałej kosmologicznej $\kappa_{c.c.} = 0$. Obserwujemy, że energia próżni nie jest już parametrem porządku.

Przedyskutujmy prosty przykład pokazujący, że może być złamana SUSY oraz $E_{vac} = 0$ “Odgrzejemy” przykład, zawierający jedno pole z oraz stały superpotencjał $W = m^3$. Potencjał jest dany przez:

$$V = m^6 \exp \left(\frac{z z^*}{M_P^2} \right) \left[\frac{|z|^2}{M_P^4} - \frac{3}{M_P^2} \right] \quad (2.111)$$

z punktami stacjonarnymi:

- w $z = 0$ SUGRA jest złamana, lecz jest to tylko lokalne minimum potencjału,
 $V = -m^6 \frac{3}{M_P^2}$
- oraz w $|z| = \sqrt{2} M_P$, przy czym jest to prawdziwe minimum złamanej supersymetrii,
 $V = -m^6 \exp(\sqrt{2}) \frac{1}{M_P^2} \approx -m^6 4.11 \dots \frac{1}{M_P^2}$, zaś $E_{vac} < 0$ dla $z = \pm \sqrt{2} M_P$

Rozważmy teraz bardziej skomplikowany przykład. Będzie to prosty model ze spontanicznie złamaną supersymetrią oraz $E_{vac} = 0$. Skupmy się na superpotencjale:

$$W(z) = m^2 (z + \beta). \quad (2.112)$$

Nieznikająca wartość próżniowa dla

$$F = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{z^*}{M_P^2} = m^2 \left(1 + \frac{z^* (z + \beta)}{M_P^2} \right) \quad (2.113)$$

będzie sygnalizować łamanie supersymetrii.

Równanie:

$$M_P^2 + zz^* + z^*\beta = 0 \quad (2.114)$$

ma rozwiązanie:

$$z = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 - 4M_P^2} \quad (2.115)$$

Ponieważ równanie $M_P^2 + zz^* + z^*\beta = 0$ dopuszcza tylko rzeczywiste rozwiązania przyjmujemy, że β jest rzeczywiste. To równanie (2.115) implikuje, że SUSY jest złamana dopóki zachodzi związek $|\beta| < 2M_P$.

Skupmy się najpierw na przypadku $\beta = 0$, kiedy potencjał jest proporcjonalny do:

$$V \sim (M_P^2 + |z|^2)^2 - 3M_P^2 |z|^2 \quad (2.116)$$

i jest dodatni dla minimum w $z = 0$. Zwiększanie β implikuje zmniejszenie energii próżni. Jeżeli chcemy zwiększać β dopóki potencjał nie “dotknie” zera. Zobaczmy co się dzieje dla $\beta = (2 - \sqrt{3})M_P$, dla której z osiąga wartość $M_P(\sqrt{3} - 1)$. Okazuje się, że potencjał jest dodatnio określony przez $E_{vac} = 0$, i ponieważ $|\beta| < 2M_P$, SUSY jest złamana. Występuje tutaj efekt super-Higgosa. W skutek efektu superhiggosa grawitino staje się masywne (grawitino pochłania fermion z chiralnego superpola), zaś jego masa dana jest przez:

$$m_{3/2} = \frac{m^2}{M_P} \exp\left(\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\right) \quad (2.117)$$

Pole z rozpada się na dwa pola skalarne o masach odpowiednio:

$$\begin{aligned} m_1^2 &= 2\sqrt{3}(m_{3/2})^2 \\ m_2^2 &= 2(2 - \sqrt{3})(m_{3/2})^2 \end{aligned} \quad (2.118)$$

Supersymetria jest złamana i $E_{vac} = 0$ Obserwowana tutaj sytuacja nie jest możliwa w przypadku globalnej SUSY. Ten ostatni przykład to tzw. model Polony’ego.

Zanim zamkniemy ten rozdział przedyskutujmy jeszcze jeden interesujący model. Dotychczas zajmowaliśmy się tylko modelami z minimalnym wyrazem kinetycznym dla pól skalarnych. Modele z nieminimalnym wyrazem kinetycznym są również bardzo interesujące. Rozpatrzmy funkcję Kälera w postaci:

$$G = 3M_P^2 \log\left(\frac{\phi + \phi^*}{M_P}\right) - M_P^2 \log\frac{|W|^2}{M_P^6} \quad (2.119)$$

przy stałej wartości superpotencjału $W = m^3$. Potencjał dany przez:

$$V = M_P^4 \exp\left(-\frac{G}{M_P^2}\right) \left(\frac{1}{M_P^2} G_k (G^{-1})^k{}_i G^i - 3\right) \quad (2.120)$$

Supersymetria

znika on tożsamościowo. Jednak masa grawitina

$$m_{3/2} = M_P^2 e^{\frac{G}{M_P^2}} = \frac{|g|^2}{(\phi + \phi^*)^3} \quad (2.121)$$

nie znika, co oznacza, że SUSY jest złamana. Taki model nazywany jest modelem bezskalowym, *no-scale*. Modele tego typu pojawiają się zazwyczaj w niskoenergetycznej granicy w teorii strun.

Uzupełnienie techniczne

3.1 Formalizm spinorów Weyla

Przedstawimy dwukomponentową notację spinorową. Dwukomponentowe spinory są niezwykle przydatne w teoriach z chiralnymi fermionami. Używamy metryki $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Zacznijmy od zdefiniowania dwuwymiarowej macierzy $M \in SL(2, C)$. Macierz M , jej sprzężenie zespolone M^* , odwrotność wraz z transpozycją $(M^T)^{-1}$, oraz sprzężenie hermitowskie i odwrotność $(M^\dagger)^{-1}$, też należą do grupy $SL(2, C)$.

Dwukomponentowe spinory z górnymi i dolnymi “kropkowanymi” wskaźnikami są definiowane przez transformację względem grupy $SL(2, C)$

$$\begin{aligned} \psi'_\alpha &= M_\alpha^\beta \psi_\beta & \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}} &= M^*_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} \\ \psi'^\alpha &= M^{-1}{}^\alpha_\beta \psi^\beta & \bar{\psi}'^{\dot{\alpha}} &= (M^*)^{-1}{}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Greckie wskaźniki odnoszą się do spinorów. Spinory z kropkowanymi wskaźnikami transformują się jak $(0, \frac{1}{2})$ reprezentacja grupy Lotentza, podczas gdy niekropkowane – zwykle wskaźniki transformują się jak $(\frac{1}{2}, 0)$ – sprzężona reprezentacja.

Macierze σ , to dwuwymiarowe zespolone macierze:

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Każda macierz hermitowska może być przedstawiona w postaci:

$$P \equiv (p_m \sigma^m) = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Uzupełnienie techniczne

gdzie p_m jest rzeczywiste. Z dowolnej macierzy hermitowskiej możemy otrzymać inną macierz hermitowską dzięki transformacji

$$P' = MPM^\dagger. \quad (3.4)$$

obie macierze P i P' można przedstawić poprzez macierze σ ,

$$(\sigma^m p'_m) = M(\sigma^m p_m)M^\dagger, \quad (3.5)$$

przy czym p_m i p'_m są rzeczywiste.

Dopóki macierz M jest unimodularna ($\det M = 1$), dopóty p_m i p'_m są powiązane transformacją Lorentza:

$$\det(\sigma^m p'_m) = \det(\sigma^m p_m) = p_0'^2 - \vec{p}'^2 = p_0^2 - \vec{p}^2. \quad (3.6)$$

Z wzorów (3.1) oraz (3.4), łatwo dostrzec, że σ^m ma następującą strukturę wskaźników

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m. \quad (3.7)$$

W tej konwencji, $\psi^\alpha \psi_\alpha$, $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ oraz $\psi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ są skalarami Lorentzowskimi.

Ponieważ M jest macierzą unimodularną, to całkowicie antisymetryczne tensory $\varepsilon^{\alpha\beta}$ oraz $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ($\varepsilon_{21} = \varepsilon^{12} = -1$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = 1$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$) są niezmiennicze względem transformacji Lorentza:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= M_\alpha^\gamma M_\beta^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} \\ \varepsilon^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\gamma\delta} M_\gamma^\alpha M_\delta^\beta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dzięki temu spinory z górnymi i dolnymi indeksami możemy połączyć przez tensor ε ,

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta. \quad (3.9)$$

gdzie $\varepsilon_{\alpha\beta}$ oraz $\varepsilon^{\alpha\beta}$ spełniają związek: $\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$. Analogicznie postępujemy dla kropkowanych wskaźników.

Tensor ε używamy również do podnoszenia wskaźników macierzy σ

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\beta} \varepsilon^{\alpha\gamma} \sigma_{\beta\gamma}^m. \quad (3.10)$$

Łatwo otrzymać relacje między dwukomponentowymi a czterekomponentowymi spinorami. Rolę macierzy Pauliego przejmują macierze Diraca γ :

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

W tej notacji $\bar{\sigma}^0 = \sigma^0$, $\bar{\sigma}^i = \sigma^i$. Nazywamy tę reprezentację macierzy Diraca reprezentacją Weyla. Jeżeli zapiszemy w tej reprezentacji spinory Diraca, składać się one będą z dwu spinorów Weyla:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

Spinory Majorany zawierają tylko jeden spinor Weyla:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

W notatkach stosowaliśmy konwencję sumacyjną:

$$\begin{aligned} \psi\chi &= \psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

gdzie należy pamiętać, że spinory antykomutują. Definicja $\bar{\psi}\bar{\chi}$ jest dana przez:

$$(\chi\psi)^\dagger = (\chi^\alpha\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}. \quad (3.15)$$

3.2 Algebra Poincare

Algebra grupy Poincare składa się z 10-ciu generatorów: 3 generatorów pchnięć K^i , 3 generatorów obrotów J^i oraz 4 generatorów translacji $P^0 = H$ i P^i , gdzie $i = 1, 2, 3$. Generatory translacji reprezentować można przez pochodne,

$$P^0 = i\partial/\partial t, \quad P^i = -i\partial/\partial x^i. \quad (3.16)$$

Dowolną właściwą¹ transformację Poincare można zapisać w postaci

$$e^{i\theta^i J^i - i\eta^i K^i - iHt + ix^i P^i}, \quad (3.17)$$

gdzie generatory spełniają następujące relacje komutacyjne

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk} J^k, & [J^i, K^j] &= i\epsilon^{ijk} K^k, & [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijk} J^k, & (3.18) \\ [H, J^i] &= 0, & [H, K^i] &= -iP^i, & [J^i, P^j] &= i\epsilon^{ijk} P^k, \\ [P^i, K^j] &= -iH\delta^{ij}. \end{aligned}$$

Algebrę tę można zapisać w sposób kowariantny

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 & (3.19) \\ [P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= (-i)(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= (-i)(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho}). \end{aligned}$$

Składowe antysymetrycznego tensora $M^{\mu\nu}$ związane są z J^i i K^i następująco: $K^i = M^{0i}$, $J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{klm} M^{lm}$. Operatorami Casimira dla algebry Poincaré są:

$$1. P_\mu P^\mu =: P^2$$

¹Tzn transformację deformowalną w sposób ciągły do transformacji tożsamościowej

Uzupełnienie techniczne

2. $W_\mu W^\mu =: W^2$, gdzie W^μ jest wektorem Pauli–Lubanskiego (jest to relatywistyczne uogólnienie wektora spinu): $W^\mu := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}$.

Gdy $m^2 = P^2 \neq 0$

to w układzie spoczynkowym masywnej cząstki

$$\begin{aligned} P_\mu &= (m, \vec{0}) \\ W^2 &= -m^2 \vec{J}^2, \quad \vec{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12}) \\ \vec{J}^2 &= s(s+1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dodatkowymi liczbami kwantowymi numerującymi stany wewnątrz reprezentacji o ustalonych m i j są składowe pędu p^i oraz wartości własne λ operatora skrętności $\hat{\lambda} = \vec{J}\vec{p}/|\vec{p}|$. Operator skrętności komutuje ze składowymi pędu.

Konstruowanie reprezentacji algebry Poincaré w przypadku masywnym staje się proste, jeżeli weźmie się pod uwagę izomorficzność algebry $SO(1,3)$ i algebry $SU(2) \oplus SU(2)$. Izomorficzność tę widać, gdy zdefiniuje się niehermitowskie kombinacje generatorów K^i i J^i

$$J_\pm^i = \frac{1}{2} (J^i \pm iK^i). \quad (3.21)$$

Operatory te spełniają związki

$$\begin{aligned} [J_\pm^i, J_\pm^j] &= i\varepsilon^{ijk} J_\pm^k, \\ [J_-^i, J_+^j] &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Reprezentacje o określonych j_\pm oznaczamy przez (j_+, j_-) . Nietrywialnymi reprezentacjami o najniższym, równym 2, wymiarze są $(1/2, 0)$ i $(0, 1/2)$. Pozostałe reprezentacje można znaleźć, tak jak dla algebry $SU(2)$, przez tensorowanie tych reprezentacji spinorowych. Na przykład, $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$, gdzie ta ostatnia reprezentacja jest reprezentacją zawierającą wektor i skalar względem obrotów, to znaczy wektor względem transformacji Lorentza.

Spinory $(1/2, 0)$ nazywamy spinorami lewymi, a spinory $(0, 1/2)$ – prawymi. Spinor Dirakowski jest sumą prostą reprezentacji $(1/2, 0)$ i $(0, 1/2)$, $\psi = (1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$, ponieważ ta suma jest najmniejszą reprezentacją, która jest niezmiennicza względem parzystości przestrzennej, P . two sprawdzić, że P zamienia J_+^i na J_-^i i odwrotnie. W reprezentacji Weyla dla spinorów Diraka, górna, wyrzutowywana przez $P_L = (1 - \gamma^5)/2$, połowa spinora transformuje się jak $(1/2, 0)$, zaś dolna połowa, wyrzutowywana przez $P_R = (1 + \gamma^5)/2$, transformuje się jak $(0, 1/2)$.

W reprezentacji Weyla dla macierzy Diraka generatory obrotów i pchnięć wyglądają następująco

$$J^i = \begin{pmatrix} \sigma^i/2 & 0 \\ 0 & \sigma^i/2 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$K^i = -i \begin{pmatrix} \sigma^i/2 & 0 \\ 0 & -\sigma^i/2 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

gdzie σ^i , $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

W tej reprezentacji $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

W reprezentacji Diraka $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Często przydatny okazuje się następujący związek: $e^{i\vec{r}\vec{\sigma}} = \cos(r) + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{r} \sin(r)$, gdzie $r = |\vec{r}|$, zaś σ^i to macierze Pauliego.

W przypadku reprezentacji bezmasowych, $m = 0$, sytuacja jest nieco bardziej złożona.

Dla cząstki bezmasowej możemy przejść do układu odniesienia, w którym czteropęd cząstki przyjmuje postać $p^\mu = (p, 0, 0, p)$, $p \geq 0$. W tym układzie składowe czterowektora spinu (czterowektora Pauliego-Lunbanskiego) przyjmują postać

$$\begin{aligned} W^1 &= (J_{02} - J_{23})p = -(K^2 + J^1)p \\ W^2 &= (J_{13} - J_{01})p = (K^1 - J^2)p \\ W^0 &= W^3 = -pJ_{12} = -pJ^3. \end{aligned} \quad (3.25)$$

two sprawdzić, że zachodzą następujące relacje komutacyjne

$$\begin{aligned} [W^0, W^1] &= -ipW^2 \\ [W^0, W^2] &= ipW^1 \\ [W^1, W^2] &= 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Aby upodobnić tę algebrę do algebry $SU(2)$ (algebry obrotów), której reprezentacje dobrze znamy, zdefiniujemy operatory podnoszące i obniżające λ_\pm oraz operator wagowy λ

$$\lambda_\pm = W^1 \pm iW^2, \quad \lambda = -\frac{1}{p}W^0 = +J^3 = \frac{\vec{p}\vec{J}}{|\vec{p}|}, \quad (3.27)$$

które spełniają relacje komutacyjne

$$\begin{aligned} [\lambda_\pm, \lambda] &= -(\pm\lambda_\pm) \\ [\lambda_+, \lambda_-] &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Jak widać, operatorem wagowym, którego wartości własne są podwyższane i obniżane przez operatory λ_\pm , jest operator skretności.

Algebra (3.28) jest algebrą ruchów w 2-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej, oznaczaną zazwyczaj przez E_2 (dwie translacje λ_{\pm} i obrót λ). Operatorem Casimira dla algebry (3.28) jest operator $A = \lambda_+ \lambda_-$. Ponieważ składowe czterowektora W^μ są rzeczywiste, to operator A jest hermitowski i ma rzeczywiste wartości własne. Można wybrać jako bazę w przestrzeni Hilberta stany, które są stanami własnymi A i λ (podalgebra Cartana algebry E_2 jest 1-wymiarowa). Niech $\lambda u(A, \mu) = \mu u(A, \mu)$. Wtedy $[\lambda_+, \lambda]u(A, \mu) = -\lambda_+ u(A, \mu)$, co oznacza, że

$$\lambda(\lambda_+ u(A, \mu)) = (\mu + 1)\lambda_+ u(A, \mu), \quad (3.29)$$

co z kolei oznacza, że

$$\lambda_+ u(A, \mu) = a_+(\mu)u(A, \mu + 1). \quad (3.30)$$

Podobnie

$$\lambda_- u(A, \mu) = a_-(\mu)u(A, \mu - 1). \quad (3.31)$$

Ponieważ

$$\langle A, \mu' | \lambda_+ | A, \mu \rangle^* = \langle A, \mu | \lambda_- | A, \mu' \rangle, \quad (3.32)$$

i powyższe elementy macierzowe nie znikają tylko dla $\mu' = \mu + 1$, to zachodzi równość $a_+^*(\mu) = a_+(\mu + 1)$. Z kolei

$$\lambda_+ \lambda_- u(A, \mu) = \lambda_- \lambda_+ u(A, \mu), \quad (3.33)$$

skąd wynika równość $a_-(\mu)a_+(\mu - 1) = a_+(\mu)a_-(\mu + 1)$. Dlatego, dla każdego μ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |a_+(\mu - 1)|^2 &= |a_+(\mu)|^2 \\ |a_-(\mu)|^2 &= |a_-(\mu + 1)|^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ponieważ wszystkie stany w danej reprezentacji otrzymujemy przez wielokrotne działanie operatorami λ_{\pm} na pewien stan początkowy, to dla wszystkich stanów w reprezentacji nieprzywiedlnej $|a_+| = v_+$ i $|a_-| = v_-$ dla pewnych ustalonych rzeczywistych v_- i v_+ . Ponadto, $a_+^*(\mu) = a_-(\mu + 1)$, zatem $v_- = v_+ = v$.

Możliwe są dwa przypadki:

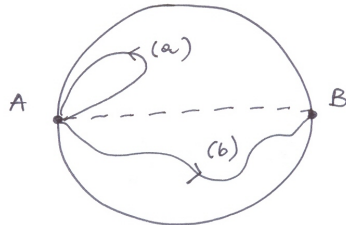
- $v \neq 0$ – w tym przypadku nie ma żadnych ograniczeń na dozwolone wartości v i μ i otrzymujemy nieskończenie wymiarowe reprezentacje. Nie znamy realizowanych w przyrodzie stanów fizycznych, którym te reprezentacje mogłyby odpowiadać.
- $v = 0$ – reprezentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe. Odpowiadają one na przykład stanom fotonów i grawitonów. W teoriach niezmienniczych względem $\mathcal{CP}\mathcal{T}$ najmniejszą reprezentacją, która jest niezmiennicza względem $\mathcal{CP}\mathcal{T}$, jest reprezentacja dwuwymiarowa, która jest sumą prostą reprezentacji o skrętnościach μ i $-\mu$ (pod działaniem $\mathcal{CP}\mathcal{T}$ $\lambda \rightarrow -\lambda$). Fizyczne fotony, bezmasowe neutrina i grawitony utożsamiamy z takimi właśnie dwuwymiarowymi reprezentacjami.

Okazuje się, że skrętność μ jednowymiarowych reprezentacji bezmasowych jest skwantowana. Skrętność jest generatorem obrotów wokół kierunku \vec{p} . Zatem pod działaniem obrotu o kąt 2π stan skrętnościowy zmienia się o fazę

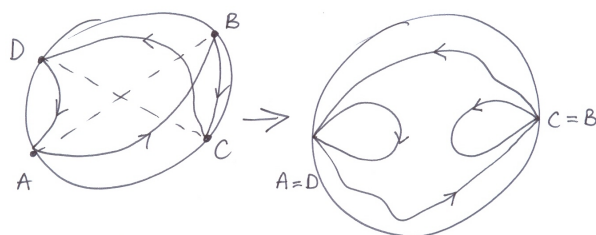
$$|\mu\rangle \rightarrow e^{i2\pi\mu}|\mu\rangle. \quad (3.35)$$

Analiza struktury grupy obrotów prowadzi do wniosku, że $2\pi\mu = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, zatem $\mu = \frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Argumentacja przebiega następująco. Obroty w trzech wymiarach można scharakteryzować przez podanie kierunku \vec{n} i kąta $\phi \leq \pi$. Ale obroty o kąt π wokół kierunku \vec{n} i $-\vec{n}$ prowadzą do tej samej konfiguracji przestrzennej, trzeba je zatem utożsamiać. Zatem punkty A i B na rysunku 3.1 oznaczają to samo przekształcenie, ale cykle (a) i (b) nie dadzą się na siebie przekształcić w sposób ciągły. Wykonanie po kolei wszystkich przekształceń wzdłuż drogi (a) musi dać w wyniku przekształcenie tożsamościowe, I . Natomiast wykonanie po kolei przekształceń wzdłuż drogi typu (b) daje w wyniku przekształcenie P , które przekształceniem tożsamościowym być nie musi. Natomiast trzeba zauważyć, że złożenie dwu dróg typu (b), na przykład (b) i (b') z rysunku 3.2, daje się zdeformować do drogi typu (a). Zatem $P^2 = I$. Ponieważ w przestrzeni 1-wymiarowej P musi być liczbą zespoloną o module 1, to $P = e^{i\pi}$ lub $P = e^{i2\pi}$. Oba wybory są dopuszczalne. W szczególności, wybór pierwszej z tych możliwości oznacza, że dopuszczalnymi wartościami wielkości $2\pi\mu$ są oprócz całkowitych wielokrotności 2π również całkowite wielokrotności π . Stąd stanom fizycznym mogą odpowiadać połówkowe wartości skrętności. Stany o połówkowych skrętnościach opisują fermiony.



Rysunek 3.1: Obroty A i B są tymi samymi przekształceniami w przestrzeni konfiguracyjnej, lecz zamkniętych dróg (a) i (b) nie można w sposób ciągły przekształcić na siebie.



Rysunek 3.2: Złożenie dwu dróg typu (b) jest drogą typu (a) (cyklem ściągającym do punktu).

Bibliografia

- [1] J. Wess and J. Bagger,
“Supersymmetry And Supergravity”.
- [2] M. Sohnius,
“Introducing Supersymmetry,” Physics Reports 121.
- [3] M. Drees,
“An introduction to supersymmetry,” arXiv:hep-ph/9611409.
- [4] L. O’Raifeartaigh,
“Spontaneous Symmetry Breaking For Chiral Scalar Superfields,” Nucl. Phys. B **96** (1975) 331.
- [5] P. Fayet and J. Iliopoulos,
“Spontaneously Broken Supergauge Symmetries And Goldstone Spinors,” Phys. Lett. B **51** (1974) 461.
- [6] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello and A. Van Proeyen,
“Yang-Mills Theories With Local Supersymmetry: Lagrangian, Transformation Laws And Superhiggs Effect,” Nucl. Phys. B **212** (1983) 413.