

Zadania z Mechaniki Kwantowej II A

Seria 3

1. Rozważ zespolone pole skalarne (niehermitowski operator pola)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (1)$$

oraz rozkład

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 k}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}} [a(\vec{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k}) e^{ikx}], \quad (2)$$

gdzie $E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

- (a) Pokaż, że $(a, a^\dagger)$ i $(b, b^\dagger)$ tworzą dwa niezależne układy operatorów kreacji i anihilacji. Policz $\langle 0 | T(\phi(x) \phi^\dagger(0)) | 0 \rangle$.

- (b) Pokaż, że prąd $J_\mu = i(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \partial_\mu \phi^\dagger \phi)$ jest zachowany, tzn że $\partial_\mu J^\mu = 0$, oraz

$$Q = \int d^3 x J_0 = \int d^3 k [a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k})]. \quad (3)$$

- (c) Pokaż, że $[Q, \phi(x)] = -\phi(x)$.

2. Używając Hamiltonianu dla swobodnego hermitowskiego (rzeczywistego) pola skalarnego oblicz

$$\langle \vec{k} | H | \vec{k}' \rangle, \quad |\vec{k} \rangle = a^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle. \quad (4)$$

3. Spróbuj skwantować rzeczywiste pole skalarne używając antykomutatorów

$$\{a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})\} = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \quad (5)$$

etc.. Policz $\{\phi(\vec{x}, t=0), \phi(\vec{y}, t=0)\}$, skomentuj wynik.

4. Pokaż, że dla dowolnej funkcji f zachodzi

$$\int d^4 k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) f(k^0, \vec{k}) = \int \frac{d^3 k}{2E_k} f(E_k, \vec{k}). \quad (6)$$

Dla jakiej klasy transformacji Lorentza $\frac{d^3 k}{2E_k}$ jest miarą niezmienniczą?